

К ТЕОРИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

А. Ю. Ишлинский

(Москва)

При изучении сложных гироскопических устройств для составления уравнений их движения преимущественно применяется вторая метода Лагранжа ⁽¹⁾. Воздавая должное этой методе, как бы автоматически приводящей к цели, нельзя не отметить ее крайней громоздкости, порой затемняющей механический смысл получаемых уравнений

Вместе с тем составление уравнений движения сложных гироскопических устройств может быть при известном навыке сравнительно просто произведено последовательным применением теоремы о кинетическом моменте (т. е. теоремы о моменте количества движения) ко всей механической системе соответствующего устройства и к ее отдельным составным частям. Описание соответствующей методы на примере исследования одной конкретной системы силовой гироскопической стабилизации и составляет основное содержание настоящей статьи.

1°. Движение гироскопических систем, предназначенных для стабилизации, после некоторого переходного процесса сводится, как правило, к медленному изменению ориентации осей собственного вращения гироскопов относительно неподвижных звезд. Такое движение называется, обычно, прецессионным.

При изучении прецессионного движения можно не учитывать кинетические моменты элементов подвеса гироскопической системы и кожухов ее гироскопов, а также экваториальные составляющие кинетических моментов самих роторов и кинетические моменты двигателей. Что же касается полярных составляющих (направленных по оси собственного вращения соответствующего гироскопа), то каждую из них можно считать равной произведению осевого момента инерции ротора гироскопа на его угловую скорость относительно своего кожуха.

Упомянутые допущения приводят к так называемой прецессионной или элементарной теории гироскопических явлений. Уравнения, которыми описывается движение гироскопической системы, при принятии перечисленных допущений значительно упрощаются. В частности, снижается их порядок. Вместе с тем точность результатов исследований прецессионных движений оказывается совершенно достаточной, за исключением особых случаев, когда приходится учитывать влияние инерции колец карданова подвеса.

Исследование переходных процессов в гироскопических системах возможно лишь при учете кинетических моментов всех частей устройства; уравнения прецессионной теории для этой цели не годятся.

2°. При использовании теоремы о кинетическом моменте для получения дифференциальных уравнений движения гироскопического устройства следует прежде всего четко оговорить состав механической системы, производная вектора кинетического момента которой подвергается рассмотрению.

При этом кинетический момент и его производную следует относить к некоторой поступательно перемещающейся системе координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, которая также должна быть четко установлена. Она в дальнейшем будет называться опорной системой координат. Именно по отношению к ней должны быть вычислены силы инерции переносного движения, действующие на рассматриваемую механическую систему. Ввиду

поступательного характера движения упомянутой опорной системы координат силы инерции переносного движения сводятся к равнодействующей. Линия ее действия проходит через центр тяжести механической системы. Ее направление обратно направлению ускорения начала опорной системы координат относительно так называемой абсолютной системы координат $\xi_a^* \eta_a^* \zeta_a^*$. Начало последней расположено в центре масс нашей солнечной системы, а оси направлены к неподвижным звездам.

Величина равнодействующей силы инерции переносного движения равна, разумеется, произведению массы рассматриваемой механической системы на только что упоминавшееся ускорение.

В качестве опорной системы координат может быть в общем случае взята произвольная система координат $\xi\eta\zeta$, не обязательно перемещающаяся поступательно. Однако если опорная система $\xi\eta\zeta$ имеет вращение относительно абсолютной системы координат $\xi_a^* \eta_a^* \zeta_a^*$, то учет сил инерции переносного движения значительно усложняется. Кроме того, появляются кориолисовы силы инерции, которые также следует учитывать в числе внешних сил, действующих на рассматриваемую механическую систему.

В случае же поступательно перемещающейся опорной системы координат кориолисовы силы инерции, конечно, отсутствуют.

3. Пусть некоторая система координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ выбрана в качестве опорной и G — кинетический момент рассматриваемой механической системы по отношению к этой системе координат. Система координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ перемещается поступательно; поэтому согласно теореме о кинетическом моменте имеют место соотношения

$$\frac{dG_{\xi^*}}{dt} = M_{\xi^*}, \quad \frac{dG_{\eta^*}}{dt} = M_{\eta^*}, \quad \frac{dG_{\zeta^*}}{dt} = M_{\zeta^*} \quad (1)$$

В левых частях этих соотношений находятся производные по времени от проекций вектора кинетического момента G соответственно на оси ξ^* , η^* и ζ^* , а в правых — суммы моментов относительно тех же осей всех внешних сил, включая силы инерции переносного движения, действующих на рассматриваемую механическую систему.

В приложениях соотношениями (1) обычно пользоваться неудобно из-за большой громоздкости получающихся уравнений. Значительное упрощение выкладок достигается подсчетом проекций производной кинетического момента на оси некоторой специально выбранной подвижной системы координат, движение которой связано тем или иным образом с движением рассматриваемой механической системы.

Пусть xuz — одна из таких систем координат; будем называть ее вспомогательной или расчетной. Обозначим через ω угловую скорость этой новой системы координат относительно опорной системы $\xi^* \eta^* \zeta^*$ и будем считать, что их начала совпадают. Проекция производной вектора кинетического момента рассматриваемой механической системы в его изменении относительно опорной системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$ на оси x , y и z могут быть представлены известными выражениями

$$\frac{dG_x}{dt} + \omega_y G_z - \omega_z G_y, \quad \frac{dG_y}{dt} + \omega_z G_x - \omega_x G_z, \quad \frac{dG_z}{dt} + \omega_x G_y - \omega_y G_x \quad (2)$$

где G_x , G_y , G_z — проекции вектора кинетического момента на те же оси, а ω_x , ω_y и ω_z — составляющие угловой скорости системы координат xuz относительно опорной $\xi^* \eta^* \zeta^*$ или, что то же, относительно абсолютной системы $\xi_a^* \eta_a^* \zeta_a^*$.

Выражения (2) на основании теоремы о кинетическом моменте равны суммам моментов упоминавшихся выше внешних сил, действующих на рассматриваемую механическую систему, вместе с силами инерции, обусловленными переносным движением опорной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (но отнюдь не вспомогательной системы xyz , имеющей чисто кинематическое назначение, — в этой системе подсчет производной кинетического момента в его изменении относительно опорной системы $\xi^*\eta^*\zeta^*$ может оказаться более простым, чем в самой системе $\xi^*\eta^*\zeta^*$). Обозначая эти суммы моментов через M_x , M_y и M_z , получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} + \omega_y G_z - \omega_z G_y &= M_x, & \frac{dG_y}{dt} + \omega_z G_x - \omega_x G_z &= M_y \\ \frac{dG_z}{dt} + \omega_x G_y - \omega_y G_x &= M_z \end{aligned} \quad (3)$$

совокупность которых эквивалентна совокупности соотношений (1).

4°. В число внешних сил, действующих на механические системы, входят неизвестные силы реакций связей этих систем с основанием (обычно подвижным), на котором они расположены. Гироскопические системы в большинстве случаев связаны с основанием посредством кардановых подвесов. Поэтому, если рассматриваемая механическая система состоит из нескольких элементов данного гироскопического устройства, например, из всей системы без внешнего кольца или из отдельного гироскопа с его кожухом и ротором, то внешней связью системы, как правило, оказывается простой шарнир. В ряде случаев с некоторым приближением можно принять, что момент трения в шарнире не зависит от нормальных реакций подшипников его оси. Если ось шарнира совпадает с одной из осей системы координат xyz , то одно из соотношений (3) обращается при этом в уравнение движения гироскопической системы, не содержащее неизвестных сил нормальных реакций связей.

В более сложном случае, когда ось шарнира не совпадает ни с одной из осей x , y и z , уравнение движения гироскопической системы, не содержащее нормальных реакций, принимает вид:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dG_x}{dt} + \omega_y G_z - \omega_z G_y \right] \cos x\nu + \left[\frac{dG_y}{dt} + \omega_z G_x - \omega_x G_z \right] \cos y\nu + \\ + \left[\frac{dG_z}{dt} + \omega_x G_y - \omega_y G_x \right] \cos z\nu = M_\nu \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\cos x\nu$, $\cos y\nu$, $\cos z\nu$ — косинусы углов, которые образует ось шарнира ν с осями x , y и z , M_ν — сумма моментов внешних сил, действующих на рассматриваемую механическую систему относительно оси шарнира. В состав M_ν входят также момент трения в оси шарнира, крутящий момент, передаваемый на ось посредством специального устройства, например, электрическим двигателем, и моменты сил инерции переносного движения относительно оси ν , обусловленные поступательным перемещением опорной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. С формальной стороны, разумеется,

$$M_\nu = M_x \cos x\nu + M_y \cos y\nu + M_z \cos z\nu \quad (5)$$

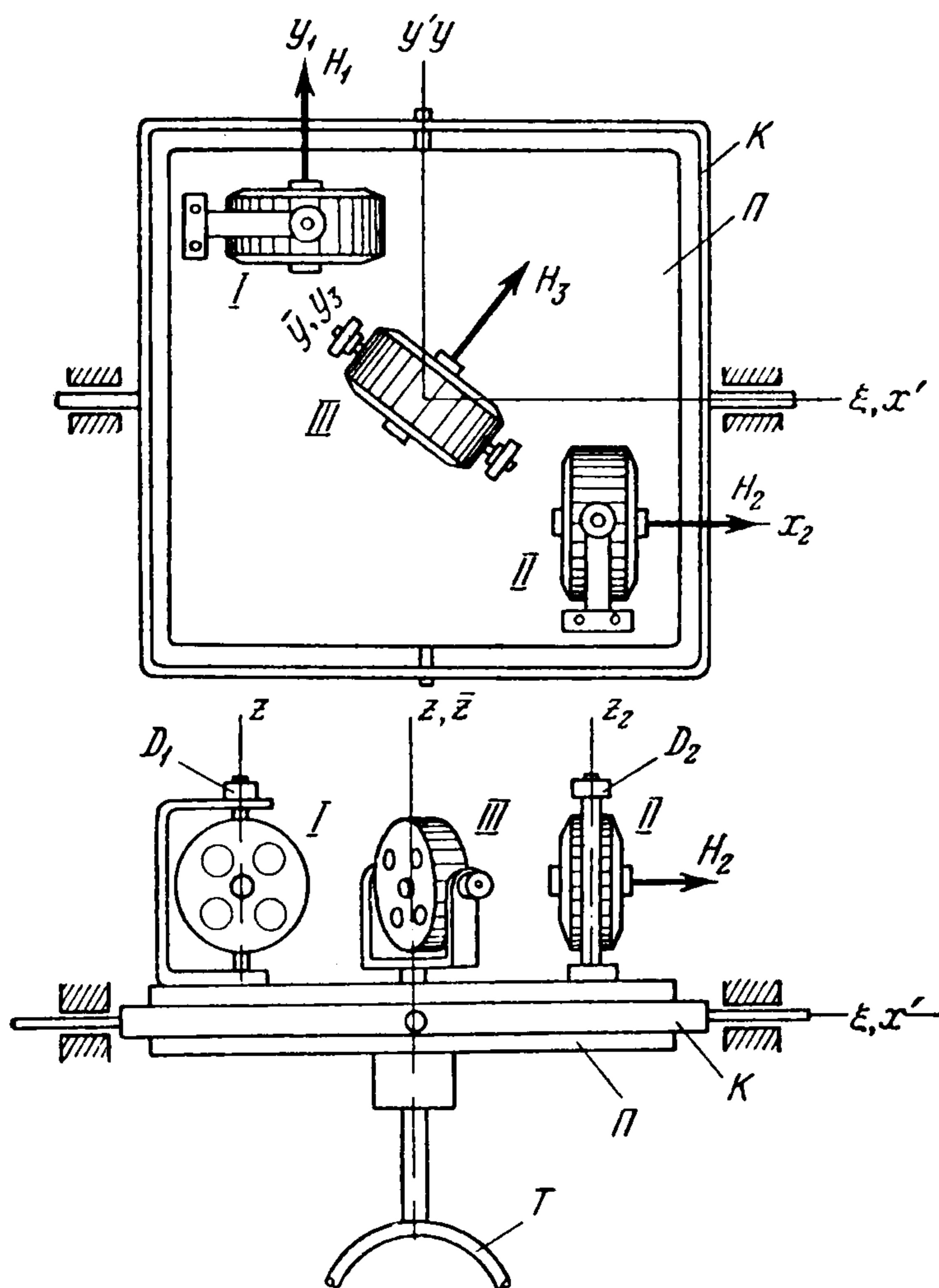
Если же момент трения в оси шарнира зависит от нормальных реакций, то составление уравнения движения, не содержащего этих

неизвестных реакций, становится более сложной задачей и требует использования всех трех соотношений (3). Заметим, что составление уравнений движения гироскопической системы с учетом трения, зависящего от величин нормальных реакций посредством метода Лагранжа

(с введением множителей), было бы в достаточной мере затруднительным.

5°. Перейдем теперь к составлению уравнений движения одного сложного гироскопического устройства, именно системы пространственной стабилизации посредством трех гироскопов¹ (фиг. 1).

На подвижном основании, несущем это устройство, укреплены подшипники цапф оси ξ (x') кольца K карданова подвеса платформы Π . Платформа Π может поворачиваться относительно кольца K вокруг оси y' (y), лежащей в плоскости кольца K и образующей с осью ξ (x') прямой угол. На платформе Π расположены два гироскопа I и II , кожухи которых могут поворачиваться относительно платформы соответственно вок-



Фиг. 1

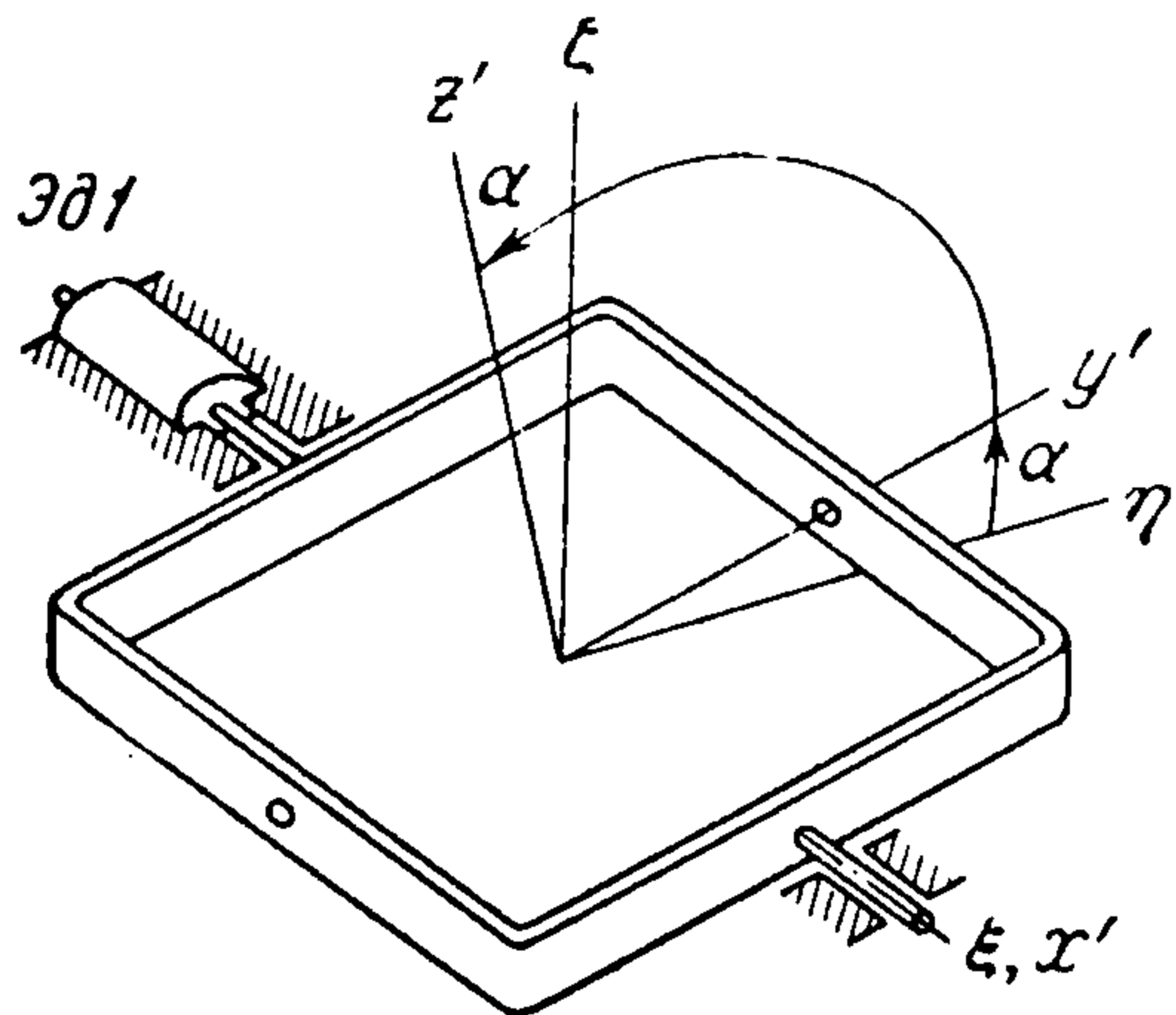
руг осей z_1 и z_2 , перпендикулярных плоскости платформы.

Стабилизируемое тело T вместе с третьим гироскопом (гироскоп III) также может поворачиваться относительно платформы Π вокруг некоторой оси z (\tilde{z}), которая в свою очередь перпендикулярна плоскости платформы Π . Ось y_3 кожуха гироскопа III параллельна плоскости платформы Π .

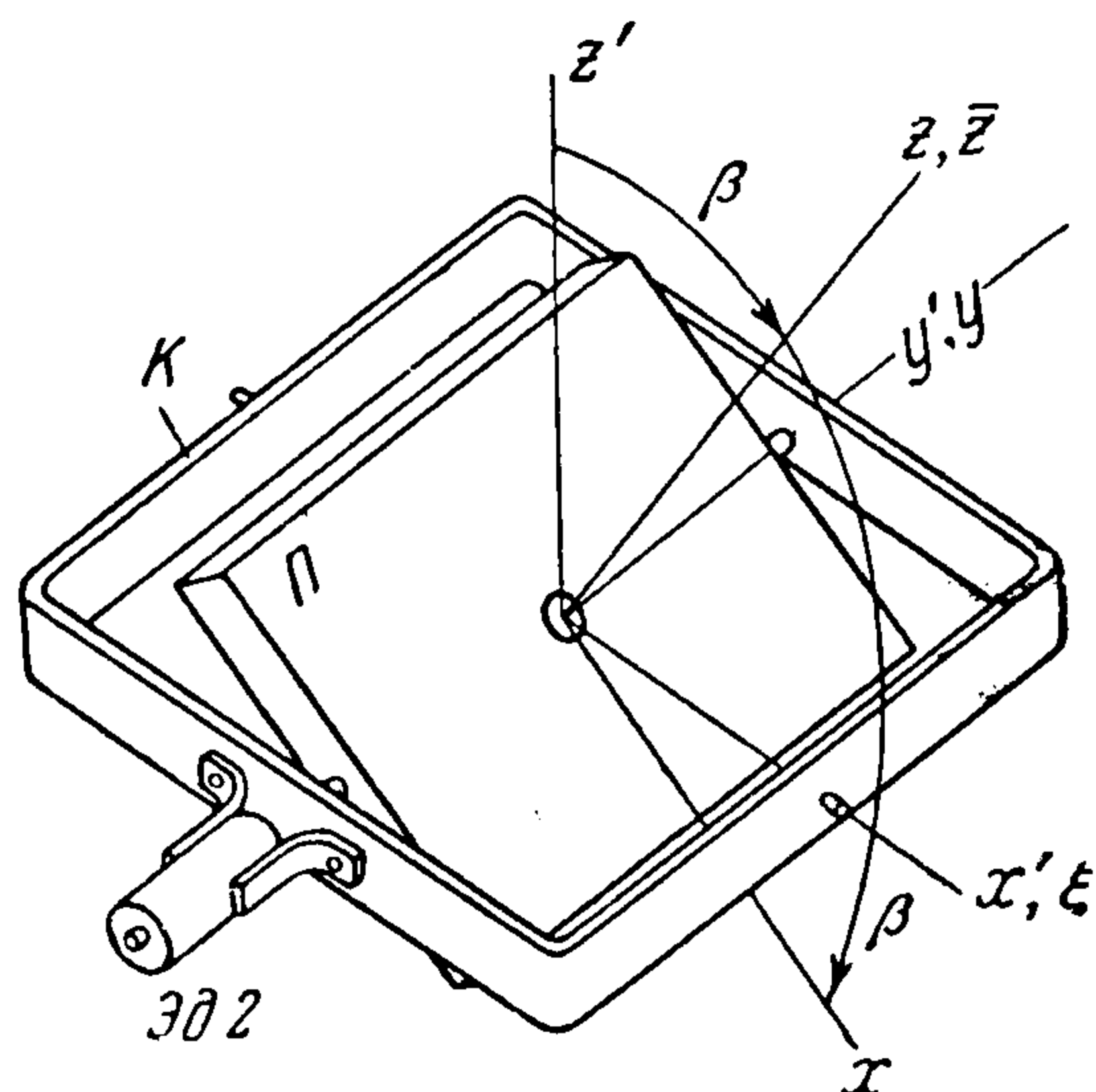
Введем правые системы координат $\xi\eta\zeta$, $x'y'z'$, xuz и $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, соответственно связанные с движущимся основанием, кольцом K , платформой Π и стабилизируемым телом T . Система координат xuz в дальнейшем принимается за расчетную. Ось ξ системы координат $\xi\eta\zeta$ является продольной осью движущегося объекта (подвижного основания), а ось η — его поперечной осью. Оси x' и y' системы координат $x'y'z'$ лежат в плоскости кольца K ; ось x' совпадает с осью ξ и является осью поворота кольца K относительно объекта (фиг. 2). Угол поворота кольца относительно объекта обозначим через α . При $\alpha = 0$ оси систем координат $x'y'z'$ и $\xi\eta\zeta$ соответственно совпадают. При $\alpha > 0$ кольцо повернуто относительно объекта против стрелки часов, если наблюдать за вращением со стороны положительной части оси ξ (или, что то же, оси x').

¹ Такая система была, в частности, осуществлена в АН УССР в 1957 г. для стабилизации электроизмерительных рамок на подвижном основании (вертолете).

Система координат xuz связана с платформой Π (фиг. 3). Ось y этой системы совпадает с осью y' и является осью поворота платформы Π относительно кольца K . Угол этого поворота обозначим через β . Ось x системы координат xuz лежит в плоскости платформы, а ось z ей пер-

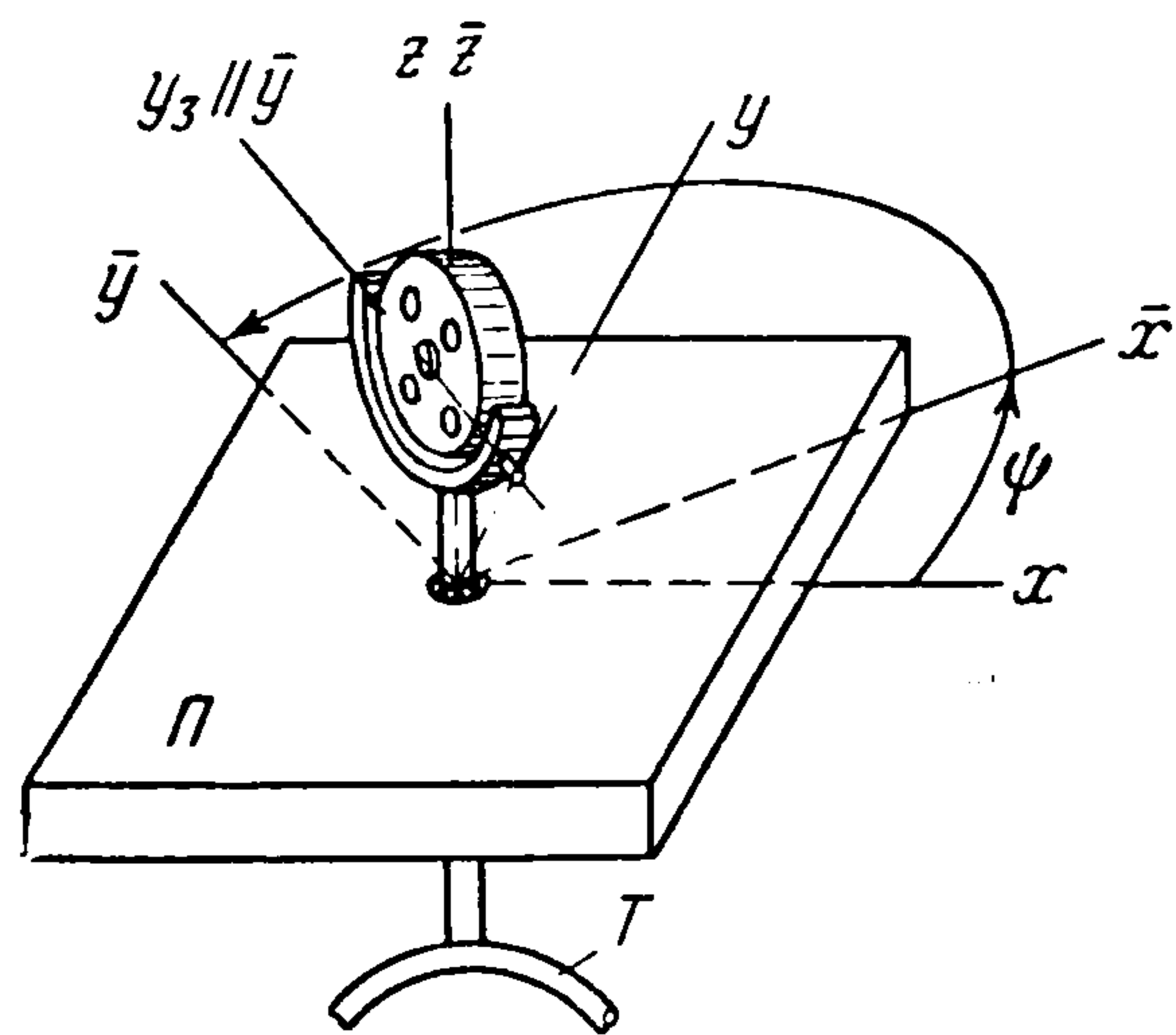


Фиг. 2

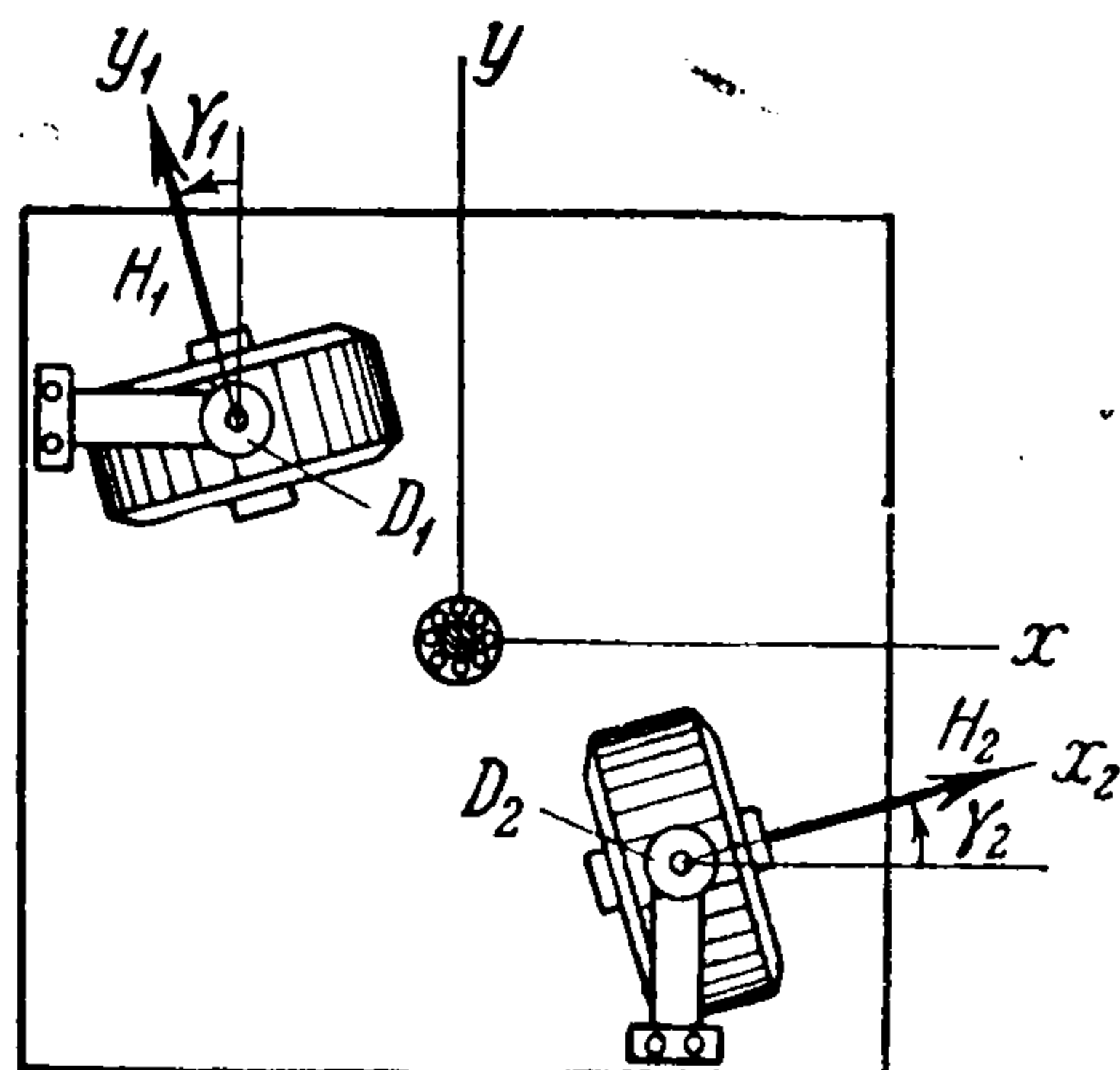


Фиг. 3

пендикулярна. При $\beta = 0$ плоскости платформы Π и кольца K и соответственные оси систем координат xuz и $x'y'z'$ совпадают, а при $\beta > 0$ платформа Π повернута против стрелки часов относительно кольца K ,



Фиг. 4



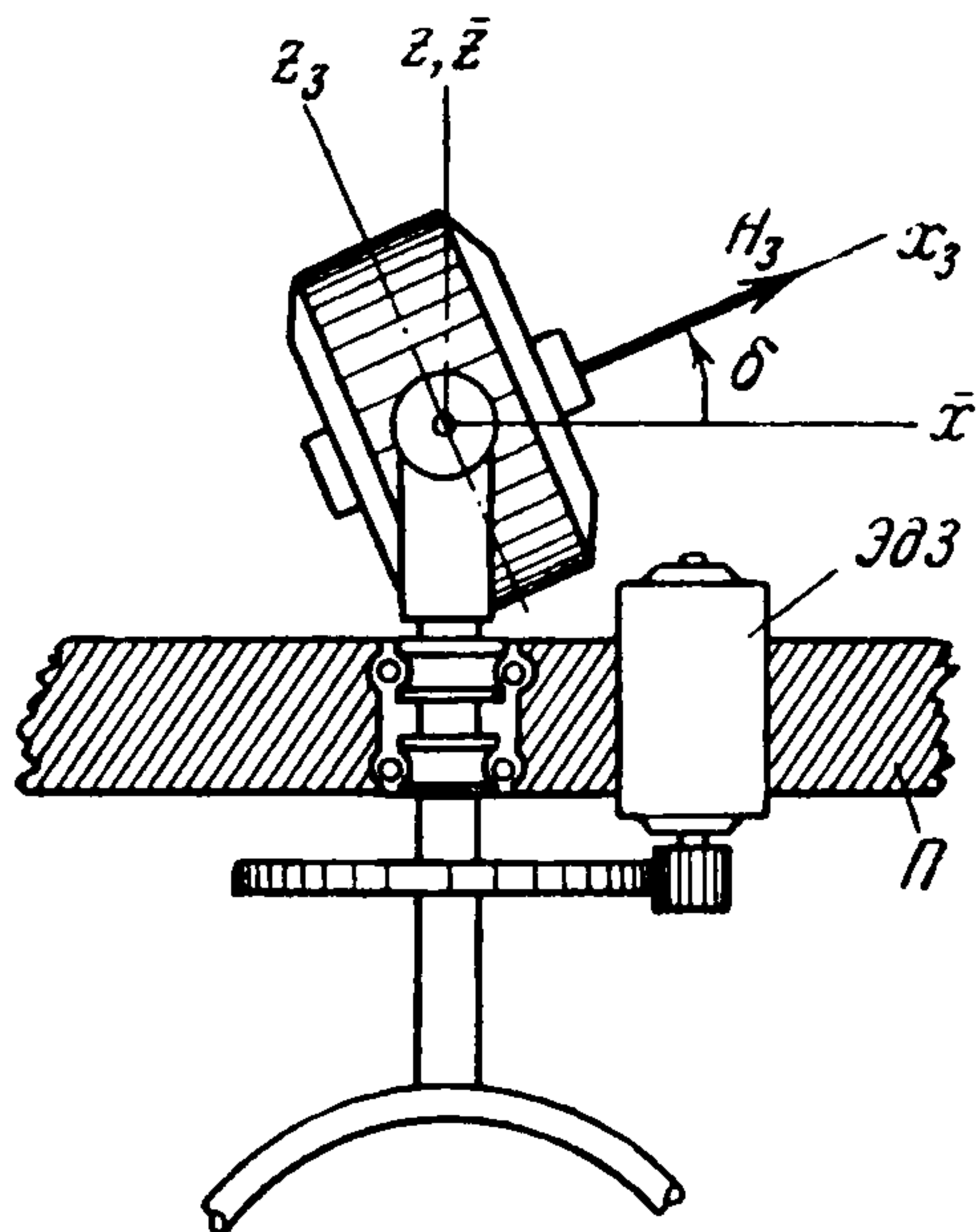
Фиг. 5

если наблюдать за поворотом со стороны положительной части оси y (или, что то же, оси y').

Наконец, со стабилизируемым телом T связана система координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, ось \tilde{z} которой совпадает с осью z системы координат xuz , связанной с платформой Π . Угол разворота этих систем друг относительно друга обозначим через ψ (фиг. 4). При $\psi = 0$ оси x и \tilde{x} , а также y и \tilde{y} совпадают друг с другом. При $\psi > 0$ тело T повернуто относительно исходного положения против стрелки часов, если смотреть со стороны положительной части оси z (\tilde{z}).

Углы поворотов кожухов гироскопов I и II относительно платформы Π обозначим через γ_1 и γ_2 (фиг. 5). При $\gamma_1 = 0$ ось собственного вращения гироскопа I параллельна оси y . Аналогично при $\gamma_2 = 0$ ось собственного вращения гироскопа I параллельна оси x . Направление положительного отсчета углов γ_1 и γ_2 примем таким же, как и для угла ψ .

Наконец, обозначим через δ угол между осью собственного вращения гироскопа *III* и плоскостью платформы (фиг. 6). Положительное направление отсчета угла δ выберем таким, чтобы при $0 < \delta \leq 1/2\pi$ проекция собственного кинетического момента гироскопа *III* на ось $z(\tilde{z})$ была положительной.



Фиг. 6

6°. Для обеспечения длительной стабилизации тела *T* в описываемом устройстве, помимо гироскопов, должны быть предусмотрены вспомогательные элементы, налагающие на кольцо *K*, платформу *II* и тело *T* моменты, величина и направление которых определяются углами γ_1 , γ_2 и δ . Такими элементами могут быть, в частности, электродвигатели $\mathcal{E}\delta_1$, $\mathcal{E}\delta_2$ и $\mathcal{E}\delta_3$ (фиг. 2, 3 и 6). Корпус двигателя $\mathcal{E}\delta_1$ укреплен на подвижном основании; он развивает вокруг оси $\xi(x')$ момент $M_{x'}$, при-

ложенный к карданову кольцу *K*. Управляется двигатель посредством усилителя, напряжение на входе которого создает датчик D_1 , укрепленный на оси кожуха гироскопа *I*. Вызываемая моментом двигателя $\mathcal{E}\delta_1$ прецессия гироскопа *I* направлена в сторону уменьшения угла γ_1 . Тем самым при достаточно большом моменте этого двигателя устраняется опасность достижения углом γ_1 значения $1/2\pi$, при котором стабилизация нарушается. Последнее может произойти из-за вращения устройства вместе с подвижным основанием вокруг оси z или по другой причине (действие сил веса, трение, инерционные нагрузки и др.).

Двигатель $\mathcal{E}\delta_2$ находится на кольце *K*, посредством которого к платформе *II* прилагается вокруг оси $y'(y)$ момент M_y . Управляется двигатель $\mathcal{E}\delta_2$ аналогично предыдущему датчиком D_2 , регистрирующим угол поворота γ_2 кожуха гироскопа *II*.

Наконец, двигатель $\mathcal{E}\delta_3$, расположенный на платформе *II*, стремится повернуть тело *T* вокруг оси $z(\tilde{z})$, развивая момент, величина и направление которого определяются углом δ отклонения кожуха гироскопа *III* (фиг. 4).

Изменение ориентации тела *T* может происходить лишь в результате действия сил, приложенных к гироскопам *I*, *II*, *III*, вокруг осей их кожухов. Такими силами могут быть, в частности, силы трения, в результате действия которых заданная ориентация тела *T* нарушается. Для ее восстановления посредством электромагнитов, а в ряде случаев и при помощи силы тяжести искусственно создаются моменты¹ вокруг осей кожухов гироскопов *I*, *II* и *III*.

¹ Подобные же моменты могут приводить платформу и в плоскость горизонта, а у гироскопа *III* вызывать такую прецессию, чтобы тело *T* не вращалось относительно Земли. Для этого на кожухе гироскопа *III* можно расположить соответственно подобранный груз, создающий момент относительно оси кожуха u_3 . Для приведения же платформы *II* в плоскость горизонта, в частности, достаточно укрепить сбоку кожухов гироскопов *I* и *II* дополнительные грузы. При

7°. При составлении уравнений, описывающих поведение этого сложного гироскопического устройства, рассмотрим последовательно следующие шесть механических систем: 1) все устройство в целом, т. е. кольцо K , платформа II , тело T и все три гироскопа со всеми кинематически связанными с ними дополнительными элементами, 2) то же, но без кольца K , 3) тело T с гироскопом III , 4) гироскоп I (ротор с кожухом), 5) гироскоп II и, наконец, 6) гироскоп III .

Каждая из упомянутых систем связана с другими или с подвижным основанием плоским шарниром. Момент внешних сил, действующих на соответствующую систему относительно оси шарнира, следует считать заданным.

Угол поворота цапф шарнира относительно подшипников является одной из обобщенных координат устройства. Этим и объясняется выбор упомянутых механических систем.

Для первых трех механических систем в качестве опорной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ возьмем систему с началом в геометрическом центре подвеса, т. е. в общем начале систем координат $\xi\eta\zeta$, $x'y'z'$, xyz и $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, связанных соответственно с подвижным основанием кольцом K , платформой II и телом T . Начала опорных систем координат для трех последних механических систем, т. е. отдельных гироскопов, будем брать каждый раз совпадающие с точками пересечения осей кожуха и ротора соответствующего гироскопа.

В качестве расчетной системы примем во всех случаях одну и ту же систему координат xyz , связанную с платформой II . Угловую скорость этой системы или, что то же, платформы II относительно опорной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ обозначим, как и выше, через ω , а ее проекции на оси x , y и z — через ω_x , ω_y и ω_z . Величины проекций ω_x и ω_y обуславливаются прецессией гироскопов I и II и, следовательно, должны быть небольшими; что же касается составляющей угловой скорости платформы II вдоль оси z (\tilde{z}), т. е. проекции ω_z , то ее величина определяется движением основания, на котором установлен рассматриваемый стабилизатор, и, следовательно, может быть произвольной.

8°. Обозначим через M' главный момент сил, действующих на первую механическую систему¹.

Кинетический момент первой механической системы обозначим через G' . В соответствии с изложенным выше, в рамках элементарной теории гироскопов его следует считать состоящим лишь из геометрической суммы собственных кинетических моментов гироскопов I , II и III .

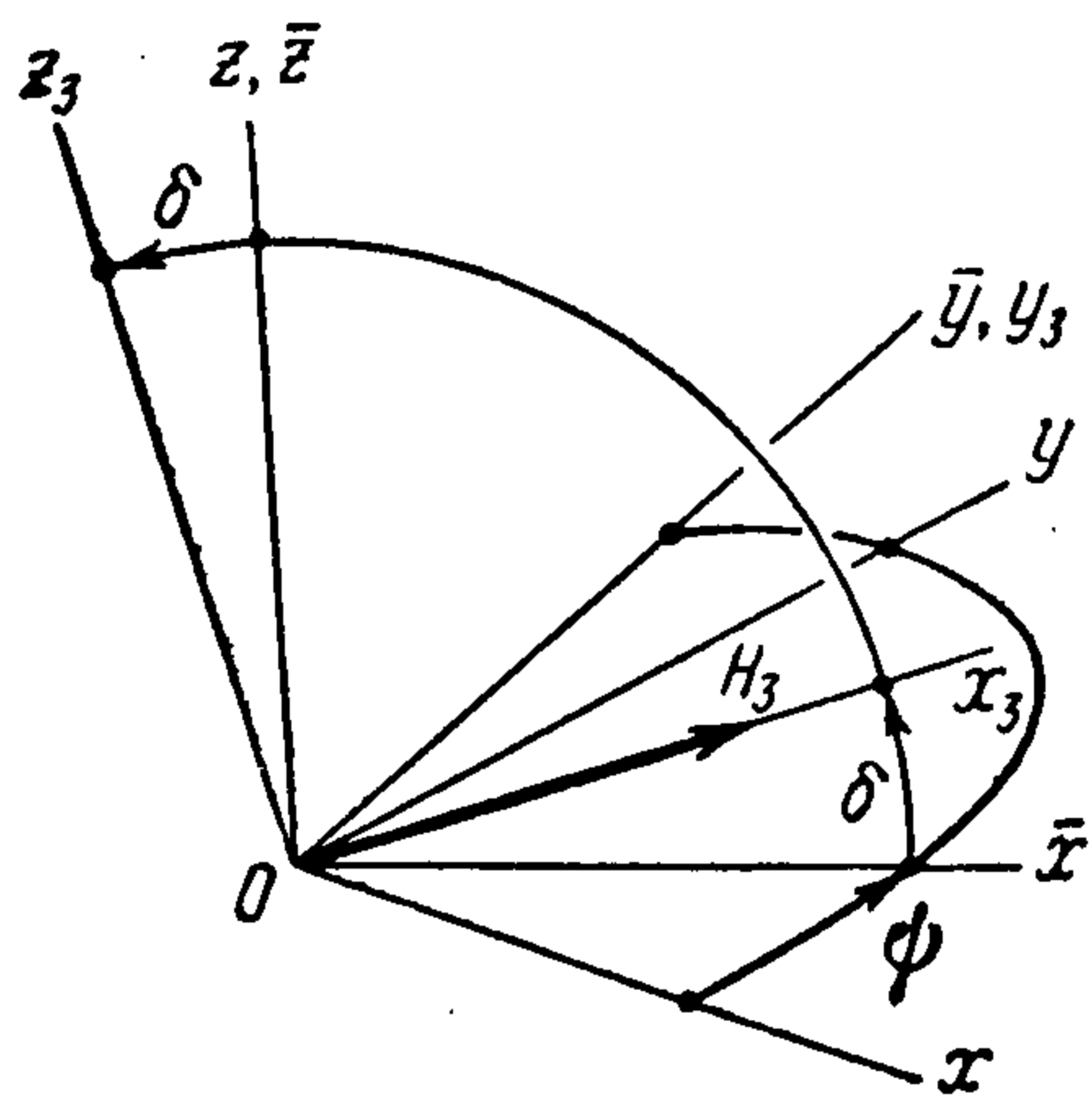
наклоне платформы дополнительные грузы создают моменты вокруг осей кожухов, вызывая тем самым прецессию гироскопов I и II . При надлежащем выборе стороны расположения грузов на кожухах платформа возвращается обратно в горизонтальное положение. Описанная система коррекции называется механической. Она проще так называемой электрической коррекции, где моменты на осях кожухов гироскопов I и II налагаются посредством электромагнитов. Величина и направление моментов определяются при этом отклонением специальных маятников, расположенных на платформе II .

¹ В рамках прецессионной теории гироскопов главный вектор совокупности этих сил равен нулю, следовательно, эта совокупность приводится к паре с моментом M' .

Проекции кинетического момента G' на оси расчетной системы координат xuz представляются выражениями

$$\begin{aligned} G_{x'} &= H (-\sin \gamma_1 + \cos \gamma_2 + \cos \delta \cos \psi), \\ G_{y'} &= H (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2 + \cos \delta \sin \psi), \quad G_{z'} = H \sin \delta \end{aligned} \quad (6)$$

в чем нетрудно убедиться, рассматривая фиг. 5 и 7. Собственные кинетические моменты гироскопов H_1 , H_2 и H_3 считаются здесь равными одному и тому же постоянному количеству H . Соотношения типа (3), полученные на основании применения теоремы о кинетическом моменте к первой механической системе, имеют вид:



Фиг. 7

$$\begin{aligned} \frac{dG_{x'}}{dt} + \omega_y^* G_{z'} - \omega_z G_{y'} &= M_{x'} \\ \frac{dG_{y'}}{dt} + \omega_z G_{x'} - \omega_x G_{z'} &= M_{y'} \\ \frac{dG_{z'}}{dt} + \omega_x G_{y'} - \omega_y G_{x'} &= M_{z'} \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично соотношению (5), замечаем (фиг. 3), что выражение

$$M_{x'} \cos \beta + M_{z'} \sin \beta = M_{x'} \quad (8)$$

представляет собой сумму моментов сил, действующих на первую механическую систему, т. е. на весь стабилизатор, относительно оси x' (ξ) подвеса кольца K . Эта сумма не содержит моментов сил нормальных реакций подшипников цапф оси. Таким образом, равенство

$$\left[\frac{dG_{x'}}{dt} + \omega_y G_{z'} - \omega_z G_{y'} \right] \cos \beta + \left[\frac{dG_{z'}}{dt} + \omega_x G_{y'} - \omega_y G_{x'} \right] \sin \beta = M'_{x'} \quad (9)$$

полученное посредством замены $M_{x'}$ и $M_{z'}$ в соотношении (8) их выражениями, согласно соотношениям (7), является уравнением движения гиросtabilизатора, не содержащим упомянутых моментов сил неизвестных нормальных реакций подшипников оси кольца K , расположенных на несущем основании¹.

Используя в равенстве (9) формулы (6) и производя выкладки, получим уравнение

$$\begin{aligned} H \left\{ \cos \beta \frac{d}{dt} (-\sin \gamma_1 + \cos \gamma_2) - \cos \beta \cos \delta \sin \psi \left(\omega_z + \frac{d\psi}{dt} \right) - \right. \\ \left. - (\cos \beta \sin \delta \cos \psi - \sin \beta \cos \delta) \frac{d\delta}{dt} + \omega_y \left[\cos \beta \sin \delta - \sin \beta (-\sin \gamma_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \gamma_2 + \cos \delta \cos \psi) \right] + (\omega_x \sin \beta - \omega_z \cos \beta) (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2) + \right. \\ \left. + \omega_x \sin \beta \cos \delta \sin \psi \right\} = M'_{x'} \end{aligned} \quad (10)$$

В состав момента $M_{x'}$, помимо момента сил трения и момента, развиваемого электродвигателем $\mathcal{E}d_1$, входят также моменты сил притяжения

¹ Здесь и далее принимается, что моменты трения во всех осях подвеса не зависят от величины сил нормальных реакций.

всех составных частей устройства к Земле и моменты сил инерции переносного движения, обусловленные поступательным перемещением опорной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, с началом в геометрическом центре подвеса.

9°. Уравнение (10) является одним из шести дифференциальных уравнений, описывающих движение гироскопического стабилизатора. Чтобы получить следующее уравнение, рассмотрим механическую систему, включающую в себя все части стабилизатора, как и предыдущая система, кроме кольца K . Так как кинетический момент кольца K в элементарной теории гироскопов не учитывается, то следует считать суммарный кинетический момент G этой новой системы таким же, как и кинетический момент G' предыдущей системы, т. е. положить

$$G_x = G_{x'}, \quad G_y = G_{y'}, \quad G_z = G_{z'} \quad (11)$$

где G_x , G_y и G_z — проекции кинетического момента новой механической системы на оси x , y и z , а величины $G_{x'}$, $G_{y'}$ и $G_{z'}$ определяются формулами (6).

Силы реакции связи платформы Π с кольцом K являются в этой системе уже силами внешними и должны учитываться в соотношениях, являющихся следствием теоремы о кинетическом моменте. Эти соотношения имеют вид равенств (3). Нормальные составляющие сил реакций не входят лишь в среднее из уравнений (3), так как ось y (y') является одновременно осью платформы Π ; подшипники этой оси жестко связаны с кольцом K . Используя равенства (11) и формулы (6), получаем в результате уравнение

$$H \left[\frac{d}{dt} (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2) - \sin \delta \sin \psi \frac{d\delta}{dt} + \left(\omega_z + \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \delta \cos \psi + \omega_z (-\sin \gamma_1 + \cos \gamma_2) - \omega_x \sin \delta \right] = M_y \quad (12)$$

В состав правой части этого уравнения, т. е. момента M_y , входит момент трения оси платформы о свои подшипники, приведенный момент двигателя $\mathcal{E}\delta_2$, момент сил тяготения и сил инерции переносного движения всех частей стабилизатора, кроме внешнего кольца.

10°. Рассмотрим теперь третью механическую систему — тело T с гироскопом III (фиг. 4). Ее кинетический момент состоит из одного собственного кинетического момента \tilde{G} гироскопа III . Следовательно (фиг. 7), проекции вектора \tilde{G} на оси расчетной системы координат xuz представляются формулами

$$\tilde{G}_x = H \cos \delta \cos \psi, \quad \tilde{G}_y = H \cos \delta \sin \psi, \quad \tilde{G}_z = H \sin \delta \quad (13)$$

Из трех уравнений типа (3) следует в данном случае воспользоваться третьим, так как в остальные уравнения войдут неизвестные нормальные реакции подшипников оси стабилизируемого тела T , являющиеся по отношению к рассматриваемой частной механической системе силами внешними. Таким образом, учитывая формулы (13), приходим к уравнению

$$H \left(\cos \delta \frac{d\delta}{dt} + \omega_x \cos \delta \sin \psi - \omega_y \cos \delta \cos \psi \right) = \tilde{M}_z \quad (14)$$

Здесь \tilde{M}_z — момент вокруг оси z (\tilde{z}) всех внешних сил, действующих на третью механическую систему, т. е. на тело T , кожух и ротор гироскопа III , включая силы трения, момент, налагаемый двигателем $\mathcal{E}d_3$, а также моменты сил инерции и сил тяготения. Силы инерции по-прежнему определяются как силы инерции переносного движения, обусловленные поступательным перемещением опорной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ с началом в геометрическом центре подвеса стабилизатора.

11°. При рассмотрении следующих трех механических систем — гироскопов I , II и III — соответствующие опорные системы $\xi_1^*\eta_1^*\zeta_1^*$, $\xi_2^*\eta_2^*\zeta_2^*$ и $\xi_3^*\eta_3^*\zeta_3^*$ следует выбрать так, чтобы их начала совпадали с точками пересечения осей кожуха и ротора соответствующего гироскопа. Они имеют различные ускорения по отношению к абсолютной системе координат $\xi_a^*\eta_a^*\zeta_a^*$. Это различие обуславливается угловой скоростью ω платформы II , а для опорной системы $\xi_3^*\eta_3^*\zeta_3^*$ также и относительной угловой скоростью $d\psi/dt$ тела T по отношению к платформе II . Из-за небольших размеров гироскопического стабилизатора и сравнительной малости величин ω_x , ω_y , ω_z и $d\psi/dt$ упомянутое различие ускорений начал разных опорных систем координат от ускорения опорной системы $\xi^*\eta^*\zeta^*$ весьма невелико и на практике в большинстве случаев может не учитываться.

Применяя теорему о кинетическом моменте к механической системе, состоящей из ротора и кожуха гироскопа I , имеем аналогично третьему соотношению типа (3) равенство

$$\frac{d}{dt}G_z^I + \omega_x G_y^I - \omega_y G_x^I = M_{z_1}^I \quad (15)$$

не содержащее неизвестных сил нормальных реакций оси кожуха. Здесь (фиг. 5)

$$G_x^I = -H \sin \gamma_1, \quad G_y^I = H \cos \gamma_1, \quad G_z^I = 0 \quad (16)$$

проекции кинетического момента G^I этой системы или, что то же, собственного кинетического момента гироскопа I на оси расчетной системы координат xuz ; величина $M_{z_1}^I$ представляет собой сумму моментов относительно оси z_1 кожуха гироскопа I сил, действующих на кожух и ротор этого гироскопа. К этим силам относятся, в частности, силы трения в осях подвеса кожуха, силы тяготения, силы инерции переносного движения, силы упругости токоподводов и силы реакций датчиков.

Используя формулы (16), приводим равенство (15) к виду

$$H (\omega_x \cos \gamma_1 + \omega_y \sin \gamma_1) = M_{z_2}^I \quad (17)$$

Оно и является четвертым уравнением движения гироскопического стабилизатора.

Производя подобным же образом выкладки, относящиеся к гироскопу II , получаем пятое уравнение, а именно

$$H (\omega_x \sin \gamma_2 - \omega_y \cos \gamma_2) = M_{z_2}^{II} \quad (18)$$

Момент $M_{z_2}^{II}$ имеет тот же смысл, что и момент $M_{z_1}^I$, являясь суммой моментов сил, действующих на кожух и ротор гироскопа II , относительно оси z_2 его кожуха.

Существенно, что уравнения (17) и (18) не содержат неизвестных сил нормальных реакций подшипников осей кожухов гироскопов *I* и *II*.

12°. Наконец, рассмотрим шестую механическую систему, состоящую из кожуха и ротора гироскопа *III* (фиг. 6). В этом случае соотношения (3) после замены в них величин G_x , G_y и G_z соответственно на проекции кинетического момента гироскопа *III*

$$G_x^{III} = H \cos \delta \cos \psi, \quad G_y^{III} = H \cos \delta \sin \psi, \quad G_z^{III} = H \sin \delta \quad (19)$$

принимают вид:

$$\begin{aligned} H \left[\frac{d}{dt} (\cos \delta \cos \psi) + \omega_y \sin \delta - \omega_z \cos \delta \sin \psi \right] &= M_x^{III} \\ H \left[\frac{d}{dt} (\cos \delta \sin \psi) + \omega_z \cos \delta \cos \psi - \omega_x \sin \delta \right] &= M_y^{III} \\ H \left[\frac{d}{dt} \sin \delta + (\omega_x \sin \psi - \omega_y \cos \psi) \cos \delta \right] &= M_z^{III} \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь M_x^{III} , M_y^{III} , M_z^{III} — суммы моментов сил, действующих на кожух и ротор гироскопа *III* относительно осей x , y , z (или относительно осей, соответственно параллельных осям x , y и z ; см. примечание к стр. 374).

В число этих сил входят также неизвестные силы нормальных реакций подшипников оси кожуха гироскопа *III*, расположенных в теле *T*. Однако если составить выражение

$$-M_x^{III} \sin \psi + M_y^{III} \cos \psi = M_{\tilde{y}}^{III} \quad (21)$$

то, как нетрудно видеть, оно представляет собой сумму моментов сил, действующих на гироскоп *III* относительно оси \tilde{y} его кожуха, и упомянутые силы нормальных реакций в него не входят. Подставляя сюда значения моментов M_x^{III} и M_y^{III} согласно равенствам (20), получим в результате выкладок уравнение

$$H \left[\left(\omega_z + \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \delta - (\omega_x \cos \psi + \omega_y \sin \psi) \sin \delta \right] = M_{\tilde{y}}^{III} \quad (22)$$

Заметим, что при выводе уравнений (17), (18) и (22) можно вместо расчетной системы координат xyz брать и другие расчетные системы, в частности, систему $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ при выводе уравнения (22).

Уравнением (22) замыкается совокупность шести уравнений, описывающих поведение гиростабилизатора и его отдельных частей как относительно друг друга, так и относительно направлений, связанных с неподвижными звездами.

13°. Для удобства последующих заключений соберем вместе уравнения (10), (12), (14), (17), (18) и (22). Получится следующая совокупность уравнений, описывающих движение трехосного гироскопического стабилизатора:

$$\begin{aligned} H \left\{ \cos \beta \left[\frac{d}{dt} (-\sin \gamma_1 + \cos \gamma_2) - \cos \delta \sin \psi \left(\omega_z + \frac{d\psi}{dt} \right) + \omega_y \sin \delta \right] - \right. \\ \left. - \left(\cos \beta \sin \delta \cos \psi - \sin \beta \cos \delta \right) \frac{d\delta}{dt} + \sin \beta \left[\omega_x \cos \delta \sin \psi - \omega_y \left(-\sin \gamma_1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \cos \gamma_2 + \cos \delta \cos \psi \right) \right] + \left(\omega_x \sin \beta - \omega_z \cos \beta \right) \left(\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2 \right) \right\} = M_{x'} \quad (23) \end{aligned}$$

$$H \left[\frac{d}{dt} (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2) - \sin \delta \sin \psi \frac{d\delta}{dt} + \left(\omega_z + \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \delta \cos \psi + \omega_z (-\sin \gamma_1 + \cos \gamma_2) - \omega_x \sin \delta \right] = M_y$$

$$H \left(\cos \delta \frac{d\delta}{dt} + \omega_x \cos \delta \sin \psi - \omega_y \cos \delta \cos \psi \right) = \tilde{M}_z$$

$$H (\omega_x \cos \gamma_1 + \omega_y \sin \gamma_1) = M_{z_1}^I, \quad H (\omega_x \sin \gamma_2 - \omega_y \cos \gamma_2) = M_{z_2}^{II}$$

$$H \left[\left(\omega_z + \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \delta - (\omega_x \cos \psi + \omega_y \sin \psi) \sin \delta \right] = M_{\tilde{y}}^{III}$$

14°. Рассмотрим некоторые важные следствия этих уравнений. Пусть

$$M_{z_1}^I = M_{z_2}^{II} = M_{\tilde{y}}^{III} = 0 \quad (24)$$

т. е. моменты на осях кожухов гироскопов отсутствуют, что практически с некоторым приближением может быть достигнуто в результате тщательной балансировки гироскопов так, чтобы центр тяжести системы кожух—ротор возможно более точно лежал на оси соответствующего кожуха, а силы трения в подшипниках и сопротивление токоподводов были сведены к минимуму.

Согласно четвертому и пятому уравнениям (23), получим в этом случае равенства

$$\omega_x \cos \gamma_1 + \omega_y \sin \gamma_1 = 0, \quad \omega_x \sin \gamma_2 - \omega_y \cos \gamma_2 = 0 \quad (25)$$

откуда следует, что

$$\omega_x = \omega_y = 0 \quad (26)$$

во всех случаях, кроме

$$\gamma_2 = \gamma_1 \pm 1/2\pi \quad (27)$$

при котором оси собственного вращения гироскопов I и II параллельны. Таким образом, если в результате действия электродвигателей $\mathcal{E}d_1$ и $\mathcal{E}d_2$ углы γ_1 и γ_2 остаются в некоторых пределах, например $\pm 15-20^\circ$, то плоскость платформы II при выполнении условий (24) оказывается стабилизированной относительно неподвижных звезд.

Обращаясь теперь к шестому уравнению системы (23), учитывая условия (24) и равенства (25), получим

$$\omega_z + \frac{d\psi}{dt} = 0 \quad (28)$$

если только, конечно,

$$\delta \neq \pm 1/2\pi \quad (29)$$

Левая часть равенства (28) представляет собой проекцию на ось z (\tilde{z}) угловой скорости тела T относительно опорной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Проекция этой угловой скорости на оси x и y совпадают с соответствующими проекциями угловой скорости платформы II и в силу равенства (26) равны нулю. Таким образом, при отсутствии моментов на осях кожухов всех трех гироскопов, т. е. при соблюдении условий (24), тело T оказывается стабилизированным относительно направлений на неподвижные звезды.

Первые три уравнения (23) при учете равенств (26) и (28) принимают теперь вид:

$$-H \cos \beta \left[\frac{d}{dt} (\sin \gamma_1 - \cos \gamma_2) + (\sin \delta \cos \psi - \cos \delta \operatorname{tg} \beta) \frac{d\delta}{dt} + \omega_z (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2) \right] = M_{x'}$$
(30)

$$H \left[\frac{d}{dt} (\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2) - \sin \delta \sin \psi \frac{d\delta}{dt} + \omega_z (-\sin \gamma_1 + \cos \gamma_2) \right] = M_y$$

$$H \cos \delta \frac{d\delta}{dt} = \tilde{M}_z$$

Если предположить, что к осям кольца K , платформы Π и тела T никакие моменты не приложены и трение отсутствует, т. е.

$$M'_{x'} = M_y = \tilde{M}_z = 0$$
(31)

причем движение несущего основания таково, что

$$\omega_z = 0$$
(32)

то уравнения (30) удовлетворяются произвольными постоянными значениями углов γ_1 , γ_2 и δ .

Пусть теперь электродвигатели $\mathcal{E}\partial_1$, $\mathcal{E}\partial_2$ и $\mathcal{E}\partial_3$ управляются так, что моменты, которые они налагают на оси кольца K , платформы Π и тела T , пропорциональны углам поворотов кожухов соответствующих гироскопов, а трение в осях подвеса по-прежнему отсутствует. В этом случае можно принять, что

$$M'_{x'} = k\gamma_1, \quad M_y = -k\gamma_2, \quad \tilde{M}_z = -k\delta$$
(33)

где k — коэффициент пропорциональности.

Уравнения (30) при условии (32) имеют в этом случае решение

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \delta = 0$$
(34)

Нетрудно убедиться в рамках прецессионной теории рассматриваемого гироскопического стабилизатора, что положение равновесия, определяемое этим решением, устойчиво. Действительно, если углы γ_1 , γ_2 и δ малы, то при сохранении малых лишь первого порядка относительно этих величин и их производных уравнения (30) с учетом равенств (32) и (33) приводятся к виду

$$-\cos \beta H \frac{d\gamma_1}{dt} = k\gamma_1 - \sin \beta H \frac{d\delta}{dt}, \quad H \frac{d\gamma_2}{dt} = -k\gamma_2, \quad H \frac{d\delta}{dt} = -k\delta$$
(35)

Согласно этим уравнениям, очевидно, что величины углов γ_1 , γ_2 и δ будут стремиться к нулю независимо от закона изменения угла β между плоскостями кольца K и платформы Π . Изменение последнего определяется движением основания; следует считать, конечно, что $\beta < 90^\circ$ ¹.

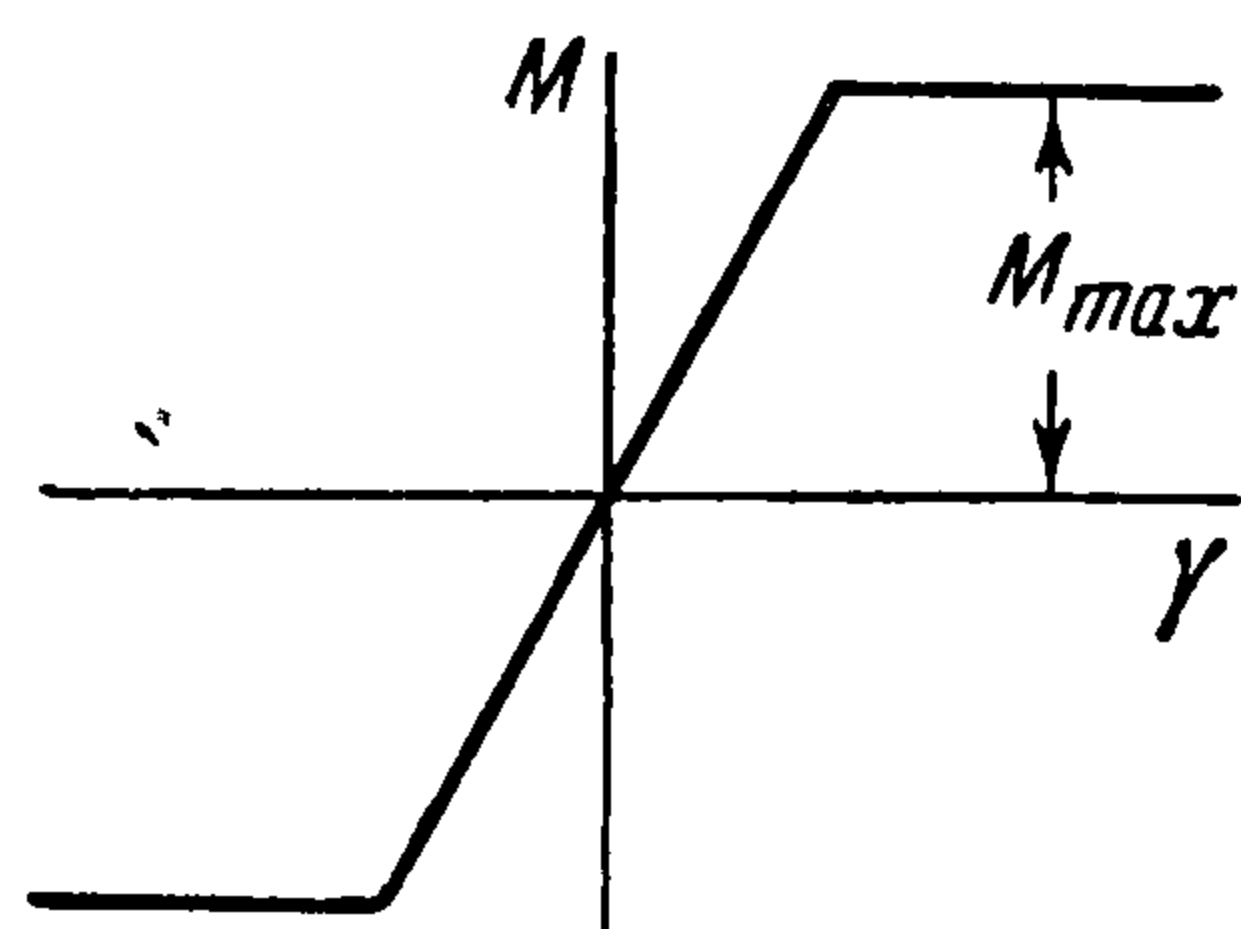
¹ В некоторых случаях при включенных двигателях переходные процессы, упомянутые в п. 1°, не затухают и приводят к автоколебаниям гироскопической платформы (в первую очередь вокруг оси x' подвеса кольца K). При изучении этих колебаний, а также средств их подавления следует учитывать моменты инерции частей гироскопического устройства и переходные процессы в электрических цепях двигателя и в дополнительных цепях обратной связи усилителей. Вместе с тем из-за значительной частоты автоколебаний влияние на них движения самого основания, как правило, оказывается не существенным. Рассмотрение автоколебаний описываемого гироскопического стабилизатора составляет предмет отдельного исследования.

В более общем случае в состав правых частей уравнений (30), т. е. моментов $M'_{x'}$, M_y и \tilde{M}_z , войдут, кроме моментов электродвигателей, еще моменты трения в осях подвеса x' (ξ), y (y') и z (z')—соответственно кольца K , платформы Π и тела T ; направление последних определяется относительными угловыми скоростями $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$ и $d\psi/dt$. Кроме того, при недостаточной уравновешенности механической системы и ее отдельных частей в состав $M'_{x'}$, M_y и \tilde{M}_z войдут также моменты сил инерции переносного движения и сил тяготения.

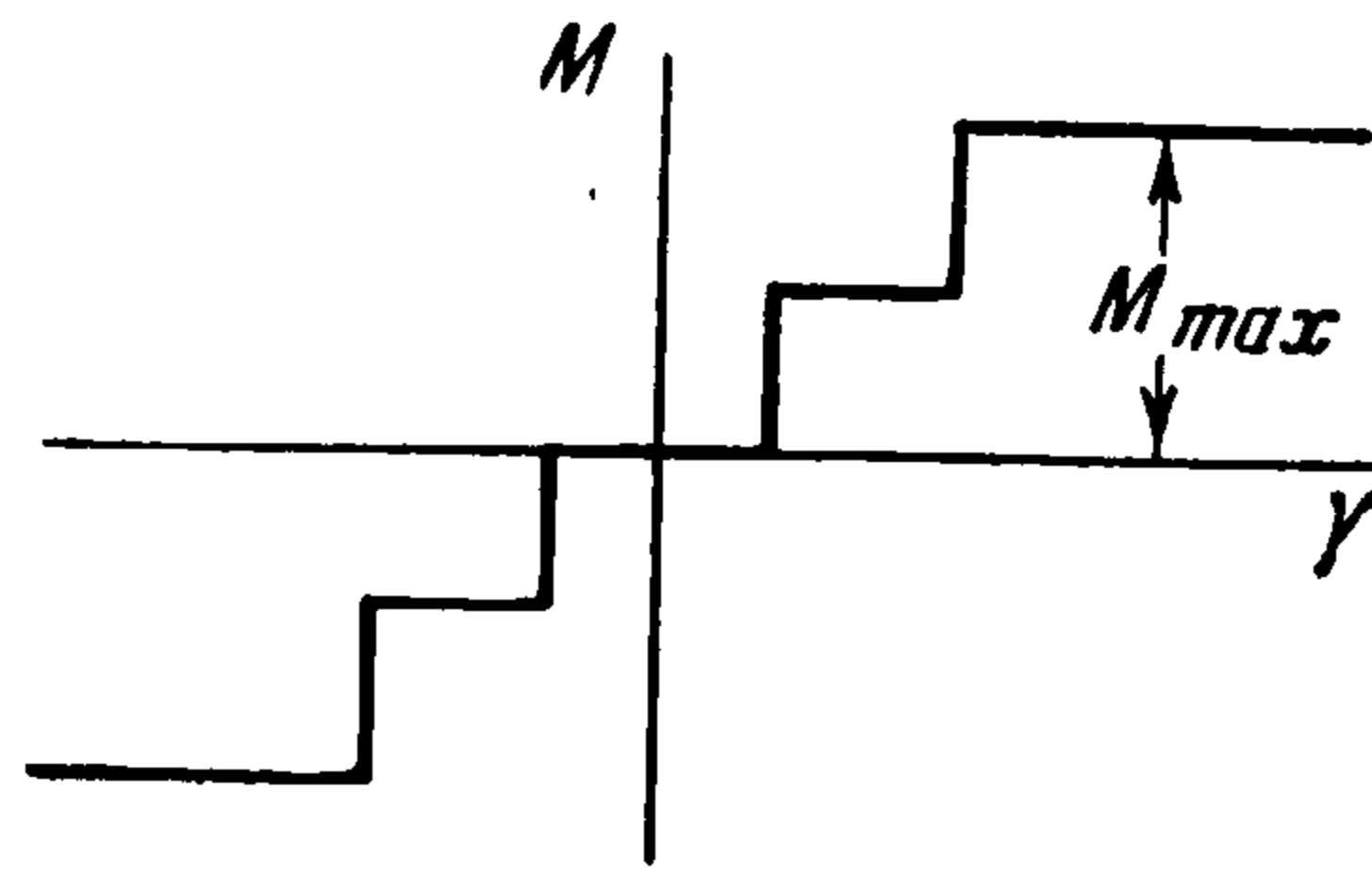
В предположении малости углов γ_1 , γ_2 и δ уравнения (29) представятся теперь в виде

$$\begin{aligned} -\cos\beta H \left[\frac{d\gamma_1}{dt} - \operatorname{tg}\beta \frac{d\delta}{dt} + \omega_z (1 + \gamma_2) \right] &= M_{x'}^* + M(\gamma_1) \\ H \left[\frac{d\gamma_2}{dt} + \omega_z (1 - \gamma_1) \right] &= M_y^* - M(\gamma_2) \\ H \frac{d\delta}{dt} &= M_z^* - \tilde{M}(\delta) \end{aligned} \quad (36)$$

где $M_{x'}^*$, M_y^* и \tilde{M}_z^* —упомянутые выше суммы моментов сил трения, сил инерции и сил тяготения, действующих соответственно на механические системы: кольцо K —платформа Π —тело T (с гироскопами I , II и III);



Фиг. 8



Фиг. 9

платформа Π —тело T (также с гироскопами I , II и III) и только тело T (с гироскопом III), а $M(\gamma_1)$, $M(\gamma_2)$, $M(\delta)$ —моменты, налагаемые на эти механические системы соответственно двигателями $\mathcal{E}\delta_1$, $\mathcal{E}\delta_2$ и $\mathcal{E}\delta_3$.

Момент, развиваемый каждым из электродвигателей, не может превышать некоторого предела, обусловленного параметрами двигателей и передач, связывающей его вал с соответствующей осью. На фиг. 8 показана часто встречающаяся форма диаграммы зависимости момента M , развиваемого двигателем (в режиме короткого замыкания, т. е. при полностью заторможенном роторе), и углом γ отклонения кожуха какого-либо гироскопа от своего среднего положения. На фиг. 9 показана другая форма этой зависимости, так называемая ступенчатая. Для успешной работы стабилизатора совершенно необходимо, чтобы максимальный момент M_{\max} при любых обстоятельствах движения объектов и гироскопического стабилизатора превышал соответствующий «дестабилизирующий» момент $M_{x'}^*$, M_y^* или \tilde{M}_z^* . Точно так же этот момент должен с избытком превышать произведение

$$(\omega_z)_{\max} H \quad (37)$$

где $(\omega_z)_{\max}$ — максимальное значение угловой скорости поворота плат-

формы II вокруг оси z , обусловленное движением объекта с разворотом (циркуляцией). В противном случае оси собственного вращения гироскопов I и II при вращении платформы будут от нее отставать, и углы γ_1 и γ_2 начнут неограниченно увеличиваться.

Выше были выяснены условия, при соблюдении которых тело T оказывалось стабилизированным относительно направлений на неподвижные звезды. Они сводились к тому, что сумма моментов сил, действующих на каждую из механических систем: кожух — ротор относительно оси соответствующего кожуха, должна быть равна нулю. Это может быть осуществлено лишь при полном устранении моментов трения в подшипниках оси кожуха и при точном расположении центра тяжести системы кожух — ротор на оси кожуха.

В ряде случаев требуется, чтобы тело T было стабилизировано относительно системы координат, связанной с вертикалью места и странами света, именуемой географической системой координат; оси этой системы обычно направляются соответственно на Восток, на Север и в Зенит. При неподвижном основании угловая скорость тела T должна быть при этом равна угловой скорости Земли. Если же основание перемещается, то угловая скорость тела T должна быть равна сумме угловой скорости Земли и угловой скорости относительного движения географической системы координат относительно Земли.

В соответствии с тремя последними уравнениями (23) к осям кожухов гироскопов I , II и III должны быть приложены соответствующие моменты $M_{z_1}^I$, $M_{z_2}^{II}$ и $M_{\tilde{y}}^{III}$, вызывающие необходимую прецессию гироскопов и как следствие необходимую угловую скорость тела T . Один из приемов образования моментов $M_{z_1}^I$, $M_{z_2}^{II}$ описан в примечании к стр. 373. Техническое осуществление этой задачи при подвижном основании встречает большие трудности.

Поступила 14 II 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. и Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических его применений. Л., 1932.
2. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. ИЛ, М., 1952.
3. Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем. АН УССР, Киев, 1952.