ОБ ОТЫСКАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (a_{si} + \mu f_{si}(t, \mu))x_i \qquad (s=1,\ldots, n) \tag{1}$$

Здесь a_{si} —постоянные, f_{si} — непрерывные и периодические функции периода ω относительно t и аналитические функции параметра μ в некоторой области $|\mu| \leqslant \mu^*$.

Задача об отыскании характеристических показателей для системы (1) была рассмотрена в работах[1–3].

Обозначим через $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$ корни уравнения

$$|a_{si} - \delta_{si} \lambda| = 0 \tag{2}$$

Возьмем корень λ_1. Было показано, что если λ_1 простой корень и все разности

$$\lambda_i - \lambda_1 \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

отличны от чисел вида

$$\pm N\sqrt{-1}\; 2\pi/\omega \qquad (N \text{ — целое число})$$

то характеристический показатель, отвечающий корню λ_1, будет аналитической функцией параметра μ; его можно искать, стараясь удовлетворить системе (1), решением вида

$$x_s = (x_s^{(0)} + \mu x_s^{(1)} + \cdots) \exp(\lambda_1 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \cdots)t \tag{3}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — неизвестные, которые находятся из условия периодичности неизвестных периодических функций $x_s^{(1)}, x_s^{(2)}, \ldots$

Случай, когда λ_1—кратный корень и когда некоторые из разностей λ_i—λ_1 равны числам вида $\pm N\sqrt{-1}\; 2\pi/\omega$ (N — целое число), остался без рассмотрения. Настоящее сообщение посвящено последнему случаю.

При этом мы допустим, что корни, равные λ_1 и отличающиеся от последнего на числа вида $\pm N\sqrt{-1}\; 2\pi/\omega$, имеют простые элементарные делители. Пусть число этих корней вместе с λ_1 равно $m \leqslant n$. Тогда система уравнений

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i^{(0)} - \lambda_1 x_s^{(0)} \qquad (s=1,\ldots, n) \tag{4}$$

имеет m периодических решений $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sm}$ периода ω. Обозначим через $\psi_{s1}, \ldots \psi_{sm}$ периодические решения системы (4) такие, что

$$\psi_{ij}\varphi_{ik} + \cdots + \psi_{nj}\varphi_{nk} = \delta_{jk} \qquad (\delta_{ii} = 1, \; \delta_{ij} = 0, \; i \neq j)$$

Теорема I. Простому корню $\alpha = \alpha^*$ уравнения

$$\Delta(\alpha) \equiv |b_{ij} - \delta_{ij}\alpha| = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

$$\left(b_{ij} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} f_{s\sigma}(t, 0)\varphi_{\sigma j}\psi_{si}\,dt\right)$$

соответствует аналитический относительно μ характеристический показатель

$$\lambda_1 + \mu\alpha^* + \mu^2\alpha_2 + \cdots$$

Покажем прежде способ отыскания характеристического показателя в этом случае. Будем искать частное решение в виде (3). Подставив (3) в уравнения (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, находим, что функции $x_s^{(0)}$ удовлетворяют системе уравнений (4), а остальные функции $x_s^{(1)}$, $x_s^{(2)}, \ldots$ системам

$$\frac{dx_s^{(1)}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\, x_i^{(1)} - \lambda_1 x_s^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} f_{si}\,(t,\ 0)\, x_i^{(0)} - \alpha_1 x_s^{(0)} \tag{6}$$

. . . .

Из (4) находим

$$x_s^{(0)} = \beta_1^{(0)}\varphi_{s1} + \cdots + \beta_m^{(0)}\cdot\varphi_{sm}$$

где $\beta_i^{(0)}$ — произвольные постоянные. Чтобы система (6) тоже допускала периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

$$b_{i1}\,\beta_1^{(0)} + \cdots + b_{im}\beta_m^{(0)} - \alpha_1\beta_i^{(0)} = 0 \qquad (i=1,\ldots,\ m) \tag{7}$$

Эти условия представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно $\beta_i^{(0)}$. Чтобы она допускала решение, отличное от тривиального, α_1 должен быть одним из корней уравнений (5). Пусть $\alpha_1 = \alpha^*$. Обозначим алгебраическое дополнение элемента $b_{ij} - \delta_{ij}\,\alpha^*$ определителя $\Delta(\alpha^*)$ через $\Delta_{ij}\,(\alpha^*)$. Так как $d\Delta\,(\alpha)/d\alpha \neq 0$ при $\alpha = \alpha^*$, то, не ограничивая общности, можем считать, что $\Delta_{mm}(\alpha^*) \neq 0$. Разрешая систему (7) относительно $\beta_i^{(0)}$, находим

$$\beta_i^{(0)} = \frac{\Delta_{mi}\,(\alpha^*)}{\Delta_{mm}(\alpha^*)}\, c$$

где c — произвольная постоянная. Периодическое решение системы (6) находим в виде

$$x_s^{(1)} = \beta_1^{(1)}\varphi_{s1} + \cdots + \beta_m^{(1)}\varphi_{sm} + \Phi_s^{(1)}\,(t)\, c$$

где $\Phi_s(t)$ — периодические функции t, $\beta_i^{(1)}$ — произвольные постоянные.

Подставив далее $x_s^{(1)}$ в уравнения, определяющие функции $x_s^{(2)}$, получим условия существования периодического решения для этих уравнений в виде

$$b_{i1}\,\beta_1^{(1)} + \cdots + b_{im}\beta_m^{(1)} - \alpha_2\beta_i^{(0)} + c\,A_i^{(1)} = 0 \qquad (i=1,\ldots,\ m) \tag{8}$$

где $A_i^{(1)}$ — определенные постоянные. Эта система m линейных неоднородных уравнений относительно $m+1$ неизвестных $\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_m^{(1)}, \alpha_2$.

Легко установить справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \alpha^* \cdots b_{1\,m-1} & \beta_1^{(0)} \\ b_{21} \quad \cdots b_{2\,m-1} & \beta_2^{(0)} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ b_{1} \cdots\cdots b_{m\,m-1} & \beta_m^{(0)} \end{vmatrix} = \left[\frac{d\Delta\,(\alpha)}{d\alpha}\right]_{\alpha=\alpha^*} \qquad c \neq 0$$

Поэтому систему (8) можно разрешить относительно $\beta_1^{(1)}, \ldots \beta_{m-1}^{(1)}$ и α_2, выразив их через $\beta_m^{(1)}$ и c. При этом оказывается, что α_2 не зависит от $\beta_1^{(1)}$ и c:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta'\,(\alpha^*)} \begin{vmatrix} b_{11} - \alpha^* \cdots b_{1m-1} & A_1^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ b_{m1} \cdots\cdots b_{m\,m-1} & A_m^{(1)} \end{vmatrix}$$

Пользуясь тем, что решение (3) системы (1) определяется с точностью до произвольного множителя, положим $\beta_m^{(1)} \equiv 0$.

Аналогично тому, как мы нашли $x_s^{(1)}$, найдем $x_s^{(2)}$, $x_s^{(3)}, \ldots$

При этом постоянные $\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_m^{(k)}$ и α_{k+1} удовлетворяют системе, которая отличается лишь свободными членами от системы (8). Однозначно находим α_{k+1}. Полагая $\beta_m^{(k)} = 0$, выражаем $\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_{m-1}^{(k)}$ через параметр c и т. д.

Согласно теореме 1 из однозначности найденного разложения $\lambda_1 + \alpha^*\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots$ следует, что мы нашли ряд, сходящийся и представляющий искомый характеристический показатель. Ряды $x_s^{(0)} + \mu\cdot x_s^{(1)} + \ldots$ могут оказаться расходящимися. Чтобы эти ряды тоже сходились, требуется специальный подбор начальных значений $\beta_m^{(k)}$. Не ограничивая общности, можно допустить, что $\varphi_{1m}(0) \neq 0$. Тогда, чтобы ряды (3) сходились, достаточно подобрать так $\beta_m^{(1)}, \beta_m^{(2)}, \beta_m^{(3)},\ldots,$ чтобы ряд

$$\mu x_1^{(1)}(0) + \mu^2 x_1^{(2)}(0) + \mu^3 x_1^{(3)}(0) + \ldots$$

сходился. Последнее, очевидно, можно сделать.

Доказательство. Будем искать периодическое решение системы линейных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i - \lambda_1 x_s + \mu \sum_{i=1}^{n} f_{si}(t, \mu) x_i - \mu\alpha x_s \qquad (s=1,\ldots, n) \tag{9}$$

Очевидно, из условия существования периодического решения для этой системы мы можем найти искомый характеристический показатель $\lambda_1 + \mu\alpha$.

При помощи линейного неспособного преобразования систему (9) приводим к виду

$$\frac{du_i}{dt} = \mu(P_{i1} u_1 + \cdots + p_{im} u_m + p_{i,\, m+1} v_1 + \cdots p_{in} v_l) - \mu\alpha u_i$$

$$\frac{dv_j}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} c_{j\sigma} v_\sigma + \mu(q_{j1} u_1 + \cdots + q_{jm} u_m + q_{j\ m+1} v_1 + \cdots + q_{in} v_l) - \mu\alpha v_j \tag{10}$$

$$(i = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots, l;\ m+l = n,\ C_{j6} = \text{const})$$

где $u_i = \psi_{i1} x_1 + \cdots + \psi_{ni} x_h$, — функции p и q того же рода, что и $f_{\sigma i}$.

Рассмотрим вспомогательную систему вида

$$\frac{du_i}{dt} = \mu(p_{i1} u_1 + \cdots + p_{im} u_m + p_{i\ m+1} v_1 + \cdots + p_{in} v_l) - \mu\alpha u_i + W_i$$

$$\frac{dv_j}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{l} c_{j\sigma} v_\sigma + \mu(q_{j1} u_1 + \cdots + q_{jm} u_m + q_{j\ m+1} v_1 + \ldots + q_{jn} v_l) - \mu\alpha v_i \tag{11}$$

$$(i = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots, l;\ m + l = n)$$

где W_i — постоянные. В работе [3] показано, что система (11) допускает периодическое решение, аналитическое относительно μ, в виде

$$u_i = u_i^{(0)} + \mu u_i^{(1)} + \cdots,\quad v_j = v_j^{(1)}\mu + v_j^{(2)}\mu^2 + \cdots$$

Постоянные W_i определяются однозначно из условия существования периодического решения системы (11) в виде

$$W_i = W_i^{(1)}\mu + W_i^{(2)}\mu^2 + \cdots$$

Первые m функций u имеют произвольные начальные значения $u_i(0) = \beta_i$ (β_i — постоянные). Начальные значения для функций v_j определяются из условия их периодичности.

Построенные таким образом ряды сходятся в некоторой окрестности $\mu = 0$.

Допустим, что мы нашли периодическое решение системы (11) и нашли соответствующую ему W_i. W_i будут линейными однородными функциями $\beta_1,\ldots, \beta_m$ и аналитическими функциями параметров μ и α.

Чтобы система (10) допускала периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы была совместна следующая система линейных однородных уравнений относительно β_i:

$$W_i(\beta_1,\ldots, \beta_m, \mu, \alpha\mu) = 0 \quad (i = 1,\ldots, m) \tag{12}$$

Последнее обеспечено, если определитель

$$\frac{\partial(W_1,\ldots, W_m)}{\partial(\beta_1,\ldots, \beta_m)} = 0 \tag{13}$$

равен нулю. Условие (13) представляет собой уравнение вида $F(\mu, \alpha\mu) = 0$.

Из этого уравнения мы найдем m решений $\alpha_i(\mu)$, которые дают нам m характеристических показателей $\lambda_1+\mu\alpha_i(\mu)$ ($i=1,\ldots, m$).

Проделывая выкладки, находим

$$W_i = -\frac{\mu}{\omega}\int_0^\omega [p_{i1}(t, 0)\beta_1+\cdots+p_{im}(t, 0)\cdot\beta_m]dt - \alpha\mu\beta_i + \mu^2(\cdots)$$
$$\frac{\partial(W_1,\ldots, W_m)}{\partial(\beta_1,\ldots, \beta_m)} = \mu^m \mid b_{ij} - \delta_{ij}\alpha \mid + \mu^{m+1}\Phi(\mu, \alpha) = 0 \qquad (14)$$

где $\Phi(\mu, \alpha)$ — некоторая вполне определенная аналитическая функция μ и α. Из вида разложения (14) сразу следует, что если α_1 — простой корень уравнения (5), то согласно теореме о неявных функциях уравнение (13) допускает аналитическое решение $\alpha_1(\mu)$, которое при $\mu=0$ обращается в α_1. Отсюда следует, что простому корню уравнения (5) соответствует аналитический характеристический показатель. Аналитическими также будут и решения (4), соответствующие этим характеристическим оказателям, так как функции $x_s^{(0)}+\mu x_s^{(1)}+\cdots$ мы получим из периодического решения вспомогательной системы, если в последнем постоянные β_i заменить решением однородной системы (12), которое можно всегда выбрать аналитическим относительно μ. Таким образом, теорема доказана.

Справедливо следующее обобщение теоремы.

Теорема II. Допустим, что

$$P_i^{(\sigma)}(c_1,\ldots, c_m) \equiv 0 \quad (\sigma = 1,\ldots, k-1)$$

где

$$P_i^{(\sigma)} = \left[\frac{d^{\sigma-1}}{d\mu^{\sigma-1}}(W_i(c_1,\ldots, c_m, \mu, 0))\right]_{\mu=0}$$

Если $\alpha=\alpha^*$ — простой корень уравнения

$$\left| \frac{\partial P_i^{(k)}}{\partial c_j} - \delta_{ij}(\alpha) \right| = 0 \qquad (15)$$

то соответствующий ему характеристический показатель будет аналитической функцией параметра μ вида

$$\lambda = \lambda_1 + \mu^k\alpha^* + \mu^{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots$$

В том случае, когда $\alpha=\alpha^*$ — кратный корень уравнения (5), отвечающие ему характеристические показатели будут, вообще говоря, аналитическими функциями параметра $\mu^{1/r}$ (где r — целое число, меньшее или равное кратности корня α^*) вида

$$\lambda_1 + \mu\alpha^* + \mu^{\left(1+\frac{1}{r}\right)}\alpha_2 + \cdots$$

Представляет, очевидно, интерес установление критериев аналитического вида характеристических показателей и в этом случае.

Замечание. Когда $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, знак $\operatorname{Re}(\mu\alpha^*)$ при достаточно малых значениях $|\mu|$ определяет знак вещественных частей соответствующих α^* характеристических показателей.

Поступила 2 II 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Артемьев И. А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики. Известия АН СССР, т. 8, № 2, 1944.
2. Шиманов С. Н. К теории квазигармонических колебаний. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952.
3. Moulton F. R. Periodic orbits Washington. Chap. I, 1920.