О ГИРОСКОПЕ В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

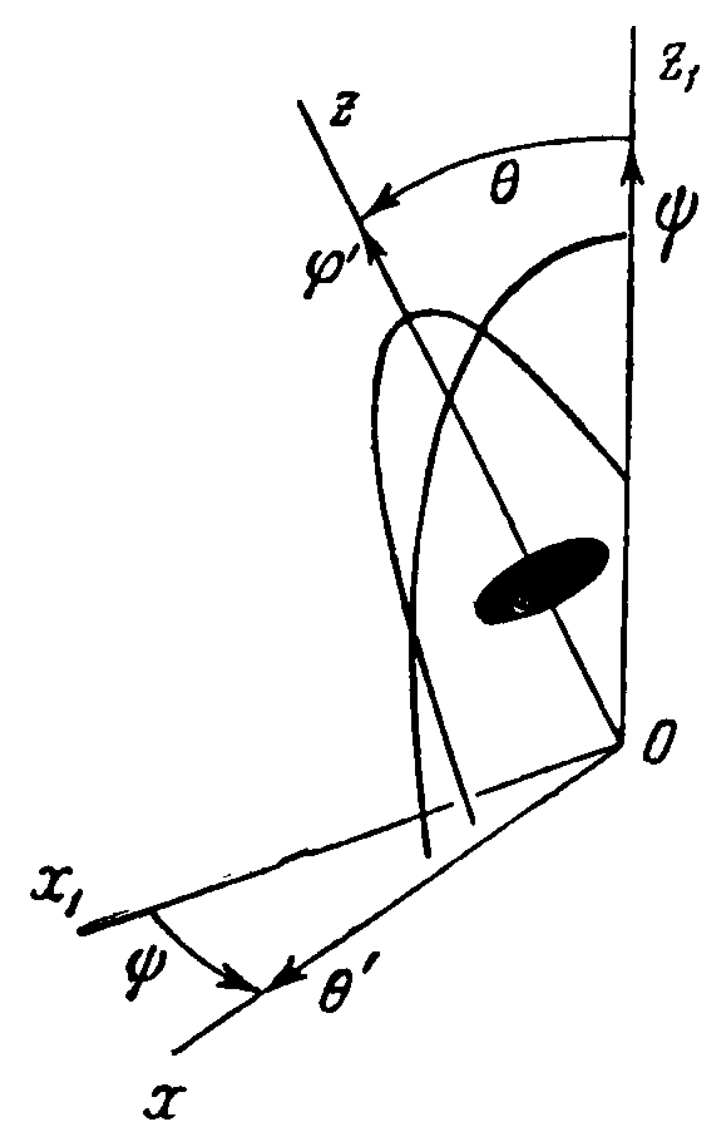
Н. Г. Четаев

(Москва)

Вопрос о движении симметричного тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, если ось внешнего кольца вертикальна, имеет много общего с хорошо изученным вопросом о движении тяжелого твердого тела в случае Лагранжа; можно также просто рассмотреть вопрос об устойчивости по отношению к углу нутации [1].

Вопросы об устойчивости по отношению ко всем переменным задачи были выполнены недавно Магнусом [2] и В. В. Румянцевым [3].

1. Вообразим гироскоп в кардановом подвесе так, как это изображено на фигуре. Здесь введены следующие обозначения: x_1, y_1, z_1 — неподвижные оси координат, ψ — угол поворота (внешнего) кольца, θ—угол поворота кожуха в кольце, x, y, z — оси кожуха, φ — угол поворота гироскопа в кожухе.



Отсюда угловая скорость вращения кожуха в проекциях на оси x, y, z кожуха выражается соотношениями

$$p^\circ = \theta', \qquad q^\circ = \psi' \sin\theta, \qquad r^\circ = \psi' \cos\theta$$

Проекции угловой скорости гироскопа на оси кожуха равны

$$p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi' \cos\theta$$

Живая сила внешнего кольца есть

$$\frac{1}{2} J\psi'^2$$

где J — момент инерции кольца относительно оси z_1.

Живая сила кожуха равна

$$\frac{1}{2}(A^\circ p^{\circ 2} + B^\circ q^{\circ 2} + C^\circ r^2)$$

где A°, B°, C° — моменты инерции кожуха относительно осей x, y, z, которые предположим главными осями эллипсоида инерции кожуха гироскопа относительно неподвижной точки O.

Живая сила гироскопа есть

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Aq^2 + Cr^2)$$

где A, A, C — моменты инерции гироскопа относительно осей x, y, z.

Эллипсоид инерции гироскопа относительно точки O предполагаем эллипсоидо вращения вокруг оси z.

Отсюда общая живая сила имеет вид:

$$2T = \psi'^2 (J + (A + B^\circ)\sin^2\theta + C^\circ \cos^2\theta) + (A + A^\circ)\theta'^2 + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2$$

Отсюда можем написать уравнение движения рассматриваемой системы в виде уравнений Лагранжа, так как переменные ψ, θ, φ являются независимыми и определяющими (голономными):

$$(A + A^\circ)\theta'' - \varphi'^2 (A - C + B^\circ - C^\circ)\sin\theta\cos\theta + C\varphi'\psi'\sin\theta = Q_\theta$$

$$\frac{d}{dt}\{\psi'(J + (A + B^\circ)\sin^2\theta + C^\circ\cos^2\theta) + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta)\} = Q_\psi$$

$$\frac{d}{dt} C(\varphi' - \psi'\cos\theta) = Q_\varphi$$

Здесь $Q_\theta \delta\theta$ равно работе сил (активно действующих на систему) при перемещении системы при повороте на угол $\delta\theta$ вокруг оси x кожуха; $Q_\psi \delta\psi$ равно работе сил при повороте кольца вместе с кожухом и гироскопом на угол $\delta\psi$ вокруг оси z_1; $Q_\varphi \delta\varphi$ равно работе сил при повороте гироскопа на угол $\delta\varphi$.

2. Допустим, что трение в подшипниках отсутствует, что активные силы суть силы тяжести, что центр тяжести кожуха и гироскопа лежит на оси z на расстоянии ζ от начала O и что z_1 — вертикальная ось.

Отсюда уравнения движения позволяют установить такие первые интегралы:

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = r_0$$

$$\psi' (J + (A + B^\circ) \sin^2\theta + C^\circ \cos^2\theta) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta = k$$

$$\psi'^2 (J + (A + B^\circ) \sin^2\theta + C^\circ \cos^2\theta) + (A + A^\circ)\theta'^2 + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2 = -2mg\zeta \cos\theta + h$$

Первые два интеграла суть интегралы, связанные с циклическими координатами φ и ψ соответственно.

Последний интеграл живых сил можно было бы определить также непосредственно, так как действительные перемещения находятся среди возможных, а силы допускают силовую функцию

$$U = -mg\zeta \cos\theta$$

r_0, k, h обозначают соответствующие постоянные первых интегралов, m — масса гироскопа и кожуха.

3. Отсюда для углов Эйлера ψ, θ, φ получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{(\alpha - au)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - br_0u)^2}{\varepsilon - eu^2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - br_0u}{\varepsilon - eu^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 - u\,\frac{\beta - br_0u}{\varepsilon - eu^2}$$

Здесь приняты обозначения:

$$u = \cos\theta$$

$$\alpha = \frac{h - Cr_0^2}{A + A^\circ}, \qquad a = \frac{2mg\zeta}{A + A^\circ} > 0, \qquad \varepsilon = \frac{J + A + B^\circ}{A + A^\circ} > 0$$

$$e = \frac{A + B^\circ - C^\circ}{A + A^\circ}, \qquad \beta = \frac{k}{A + A^\circ}, \qquad b = \frac{C}{A + A^\circ} > 0$$

Интегрирование естественно начинать с первого уравнения, из которого

$$\int_{u_0}^{u} \frac{(\varepsilon - eu^2)\,du}{\sqrt{[(\alpha - au)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - br_0u)^2](\varepsilon - eu^2)(1 - u^2)}} = t - t_0$$

После обращения этого гиперэллиптического интеграла вычисление ψ и φ сводится к квадратурам.

Введем обозначение

$$f(u) = (\alpha - au)(\varepsilon - eu^2) - (\beta - br_0u)^2$$

Если $e > 0$, что имеет место для практически наиболее интересных случаев, то в механической задаче полином $f(u)$ имеет три вещественных корня:

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon}{e}} < u_1 \leqslant u_0, \qquad u_0 \leqslant u_2 < \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}}, \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon}{e}} < u' < \infty$$

Значения u колеблются на отрезке между теми из смежных точек -1, $+1$, u_1, u_2, на котором лежит u_0.

Вид дифференциальных уравнений для углов Эйлера ψ, θ, φ и определенная последовательность их интегрирования убеждают, что в случае тяжелого гироскопа в кардановом подвесе нутационные движения оси гироскопа, так же как и в случае Лагранжа, играют ведущую роль.

Для случая псевдорегулярной прецессии, определенной начальными условиями

$$\theta_0 \neq 0, \qquad p_0 = 0, \qquad q_0 = 0$$

а r_0 очень велико численно, имеем

$$\beta - b r_0 u_0 = 0, \qquad \alpha - a u_0 = 0$$

и, следовательно,

$$f(u) = (u_0 - u)\left[a(\varepsilon - e u^2) - b^2 r_0^2 (u_0 - u)\right]$$

Отсюда

$$u_0 - u_1 = \frac{a(\varepsilon - e u^2)}{b^2 r_0^2} > 0$$

следовательно, u будет колебаться при достаточно большом r_0 на интервале $(u_1,\ u_2 = u_0)$, тем меньшем, чем больше r_0.

Для рассматриваемого гироскопа в кардановом подвесе возможен случай регулярной прецессии, для которого полином $f(u)$ должен иметь кратный корень $u_1 = u_2 = u_0$, условием чего являются равенства

$$f(u_0) = 0, \ f'(u_0) = 0$$

Из последних имеем

$$(A + B^\circ - C^\circ) u_0 \psi_0'^2 - C r_0 \psi_0' + mg\zeta = 0$$

Условие вещественности корней этого квадратного уравнения для ψ_0' выражается неравенством

$$C^2 r_0^2 - 4(A + B^\circ - C^\circ) u_0 mg\zeta > 0$$

или

$$C^2 \varphi_0'^2 - 4(A - C + B^\circ - C^\circ) u_0 mg\zeta > 0$$

Условия малых отклонений значения u от единицы для практически интересных случаев $e > 0$ можно получить тем же приемом, что и в случае Лагранжа. Для этого достаточно потребовать, чтобы корни полинома

$$f(1 - \delta - z)$$

были отрицательными, т. е. чтобы корни полинома $f(u)$ лежали справа от $1 - \delta$. Здесь δ обозначают малую положительную постоянную. Таким δ будет наименьшее положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$b^2 r_0^2 - 2ae + e(\alpha - a) + 3ae\delta > 0$$

$$\{b^2 r_0^2 + (\alpha - a(1-\delta)) - e - 2ae(1-\delta)\}\{2b r_0(\beta - b r_0(1-\delta)) - a(\varepsilon - e(1-\delta)^2) -$$
$$- 2e(1-\delta)(\alpha - a(1-\delta))\} - ae\{-(\alpha - a(1-\delta))(\varepsilon - e(1-\delta)^2) + (\beta - b r_0(1-\delta))^2\} > 0$$

$$(\beta - b r_0(1-\delta))^2 - (\alpha - a(1-\delta))(\varepsilon - e(1-\delta)^2) > 0$$

Исследование этих уравнений для практически интересного случая

$$\theta_0 = 0, \qquad \theta_0'^2 > 0, \ \psi_0' = 0$$

можно выполнить так же, как и в случае Лагранжа [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. О достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда. ПММ, т. VII, вып. 2, стр. 81—96, 1943.
2. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1958.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 3, 1958.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. 1955, стр. 83.