ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ГРЭДА

В. С. Галкин

(Жуковский)

Значения напряжений и тепловых потоков сдвигового течения идеального одноатомного максвеллова газа при отсутствии внешних сил вычислены в работах [1, 2] при помощи уравнений кинетических моментов. Это позволило путем сравнения оценить область применимости уравнений Навье-Стокса, Барнета и т. д., а также выявить характер влияния разреженности на параметры потока. В настоящей работе рассматривается более широкий класс течений такого газа, когда все моменты функции распределения зависят от времени t, а макроскопическая скорость, кроме того, линейно зависит от координат.

Если внешние силы отсутствуют, то уравнения неразрывности, импульса, энергии, напряжений p_{ij} и моментов третьего порядка S_{ijk} идеального одноатомного газа с максвелловыми молекулами соответственно имеют вид [3]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_r}(\rho u_r)=0,\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_i}{\partial x_r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ir}}{\partial x_r}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_r}(pu_r)+\frac{2}{3}(p_{ij}+p\delta_{ij})\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{3}\frac{\partial s_r}{\partial x_r}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_r}(u_r p_{ij})+\frac{\partial S_{ijr}}{\partial x_r}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial S_r}{\partial x_r}+2\left[p_{ir}\frac{\partial u_j}{\partial x_r}\right]+2p\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]+\alpha p_{ij}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial S_{ijk}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_r}(u_r S_{ijk}+Q_{ijkr})+S_{ijr}\frac{\partial u_k}{\partial x_r}+S_{irk}\frac{\partial u_j}{\partial x_r}+S_{rjk}\frac{\partial u_i}{\partial x_r}-$$

$$-\frac{1}{\rho}\left(\tau_{ij}\frac{\partial\tau_{kr}}{\partial x_r}+\tau_{ik}\frac{\partial\tau_{jr}}{\partial x_r}+\tau_{jk}\frac{\partial\tau_{ir}}{\partial x_r}\right)+\frac{\alpha}{6}(9S_{ijk}-S_i\delta_{jk}-S_j\delta_{ik}-S_k\delta_{ij})=0 \tag{3}$$

Здесь использовано обычное правило суммирования по повторяющимся индексам

$$\alpha=\frac{R\rho}{\mu_0},\qquad \mu_0=\frac{\mu}{T},\qquad R=\frac{p}{\rho T},$$ тепловой поток

$$\frac{1}{2}S_r=\frac{1}{2}S_{rkk},\qquad \tau_{ij}=p_{ij}+p\delta_{ij},\qquad p_{11}+p_{22}+p_{33}=0$$

Q_{ijkr} — момент четвертого порядка, δ_{ij} — единичный тензор,

$$[A_{ij}]=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})-\frac{1}{3}A_{kk}\delta_{ij}$$

Пусть

$$\rho=\rho(t),\qquad \tau_{ij}=\tau_{ij}(t),\qquad S_{ijk}=S_{ijk}(t)$$

$$Q_{ijkr}=Q_{ijkr}(t),\qquad u_i=\Psi_{ij}(t)x_j+\varphi(t)$$

В дальнейшем для простоты будем полагать $\varphi(t)=0$. Тогда из уравнения неразрывности имеем

$$\rho=\rho_0\exp\left(-\int I\,dt\right)\qquad (I=\Psi_{11}+\Psi_{22}+\Psi_{33})$$

из уравнения импульса

$$\frac{d\Psi_{i1}}{dt}+\Psi_{r1}\Psi_{ir}=0,\qquad \frac{d\Psi_{i2}}{dt}+\Psi_{r2}\Psi_{ir}=0,\qquad \frac{d\Psi_{i3}}{dt}+\Psi_{r3}\Psi_{ir}=0 \tag{4}$$

Уравнения (1) — (3) принимают вид:

$$\frac{dp}{dt}+\frac{5}{3}pI+\frac{2}{3}p_{ij}\Psi_{ij}=0 \qquad \left(\alpha_0=\frac{R\rho_0}{\mu_0}\right) \tag{5}$$

$$\frac{dp_{ij}}{dt}+p_{ij}I+2\,[p_{ir}\Psi_{jr}]+2p\,[\Psi_{ij}]+\alpha_0\exp\left(-\int I dt\right)p_{ij}=0 \tag{6}$$

$$\frac{dS_{ijk}}{dt}+S_{ijr}\Psi_{kr}+S_{irk}\Psi_{jr}+S_{rjk}\Psi_{ir}+S_{ijk}I+$$

$$+\frac{1}{6}\alpha_0\exp\left(-\int I dt\right)(9S_{ijk}-S_i\delta_{jk}-S_j\delta_{ik}-S_k\delta_{ij})=0 \tag{7}$$

Таким образом, задача определения моментов второго τ_{ij} и третьего S_{ijk} порядков сводится к решению двух независимых систем соответственно 6 и 10 однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, которые связаны уравнениями (4).

В приближении Барнета [4] рассмотренная задача имеет следующее решение:

$$S_r=0$$

$$\frac{p_{ij}}{p}=-\frac{2}{\alpha}[\Psi_{ij}]+\frac{10}{3\alpha^2}\Psi_{kk}[\Psi_{ij}]-\frac{2}{\alpha^2}[\Psi_{ki}\Psi_{jk}]-\frac{4}{\alpha^2}[[\Psi_{ik}]\Psi_{kj}]+\frac{8}{\alpha^2}[[\Psi_{ik}][\Psi_{kj}]]$$

где приближение Навье-Стокса дается первым членом

$$p=p(0)\exp\left[-\int_0^t\left(5I+2\Psi_{ij}\frac{p_{ij}}{p}\right)\frac{dt}{3}\right]$$

Здесь Ψ_{ij} — решения системы уравнений (4).

Система уравнений 13 моментов Грэда [3] в рассматриваемом случае дает точные значения напряжений и приближенные значения тепловых потоков, удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{dS_i}{dt}+\frac{7}{5}S_r\Psi_{ir}+\frac{2}{5}S_r\Psi_{ri}+\frac{7}{5}S_iI+\frac{2}{3}\alpha S_i=0 \tag{8}$$

справедливой при малых градиентах параметров потока.

Рассмотрим простейшие течения рассматриваемого класса.

а) Пусть $\Psi_{ij}=\Psi(t)\,\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда

$$\Psi(t)=\frac{1}{t+c}, \qquad \mathbf{V}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}=\frac{\mathbf{r}}{t+c}$$

т. е. имеем течение со сферическим расширением. При этом уравнение энергии принимает вид:

$$\frac{dp}{dt}+\frac{5p}{t+c}=0 \qquad \text{или} \qquad p=E\,(t+c)^{-5}$$

Далее легко получить, что

$$p_{ij}=p_{ij}(0)\exp\left[-5\ln(t+c)+\frac{1}{2}\alpha_0(t+c)^{-2}\right]$$

$$S_i=S_i(0)\exp\left[-6\ln(t+c)+\frac{1}{3}\alpha_0(t+c)^{-2}\right]$$

Система уравнений 13 моментов Грэда дает точные значения всех газодинамических параметров рассматриваемого течения. В приближениях Навье-Стокса и Барнета $p_{ij}=0$, $S_i=0$.

б) Пусть $\Psi_{11}=\Psi_{22}=\Psi_{33}=0$, т. е. плотность постоянна. Из системы (4) следует, что не равны нулю только три коэффициента Ψ_{ij}, связанные соотношением

$$\Psi_{nm}=-\Psi_{nl}\Psi_{lm}t+c_{nm}$$

где Ψ_{nl}, Ψ_{lm}, c_{nm} — постоянные. Например,

$$u=(-\Psi_{13}\Psi_{32}t+c_{12})\,y+\Psi_{13}z, \qquad v=0,\ w=\Psi_{32}y$$

т. е. в плоскостях $y = \mathrm{const}$ течение есть результат наложения равномерного потока $w = \Psi_{32} y$ на сдвиговое течение

$$u = (-\Psi_{13}\Psi_{32}t + c_{12})\, y + \Psi_{13} z$$

в) Пусть $\Psi_{ij} = \Psi(t)$. Тогда

$$\Psi = \frac{1}{t+c}, \qquad u = v = w = \frac{x+y+z}{t+c}$$

Скорость постоянна на плоскости $x + y + z = \mathrm{const}$ и перпендикулярна ей, т. е. имеет место одномерное убывающее во времени течение.

г) Все коэффициенты Ψ_{ij} постоянны и отличны от нуля; плотность постоянна ($I = 0$). Тогда четыре коэффициента Ψ_{ij} произвольны:

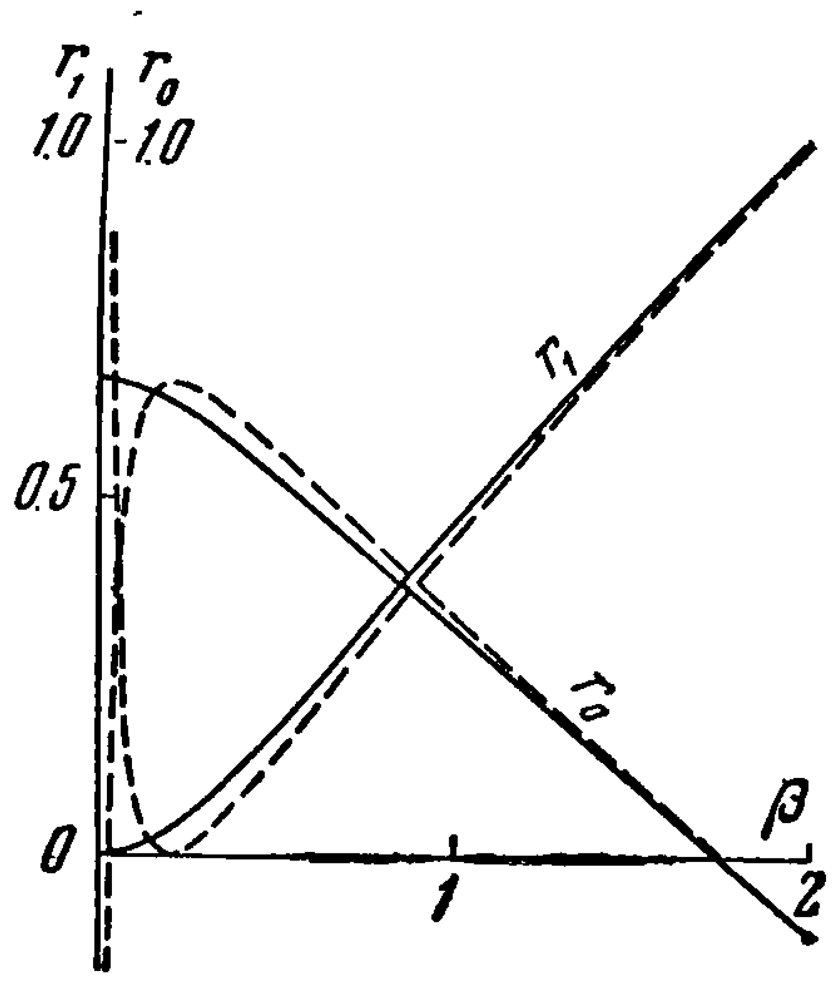
$$u = -\left(\Psi_{22} + \frac{\Psi_{32}\Psi_{23}}{\Psi_{22}}\right)\xi, \qquad v = \frac{\Psi_{31}\Psi_{22}}{\Psi_{32}}\,\xi$$

$$w = \Psi_{31}\xi, \qquad \xi = x + \frac{\Psi_{32}}{\Psi_{31}}\, y + \frac{\Psi_{32}\Psi_{23}}{\Psi_{31}\Psi_{22}}\, z$$

Скорость потока постоянна на поверхности тока $\xi = \mathrm{const}$, т. е. имеет место сдвиговое течение [1,2]. В приближении Навье-Стокса это течение представляет собой течение Куэтта с переменной во времени температурой стенок.

д) Легко убедиться, что сдвиговое течение реализуется и в плоском случае (9), если $\Psi_{11} = -\Psi_{22}$ ($\rho = \mathrm{const}$), откуда $\Psi_{12}, \Psi_{21}, \Psi_{11} = \pm\sqrt{-\Psi_{12}\Psi_{21}}$ — постоянные.

Интересной особенностью этого течения является следующее обстоятельство. Действительный корень $\lambda_1 = \alpha r_1$ характеристического уравнения $\lambda^3 + 2\alpha\lambda^2 + \alpha^2\lambda - \alpha^3\beta^2 = 0$ системы уравнений (5), (6) в широком диапазоне изменения



$$|\beta| \gtrsim 1 \qquad \left(\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\Psi_{12} - \Psi_{21}}{\alpha} = O(Ml/L)\right)$$

где M — число Маха, l/L — отношение длины свободного пробега молекул к характерному размеру течения, значительно точнее аппроксимируется разложением в ряд по большим β, когда $r_1 = \beta^{2/3} - {}^2/_3 + {}^1/_9\,\beta^{-2/3}$, чем по малым, когда $r_1 = \beta^2 - 2\beta^4$.

Аналогичное обстоятельство имеет место и для действительного корня $\lambda_0 = \alpha r$ характеристического уравнения

$$\lambda^3 + \frac{11}{3}\alpha\lambda^2 + \frac{17}{4}\alpha^2\lambda + \frac{1}{2}(3 - \beta^2)\,\alpha^3 = 0$$

системы уравнений для определения S_3.

На фиг. 1 сравниваются точные значения корней r_1, r_0 (сплошные линии) приближенные значения

$$r_1 = \beta^{2/3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\beta^{-2/3}, \qquad r_0 = \left(\frac{1}{2}\beta^2\right)^{1/3} - \frac{11}{9} + \frac{25}{324}\left(\frac{1}{2}\beta^2\right)^{-1/3}$$

Система уравнений (8) дает $r_0 = -{}^2/_3$.

е) В плоском случае система (4) имеет простое решение. В этом случае

$$\frac{d\Psi_{11}}{dt} + \Psi_{11}^2 + \Psi_{21}\Psi_{12} = 0, \qquad \frac{d\Psi_{21}}{dt} + \Psi_{11}\Psi_{21} + \Psi_{21}\Psi_{22} = 0$$

$$\frac{d\Psi_{12}}{dt} + \Psi_{11}\Psi_{12} + \Psi_{12}\Psi_{22} = 0, \qquad \frac{d\Psi_{22}}{dt} + \Psi_{12}\Psi_{21} + \Psi_{22}^2 = 0 \tag{9}$$

Отсюда

$$\Psi_{21} = c_1\Psi_{12} = c_1\Psi, \qquad \Psi_{11} - \Psi_{22} = c_2\Psi, \qquad 2\Psi_{11} = -\frac{d\ln\Psi}{dt} + c_2\Psi$$

где Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Psi \frac{d^2\Psi}{dt^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)^2 - \Psi^4\left(\frac{c_2^2}{2} + 2c_1\right) = 0$$

решение которого

$$\Psi^{-1} = c_3 (t - c_4)^2 - c_2^2 - 4c_1$$

Поступила 17 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
2. Truesdell C. On the Pressures and Flux of Energy in a Gas according to Maxwells Kinetic Theory. Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 5, № 1, 1956.
3. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов. Сб. «Механика». ИЛ, вып. 4—5, 1952.
4. Lin T. C. and Street R. E. Effect of Variable Viscosity and Thermal Conductivity on High-Speed Flow between Concentric Cylinders. NACA Rep., № 1175, 1954.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВИЖЕНИЙ В МАГНИТНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ

В. Н. Жигулев

(Москва)

Уравнения магнитной гидромеханики для идеальной среды (т. е. среды, лишенной потерь на джоулево тепло, вязкость и теплопроводность) могут быть записаны в виде (см., например, [1]):

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, && \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\right) = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} \\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, && \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p^* = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} \\ &\frac{ds}{dt} = 0, && p^* = p + \frac{H^2}{8\pi} \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, s — энтропия единицы массы, $\mathbf{v}$ — вектор скорости частиц газа, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, d/dt — производная по времени для фиксированной частицы.

Систему уравнений (1) необходимо дополнить уравнением состояния среды, которое запишем:

$$p = f(\rho, s) \qquad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать класс движений, подчиняющийся следующим условиям:

$$(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = 0, \qquad (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} = 0 \qquad (3)$$

Физически условия (3) означают неизменность векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{v}$ вдоль силовых магнитных линий.

Важными случаями этого класса движений являются плоское и осесимметрическое (в общем случае нестационарные) течения, где векторы скорости и напряженности магнитного поля перпендикулярны. Отметим, что одномерное нестационарное течение, являющееся также частным случаем рассматриваемого класса движений, было изучено в работе [2].

Уравнения движения, принимая во внимание условия (3), примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \qquad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p^* = 0, \qquad \frac{ds}{dt} = 0 \\ &p^* = f(\rho, s) + k^2\rho^2, \qquad \mathbf{H} = 2\sqrt{2\pi}\,\mathbf{k}\cdot\rho \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\mathbf{k}$ — вектор-функция, постоянная вдоль линий траекторий течения.