Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

В. В. Румянцев

(Москва)

В 1939 г. Е. Л. Николаи [1] исследовал движение по инерции уравновешенного симметричного гироскопа в кардановом подвесе с учетом влияния масс колец подвеса, а также приближенно рассмотрел вопрос об устойчивости движения такого гироскопа в случае его большой угловой скорости. При этом он обнаружил любопытное влияние величины и направления угловой скорости вращения внешнего кольца на устойчивость вертикального положения оси гироскопа.

Как показал К. Магнус [2], аналогичное явление имеет место и для неуравновешенного симметричного гироскопа в кардановом подвесе; в работе [2] построением функции Ляпунова по методу Н. Г. Четаева получены достаточные условия устойчивости вращения гироскопа вокруг вертикальной оси внешнего кольца карданова подвеса.

Устойчивость регулярной прецессии гироскопа в кардановом подвесе в случае, когда угол нутации $\theta_0 \neq 0$, исследовал В. Н. Скимель [1].

Ниже построением функции Ляпунова в форме линейной связки первых интегралов выводится достаточное условие устойчивости регулярной прецессии гироскопа в кардановом подвесе, из которого как частный случай (при $\theta_0 = 0$) вытекает условие устойчивости вертикального положения оси гироскопа. Показана также необходимость этого условия устойчивости и выяснено влияние диссипативных сил на устойчивость движения гироскопа.

1. Рассмотрим движение симметричного гироскопа в кардановом подвесе с учетом масс колец подвеса. Предположим, что неподвижная ось вращения внешнего кольца карданова подвеса вертикальна, ось вращения внутреннего кольца горизонтальна, и пусть центр тяжести гироскопа и внутреннего кольца расположен на оси симметрии гироскопа.

Введем в рассмотрение две правые системы осей координат с началом в неподвижной точке O гироскопа. Ось $O\zeta$ неподвижной системы координат направим вертикально вверх по оси вращения внешнего кольца, а оси $O\xi$ и $O\eta$ проведем в горизонтальной плоскости. Оси Ox и Oz подвижной системы координат $Oxyz$, жестко связанной с внутренним кольцом подвеса, направим соответственно по оси вращения внутреннего кольца и по оси симметрии гироскопа, а ось Oy — перпендикулярно к срединной плоскости внутреннего кольца.

Положение рассматриваемой нами системы в пространстве $O\xi\eta\zeta$ можно определить тремя углами Эйлера: углом нутации θ, углом прецессии ψ и углом собственного вращения φ гироскопа относительно системы координат $Oxyz$. Проекции мгновенных угловых скоростей $\bar{\omega}$ гироскопа и $\bar{\omega}_1$ внутреннего кольца на оси координат системы $Oxyz$ определяются через углы Эйлера и производные от них по времени следующими соответственно уравнениями:

$$\begin{array}{lll} p = \theta', & q = \psi' \sin\theta, & r = \varphi' + \psi' \cos\theta \\ p_1 = \theta', & q_1 = \psi' \sin\theta, & r_1 = \psi' \cos\theta \end{array} \qquad (1.1)$$

---

[1] В. Н. Скимель. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа. Автореферат кандидатской диссертации, Казань, 1955 г.

Вектор мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}_2$ внешнего кольца направлен по оси $O\zeta$; его проекция на эту ось равна ψ'. Предположим, что оси x, y, z являются главными осями инерции как гироскопа, так и внутреннего кольца, и обозначим через $A = B$, C главные моменты инерции гироскопа, а через A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции внутреннего кольца подвеса. Момент инерции внешнего кольца относительно оси $O\zeta$ обозначим через A_2.

Найдем выражения для кинетических энергий T гироскопа, T_1 внутреннего и T_2 внешнего колец подвеса. Будем иметь

$$T = \frac{1}{2}[A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2]$$
$$T_1 = \frac{1}{2}[A_1\theta'^2 + B_1\psi'^2\sin^2\theta + C_1\psi'^2\cos^2\theta] \tag{1.2}$$
$$T_2 = \frac{1}{2}A_2\psi'^2$$

Координату центра тяжести гироскопа и внутреннего кольца обозначим через z_0, а вес через P. Очевидно, силовая функция равна $U = -Pz_0\cos\theta$; в случае уравновешенного гироскопа $z_0 = 0$.

Допустим сначала, что силы трения на осях карданова подвеса отсутствуют и никакие другие силы, кроме сил тяжести, на систему не действуют. Уравнения движения системы можно записать в форме уравнений Лагранжа, причем в нашем случае функция Лагранжа $L = T + T_1 + T_2 + U$.

Уравнения движения имеют вид:

$$(A + A_1)\theta'' - (A + B_1 - C_1)\psi'^2\sin\theta\cos\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\psi'\sin\theta - Pz_0\sin\theta = 0$$
$$\frac{d}{dt}[(A + B_1)\psi'\sin^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta + C_1\psi'\cos^2\theta + A_2\psi'] = 0 \tag{1.3}$$
$$C\frac{d}{dt}(\varphi' + \psi'\cos\theta) = 0$$

Отсюда немедленно следуют первые интегралы уравнений движения (1.4)

$$(A + B_1)\psi'\sin^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta + C_1\psi'\cos^2\theta + A_2\psi' = k, \qquad \varphi' + \psi'\cos\theta = r_0$$

отвечающие циклическим координатам ψ и φ. Если умножить уравнения (1.3) на θ', ψ', φ' соответственно и сложить, то получим еще один первый интеграл — интеграл энергии

$$(A + A_1)\theta'^2 + (A + B_1)\psi'^2\sin^2\theta + C_1\psi'^2\cos^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 +$$
$$+ A_2\psi'^2 + 2Pz_0\cos\theta = h \tag{1.5}$$

существование которого очевидно в силу потенциальности действующих сил и независимости связей от времени.

Отметим, что уравнения движения (1.3) можно было бы получить иначе, как это принято в теории гироскопов [1], а именно, пользуясь теоремой о моменте количеств движения системы и составляя уравнения моментов: 1) для всей системы относительно оси $O\zeta$; 2) для гироскопа и внутреннего кольца относительно оси Ox; 3) для гироскопа относительно оси Oz.

2. Уравнения движения (1.3) допускают частное решение

$$\theta = \theta_0, \qquad \theta' = 0, \qquad \psi' = \Omega, \qquad r = \omega \tag{2.1}$$

при условии, что постоянные θ_0, Ω, ω удовлетворяют соотношению

$$[(A + B_1 - C_1)\Omega^2\cos\theta_0 - C\omega\Omega + Pz_0]\sin\theta_0 = 0 \tag{2.2}$$

Движение, описываемое частным решением (2.1), при $\theta_0 \neq 0$, π представляет собой регулярную прецессию гироскопа. Это движение примем за невозмущенное и исследуем его устойчивость по отношению к переменным θ, θ', ψ', r.

В возмущенном движении положим

$$\theta = \theta_0 + \eta, \qquad \theta' = \eta' = \xi_1, \qquad \psi' = \Omega + \xi_2, \qquad r = \omega + \xi_3 \tag{2.3}$$

и подставим равенства (2.3) в уравнения (1. 3).

Полученные таким образом уравнения возмущенного движения допускают как нетрудно видеть, следующие первые интегралы (выписанные с точностью до членов второго порядка):

$$V_1 = (A + A_1)\xi_1^2 + [(A + B_1 - C_1)\Omega^2(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0) - Pz_0\cos\theta_0]\eta^2 +$$
$$+ [(A + B_1)\sin^2\theta_0 + C_1\cos^2\theta_0 + A_2](\xi_2^2 + 2\Omega\xi_2) + 4(A + B_1 - C_1)\Omega\sin\theta_0\cos\theta_0\,\xi_2\eta +$$
$$+ C(\xi_3^2 + 2\omega\xi_3) + 2[(A + B_1 - C_1)\Omega^2\cos\theta_0 - Pz_0]\sin\theta_0\eta + \ldots = \text{const}$$

$$V_2 = [(A + B_1 - C_1)\Omega(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0) - \frac{1}{2}C\omega\cos\theta_0]\eta^2 +$$
$$+ [2(A + B_1 - C_1)\Omega\cos\theta_0 - C\omega]\sin\theta_0\eta + [(A + B_1)\sin^2\theta_0 + C_1\cos^2\theta_0 + A_2]\xi_2 +$$
$$+ 2(A + B_1 - C_1)\sin\theta_0\cos\theta_0\xi_2\eta + C\xi_3(\cos\theta_0 - \sin\theta_0\eta) + \ldots = \text{const}$$

$$V_3 = \xi_3 = \text{const} \tag{2.4}$$

Здесь и ниже многоточия обозначают невыписанные члены выше второго порядка.

Построим функцию Ляпунова в форме линейной связки интегралов (2.4):

$$V = V_1 - 2\Omega V_2 + 2C(\Omega\cos\theta_0 - \omega)V_3 + \frac{C^2}{A + B_1 - C_1}V_3^2 = (A + A_1)\xi_1^2 +$$
$$+ [(A + B_1)\sin^2\theta_0 + C_1\cos^2\theta_0 + A_2]\xi_2^2 + C\left(1 + \frac{C}{A + B_1 - C_1}\right)\xi_3^2 -$$
$$- [(A + B_1 - C_1)(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)\Omega^2 - C\Omega\omega\cos\theta_0 + Pz_0\cos\theta_0]\eta^2 + 2C\Omega\sin\theta_0\eta\xi_3 + \ldots \tag{2.5}$$

Функция $V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta)$ будет определенно-положительной функцией своих переменных при выполнении единственного условия

$$(A + B_1 - C_1)(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)\Omega^2 - C\omega\Omega\cos\theta_0 + Pz_0\cos\theta_0 < 0 \tag{2.6}$$

которое согласно теореме Ляпунова об устойчивости является достаточным условием устойчивости регулярной прецессии (2.1) гироскопа в кардановом подвесе. В случае $\sin\theta_0 \neq 0$, $\Omega \neq 0$ это условие, используя равенство (2.2), можно представить в виде

$$A + B_1 - C_1 > 0 \tag{2.7}$$

При выполнении условия (2.7) регулярная прецессия гироскопа в кардановом подвесе устойчива по отношению к переменным θ, θ', ψ', r, а следовательно, и по отношению к φ', или, что то же самое, по отношению к переменным θ, p, q, r. Полученный результат справедлив, очевидно, как при $z_0 \neq 0$, так и при $z_0 = 0$.

Рассмотрим далее случай $\theta_0 = 0$, когда невозмущенное движение представляет собой равномерные вращения вокруг вертикали внешнего кольца с угловой скоростью Ω и гироскопа с угловой скоростью ω. Условие (2.2) выполняется теперь при любых значениях Ω и ω, которые могут быть произвольными. Достаточное условие устойчивости такого движения принимает, как это следует из (2.6), вид [2]

$$(A + B_1 - C_1)\Omega^2 - C\omega\Omega + Pz_0 < 0 \tag{2.8}$$

Очевидно, это неравенство выполняется при одновременном выполнении следующих условий:

$$C^2\omega^2 - 4(A + B_1 - C_1)Pz_0 > 0, \qquad \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 \tag{2.9}$$

где Ω_1, Ω_2 — корни полинома

$$(A + B_1 - C_1)\Omega^2 - C\omega\Omega + Pz_0 = 0$$

Первое из неравенств (2.9) при $B_1 = C_1 = 0$ переходит в условие Майевского, необходимое и достаточное [3] для устойчивости вертикального вращения гироскопа Лагранжа; второе из неравенств (2.9) сохраняется.

Покажем, что условие (2.8) является также необходимым условием устойчивости вращения вокруг вертикали гироскопа в кардановом подвесе.

С этой целью рассмотрим функцию

$$V = (A + A_1)\eta\eta'$$

и производную по времени от нее, взятую в силу уравнения возмущенного движения

$$V' = (A + A_1)\eta'^2 + [(A + B_1 - C_1)\Omega^2 - C\omega + Pz_0]\eta^2 + \ldots$$

При условии

$$(A + B_1 - C_1)\Omega^2 - C\omega\Omega + Pz_0 > 0$$

функция V' будет определенно-положительной, а функция V допускает бесконечно малый высший предел и может принимать положительные значения. Согласно теореме Ляпунова, при этом условии движение гироскопа неустойчиво по отношению к переменным η, η'.

Следовательно, условие (2.8) является необходимым и достаточным условием устойчивости вращения вокруг вертикали гироскопа в кардановом подвесе.

Без ограничения общности можно считать $\omega > 0$. В случае $z_0 > 0$ величины Ω_1 и Ω_2 положительны, если $A + B_1 - C_1 > 0$, что мы будем считать выполненным. Если $\Omega < \Omega_1$, в частности $\Omega = 0$, или $\Omega > \Omega_2$, движение гироскопа вокруг вертикали будет неустойчивым, несмотря на выполнение первого из условий (2.9). В случае, $z_0 < 0$ первое из условий (2.9) выполняется при любой угловой скорости ω, а величины $\Omega_1 < 0$, $\Omega_2 > 0$. В случае, если угловая скорость прецессии $\Omega < \Omega_1$ или $\Omega > \Omega_2$ движение неустойчиво.

Для уравновешенного гироскопа ($z_0 = 0$) необходимое и достаточное условие (2.8) устойчивости вращения вокруг вертикали принимает следующий вид [1]:

$$0 < \Omega < \frac{C\omega}{A + B_1 - C_1} \tag{2.11}$$

Отметим, что задачу об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе можно было бы рассмотреть также при помощи теоремы Рауса. В самом деле, разрешая циклические интегралы (1.4) относительно ψ' и φ', получим

$$\psi' = \frac{k - Cr_0\cos\theta}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2}, \qquad \varphi' = r_0 - \psi'\cos\theta$$

и составим функцию Рауса

$$R = L - Cr_0\varphi' - k\psi' = \frac{1}{2}(A + A_1)\theta'^2 + W(\theta)$$

где измененная силовая функция

$$W(\theta) = -(Pz_0\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{(k - Cr_0\cos\theta)^2}{(A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta + A_2} + \frac{1}{2}Cr_0^2) \tag{2.12}$$

Так как функция R не зависит явно от времени t, уравнение Рауса имеет первый интеграл, соответствующий интегралу живых сил:

$$H = \frac{\partial R}{\partial\theta'}\theta' - R = \frac{1}{2}(A + A_1)\theta'^2 - W = h$$

Уравнение возмущенного движения соответственно имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2}(A + A_1)\eta'^2 - W(\theta_0 + \eta) + W(\theta_0) = \text{const}$$

при условии, если постоянные r_0, k не возмущаются. При этом согласно теореме Рауса движение будет устойчивым по отношению к θ, θ', если для невозмущенного движения измененная силовая функция W имеет максимум.

Легко видеть, что в случае, например, $\theta_0 = 0$ условие наличия максимума этой функции имеет вид неравенства (2.8).

3. Допустим теперь, что, помимо сил тяжести, на гироскоп в кардановом подвесе действуют также силы трения. Уравнения движения в этом случае будут отличаться от уравнений (1.3) наличием в правых частях последних соответствующих моментов сил сопротивления и будут допускать частное решение

$$\theta = 0, \qquad \theta' = 0, \qquad \psi' = \Omega, \qquad \varphi' = \omega_1 \qquad (\omega_1 = \omega - \Omega) \tag{3.1}$$

только при условии приложения к системе моментов относительно осей $O\zeta$ и Oz некоторых дополнительных сил, уравновешивающих моменты сил трения. Исследуем устойчивость движения (3.1) в этом случае, полагая в возмущенном движении

$$\theta = \eta, \qquad \theta' = \eta' = \xi_1, \qquad \psi' = \Omega + \xi_2, \qquad \varphi' = \omega_1 + \zeta$$

При этом предположим, что в возмущенном движении на гироскоп в кардановом подвесе действуют диссипативные силы, производные от функции Релея:

$$2f = a\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c\zeta^2 + 2e\xi_2\zeta + 2f\zeta\xi_1 + 2g\xi_1\xi_2$$

представляющей собой определенно-положительную квадратичную форму ξ_1, ξ_2, ζ.

Уравнения в вариациях для возмущенного движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}(A + A_1)\,\xi_1' - [(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 - C\omega\Omega + Pz_0]\,\eta = -(a\xi_1 + g\xi_2 + f\zeta)\\ (A_2 + C + C_1)\,\xi_2' + C\zeta' = -(g\xi_1 + b\xi_2 + e\zeta)\\ C(\zeta' + \xi_2') = -(f\xi_1 + e\xi_2 + c\zeta)\end{gathered} \tag{3.2}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}2W = (A + A_1)\,\xi_1^2 + (A_2 + C + C_1)\,\xi_2^2 - [(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 - C\omega\Omega + Pz_0]\,\eta^2 + \\ + C\zeta^2 + 2C\xi_2\zeta + 2\varepsilon\,(A + A_1)\,\eta\xi_1\end{aligned} \tag{3.3}$$

где ε — некоторая положительная постоянная. Производная от этой функции в силу уравнений (3.2) равна

$$\begin{aligned}W' = -\{[a - \varepsilon\,(A + A_1)]\,\xi_1^2 + b\xi_2^2 + c\zeta^2 + 2e\xi_2\zeta + 2f\xi_1\zeta + 2g\xi_1\xi_2 - \\ - \varepsilon\,[(A + B_1 - C_1)\,\Omega^2 - C\omega\Omega + Pz_0]\,\eta^2 + \varepsilon\eta\,(a\xi_1 + g\xi_2 + f\zeta)\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Очевидно, положительную постоянную ε можно выбрать столь малой, чтобы при условии (2.8), несколько усиленном (справа вместо нуля будет $\delta(\varepsilon) < 0$), функция W была бы определенно-положительной, а ее производная W' определенно-отрицательной по отношению к переменным ξ_1, ξ_2, ζ, η. Функция W при этом будет удовлетворять условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, следовательно, устойчивое при условии (2.8) движение (3.1) под действием диссипативных сил становится асимптотически устойчивым. Это остается справедливым и в случае, если пренебречь массами колец подвеса, т. е. положить

$$A_1 = B_1 = C_1 = A_2 = 0$$

Лорд Кельвин предложил, как известно [3], называть временной устойчивость равновесия, получающуюся от гироскопической стабилизации, и вековой — устойчивость, существующую при действии одних потенциальных сил. Распространяя это определение на случай стационарного движения, приходим к выводу, что движение (3.1) гироскопа в кардановом подвесе под действием силы тяжести и постоянных моментов дополнительных сил будет устойчивым в вековом смысле. Этот факт находится в тесной связи с тем обстоятельством, что для движения (3.1) измененная силовая функция (2.14) имеет максимум.

Поступила 10 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаи Е. Л. О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. III, вып. 4, 1939.
2. Магнус К. Об устойчивости движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.