где Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Psi \frac{d^2\Psi}{dt^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 - \Psi^4\left(\frac{c_2^2}{2} + 2c_1\right) = 0$$

решение которого

$$\Psi^{-1} = c_3 (t - c_4)^2 - c_2^2 - 4c_1$$

Поступила 17 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
2. Truesdell C. On the Pressures and Flux of Energy in a Gas according to Maxwells Kinetic Theory. Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 5, № 1, 1956.
3. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. Сб. «Механика». ИЛ, вып. 4—5, 1952.
4. Lin T. C. and Street R. E. Effect of Variable Viscosity and Thermal Conductivity on High-Speed Flow between Concentric Cylinders. NACA Rep., № 1175, 1954.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВИЖЕНИЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ

В. Н. Жигулев

(Москва)

Уравнения магнитной гидромеханики для идеальной среды (т. е. среды, лишенной потерь на джоулево тепло, вязкость и теплопроводность) могут быть записаны в виде (см., например, [1]):

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, && \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\right) = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, && \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p^* = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} \\ &\frac{ds}{dt} = 0, && p^* = p + \frac{H^2}{8\pi} \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, s — энтропия единицы массы, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частиц газа, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, d/dt — производная по времени для фиксированной частицы.

Систему уравнений (1) необходимо дополнить уравнением состояния среды, которое запишем:

$$p = f(\rho, s) \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать класс движений, подчиняющийся следующим условиям:

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = 0, \qquad (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

Физически условия (3) означают неизменность векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{v}$ вдоль силовых магнитных линий.

Важными случаями этого класса движений являются плоское и осесимметрическое (в общем случае нестационарные) течения, где векторы скорости и напряженности магнитного поля перпендикулярны. Отметим, что одномерное нестационарное течение, являющееся также частным случаем рассматриваемого класса движений, было изучено в работе [2].

Уравнения движения, принимая во внимание условия (3), примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \qquad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p^* = 0, \qquad \frac{ds}{dt} = 0 \\ &p^* = f(\rho, s) + k^2\rho^2, \qquad \mathbf{H} = 2\sqrt{2\pi}\,\mathbf{k}\cdot\rho \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathbf{k}$ — вектор-функция, постоянная вдоль линий траекторий течения.

Рассмотрим изменение циркуляции вектора скорости $\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{e}$ вдоль жидких контуров (т. е. контуров, перемещающихся вместе с потоком газа) для класса движений, удовлетворяющих уравнениям (4).

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} d\mathbf{e}' = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{e}' \tag{5}$$

Подставляя в уравнение (5) значение ускорения $d\mathbf{v} / dt$ из уравнения второго системы (4) и применяя теорему Стокса, имеем:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \iint\limits_S \frac{[\nabla\rho \cdot \nabla p^*]}{\rho^2} d\mathbf{S} \tag{6}$$

(S — поверхность, «натянутая» на рассматриваемый контур) или привлекая выражение для p^* из (4), получим:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \iint\limits_S \left(\frac{q}{\rho^2} [\nabla\rho \cdot \nabla s] + 2k [\nabla\rho \cdot \nabla k]\right) d\mathbf{S} \qquad \left(q = \frac{\partial f}{\partial s}\right) \tag{7}$$

Таким образом, если течение рассматриваемого класса изоэнтропично и величина k для него постоянна в пространстве, то циркуляция вдоль жидких контуров обладает свойством сохраняемости. Полученное свойство является аналогом теоремы Томпсона для рассматриваемых движений. Из доказанного свойства следует существование в рассматриваемом классе безвихревых течений.

Уравнение второе системы (4) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \nabla p^* - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] = 0 \tag{8}$$

Проектируя векторное уравнение (8) на направление вектора скорости $\mathbf{v}$, имеем:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_e + \frac{d}{de}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{de} = 0 \tag{9}$$

Далее, предполагая движение стационарным и интегрируя уравнение (9), принимая во внимание (4), получаем аналог уравнения Бернулли для рассматриваемых движений:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{H^2}{4\pi\rho} = \text{const} = \omega \tag{10}$$

Интеграл (10) справедлив вдоль линии тока, а в случае изотропического течения и если величина k постоянна, — для всего пространства (т. е. в последнем случае ω — универсальная для всего потока константа).

Рассматривая теперь движение нестационарным и безвихревым и интегрируя уравнение (9), получаем следующий аналог уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{H^2}{4\pi\rho} = \omega_1 (t) \tag{11}$$

где ω_1 — универсальная функция времени t для данного течения, φ — потенциал скорости.

Большинство известных в обычной гидромеханике методов (как, например, метод характеристик, метод линеризированных течений и т. д.) может быть без труда перенесено на рассматриваемый случай.

Движения, аналогичные течениям Прандтля — Майера и коническим течениям Буземана, также могут быть легко получены применительно к рассматриваемому классу. В изоэнтропическом случае, если величина k постоянна во всем потоке, рассматриваемые движения сводятся к изоэнтропическим газодинамическим, в которых роль давления выполняет величина p^*, а среда изменена так, что адиабата выражается согласно уравнению

$$p^* = f(\rho, s_0) + k^2\rho^2 \tag{12}$$

В заключение отметим, что те же решающие упрощения для задач магнитной гидромеханики могут быть получены в случае движения вязкого теплопроводного газа, если там выполняются условия (3).

Поступила 7 II 1 58

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л., Лифшиц Е., Электродинамика сплошных сред. 1957.
2. Каплан С. А., Станюкович К. П., Решение уравнений магнитогазодинамики для одномерного течения, ДАН СССР, XVI, № 4, 1954.