

Обозначим через $\Phi [y_1]$ левую часть уравнения (1.3). Пусть в области D найдены функции y_{0-} и y_{0+} , причем

$$y_{0-}(x_0) = y_{0+}(x_0) = y_{10}, \quad \Phi [y_{0-}] \leq 0 \leq \Phi [y_{0+}] \quad (x \geq x_0) \quad (1.4)$$

Введем Δy_- и Δy_+ посредством равенств

$$y_1 = y_{0-} - \Delta y_-, \quad y_1 = y_{0+} - \Delta y_+ \quad (1.5)$$

Тогда из (1.3) получим уравнения

$$\frac{d(\Delta y_-)}{dx} + F[y_1] - F[y_{0-}] - \Phi[y_{0-}] = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{d(\Delta y_+)}{dx} + F[y_1] - F[y_{0+}] - \Phi[y_{0+}] = 0$$

Рассмотрим разность $F[y_1] - F[y_{0-}]$. Конечное приращение функционального оператора можно представить в виде ряда его вариаций с надлежащими множителями. Например, ограничиваясь двумя членами ряда, можно написать

$$F[y_1] - F[y_{0-}] = \delta F y_{0-} y_{0+} + \frac{1}{2} \delta^2 F y_0 y_{0-} \quad (1.7)$$

Здесь

$$\delta F y_{0-} y_{0+} = - \frac{d}{d\varepsilon} F [y_{0-} + \varepsilon (y_{0+} - y_{0-})] \Big|_{\varepsilon=0} \frac{\Delta y_-}{y_{0+} - y_{0-}}$$

$$\delta^2 F y_0 y_{0-} = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F [y_{0-} + \varepsilon (y_{0+} - y_{0-})] \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\Delta y_-}{y_{0+} - y_{0-}} \right)^2$$

Кроме того, разность $F[y_1] - F[y_{0+}]$ представим в виде

$$F[y_1] - F[y_{0+}] = - \frac{F[y_{0+}] - F[y_{0-}]}{y_{0+} - y_{0-}} \Delta y_+ - \beta \quad (1.8)$$

Пусть функции y_{0+} и y_{0-} , которые назовем опорными, уже настолько близки, что при всех y_0 из промежутка $[y_{0+}, y_{0-}]$ и любом $x \geq x_0$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} \delta^2 F y_0 y_{0-} = \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0 \quad (1.9)$$

Вставив приращения (1.7) и (1.8) в (1.6), перепишем их в виде

$$\frac{d(\Delta y_-)}{dx} - p_- \Delta y_- - \Phi [y_{0-}] = -\alpha, \quad \frac{d(\Delta y_+)}{dx} - p_+ \Delta y_+ - \Phi [y_{0+}] = \beta \quad (1.10)$$

где

$$p_- = \frac{d}{d\varepsilon} F [y_{0-} + \varepsilon (y_{0+} - y_{0-})] \Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{y_{0+} - y_{0-}}, \quad p_+ = \frac{F [y_{0+}] - F [y_{0-}]}{y_{0+} - y_{0-}}$$

Если в выражении (1.9) знак неравенств обратный, то нужно поменять ролями p_+ и p_- в (1.10).

Найдем обращающиеся в нуль при $x = x_0$ интегралы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d(\Delta y_{0-})}{dx} - p_- \Delta y_{0-} - \Phi [y_{0-}] = 0, \quad \frac{d(\Delta y_{0+})}{dx} - p_+ \Delta y_{0+} - \Phi [y_{0+}] = 0 \quad (1.11)$$

Они будут такими:

$$\begin{aligned}\Delta y_{0-} &= \exp\left(\int_{x_0}^x p_- dx\right) \int_{x_0}^x \Phi[y_{0-}] \exp\left(-\int_{x_0}^x p_- dx\right) dx \\ \Delta y_{0+} &= \exp\left(\int_{x_0}^x p_+ dx\right) \int_{x_0}^x \Phi[y_{0+}] \exp\left(-\int_{x_0}^x p_+ dx\right) dx\end{aligned}\quad (1.12)$$

Подстановка нуля вместо Δy_- и Δy_{0+} в левые части уравнений (1.11) дает результат, соответствующий неравенствам (1.4), из чего по теореме Чаплыгина [1] следует

$$\Delta y_{0-} \leq 0 \leq \Delta y_{0+} \quad (1.13)$$

Замена Δy_{0-} и Δy_{0+} в левых частях уравнений (1.11) на Δy_- и Δy_+ посредством (1.10) дает результат $-\alpha \leq 0$ и $\beta \geq 0$ соответственно, откуда по той же теореме следуют неравенства

$$\Delta y_- \leq \Delta y_{0-}, \quad \Delta y_+ \geq \Delta y_{0+} \quad (1.14)$$

Если новые приближения обозначить

$$y_{1-} = y_{0-} - \Delta y_{0-}, \quad y_{1+} = y_{0+} - \Delta y_{0+} \quad (1.15)$$

то из (1.5), (1.13) и (1.14) следуют неравенства

$$y_{0-} \leq y_{1-} \leq y_1 \leq y_{1+} \leq y_{0+}$$

Указанный метод итераций позволяет найти решение уравнения (1.3). Значения y_2, \dots, y_n определяются затем квадратурами.

Ориентируясь на решение в первом приближении, при практическом применении метода целесообразно выбирать одну из опорных функций в виде интеграла основного дифференциального уравнения системы (1.1), в котором правая часть возможно мало изменена:

$$\frac{dy_0^*}{dx} = f_1^*(x, y_0^*)$$

но так, чтобы его решение определялось аналитически. При выборе первой опорной функции следует принять во внимание главные факторы конкретной задачи.

В качестве другой опорной функции можно взять y_{0*} -функцию, определяемую в методе последовательных приближений:

$$y_{0*} = y_0 + \int_{x_0}^x F[y_{0*}] dx \quad (1.16)$$

Тогда вместо p_+ найдем p :

$$p = \frac{F[y_{0*}] - F[y_0^*]}{y_{0*} - y_0^*} \quad (1.17)$$

а первое приближение решения уравнения (1.3) в виде

$$y_{1*} = y_{0*} - \exp\left(\int_{x_0}^x p dx\right) \int_{x_0}^x \Phi[y_{0*}] \exp\left(-\int_{x_0}^x p dx\right) dx \quad (1.18)$$

где

$$\Phi [y_0^*] = \frac{dy_0^*}{dx} - F [y_0^*] \quad (1.19)$$

Приводимые ниже примеры (§§ 2 и 3) показывают, что уже первые приближения дают высокую степень точности.

§ 2. Обобщение задачи К. Э. Циолковского на случай криволинейного движения. Пусть тяжелая материальная точка, масса которой меняется по некоторому закону $M = M_0 f(t)$, брошена под углом θ_0 к горизонту со скоростью v_0 .

Допустим, что поле силы тяжести однородно, а земля плоская и неподвижна вместе с атмосферой. При движении на точку действуют силы тяжести G , сила сопротивления Q и сила R , обусловленная отделением и присоединением частиц. Пусть направление силы R совпадает с направлением касательной к траектории, а величина может зависеть от высоты подъема y , скорости полета v и времени движения t точки. Так что

$$G = M_0 g f(t), \quad Q = Q(y, v), \quad R = R(t, y, v)$$

суть известные функции. Для краткости обозначим

$$\frac{G}{M} = g, \quad \frac{Q}{M} = q(t, y, v), \quad \frac{R}{M} = r(t, y, v) \quad (2.1)$$

Уравнения движения [3] точки запишутся в виде

$$M\dot{v} = R - G \sin \theta - Q, \quad Mv\dot{\theta} = -G \cos \theta \quad (2.2)$$

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta \quad (2.3)$$

Заменяя переменную θ новой переменной φ посредством зависимости

$$\varphi = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.4)$$

и используя обозначения (2.1), приведем систему уравнений (2.2), (2.3) к виду

$$\begin{aligned} \dot{v} &= r(t, y, v) - g \operatorname{th} \varphi - q(t, y, v) \\ \dot{\varphi} &= -\frac{g}{v}, \quad \dot{x} = \frac{v}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad \dot{y} = v \operatorname{th} \varphi \end{aligned} \quad (2.5)$$

Интегрирование уравнений (2.5) будем осуществлять методом, изложенным в предыдущем параграфе. Из трех последних уравнений найдем

$$\varphi = \varphi_0 - g \int_{t_0}^t \frac{dt}{v}, \quad x = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{v}{\operatorname{ch} \varphi} dt, \quad y = y_0 + \int_{t_0}^t v \operatorname{th} \varphi dt \quad (2.6)$$

Если вставить y (2.6) в первое уравнение (2.5), а затем вставить туда найденное (2.6) значение $\varphi = \varphi[v]$, то получим для v функциональное уравнение вида (1.3):

$$\frac{dv}{dt} - F[v] = 0, \quad F[v] = r[v] - g \operatorname{th} \varphi[v] - q[v] \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай, когда $Q = 0$, $R = -VM_0 \dot{f}$, т. е. атмосфера отсутствует; V — относительная скорость отбрасываемых частиц [3]. Тогда система уравнений движения (2.5) и выражение (2.7) примут вид:

$$\dot{v} = -V \frac{\dot{f}}{f} - g \operatorname{th} \varphi, \quad \dot{\varphi} = -\frac{g}{v}, \quad \dot{x} = \frac{v}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad \dot{y} = v \operatorname{th} \varphi \quad (2.8)$$

$$F[v] = -V \frac{\dot{f}}{f} - g \operatorname{th} \varphi[v]$$

Выберем в качестве опорных функций интегралы уравнений

$$\dot{v}_- = -V \frac{\dot{f}}{f} - g \operatorname{th} \varphi_0, \quad \dot{v}_+ = -V \frac{\dot{f}}{f} - g \operatorname{th} \varphi_{k-} \quad \left(\varphi_{k-} = \varphi_0 - g \int_{t_0}^{t_k} \frac{dt}{v_-} \right)$$

где t_k — время в конце активного участка.

Так, выбранные опорные функции v_- и v_+ отвечают движениям точки по прямым, наклоненным к горизонту на угол θ_0 (начальный угол наклона вектора скорости) и на угол θ_k (угол, меньший угла наклона вектора скорости в конце активного участка) соответственно. Они определяются известными формулами К. Э. Циолковского [3]. Тогда

$$\Phi[v_-] = -g \{ \operatorname{th} \varphi_0 - \operatorname{th} \varphi[v_-] \} \leq 0,$$

$$\Phi[v_+] = g \{ \operatorname{th} [v_+] - \operatorname{th} \varphi_{k-} \} \geq 0$$

т. е. выполняются неравенства (1.4).

Условие (1.9) проверяется вычислением

$$\frac{d^2 F}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{2g^2}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \left\{ \int_{t_0}^t \frac{(v - v_-)^2}{v_-^3} dt + g \operatorname{th} \varphi_- \left(\int_{t_0}^t \frac{v - v_-}{v_-^2} dt \right)^2 \right\}$$

Первые приближения определяются формулами (1.15) и (1.12). Так

$$v_{1-} = v_- - \exp \left(\int_{t_0}^t p_- dt \right) \int_{t_0}^t \Phi[v_-] \exp \left(- \int_{t_0}^t p_- dt \right) dt$$

$$v_{1+} = v_+ - \exp \left(\int_{t_0}^t p_+ dt \right) \int_{t_0}^t \Phi[v_+] \exp \left(- \int_{t_0}^t p_+ dt \right) dt$$

где

$$p_- = - \frac{g^2}{(v_+ - v_-) \operatorname{ch}^2 \varphi[v_-]} \int_{t_0}^t \frac{v_+ - v_-}{v_-^2} dt$$

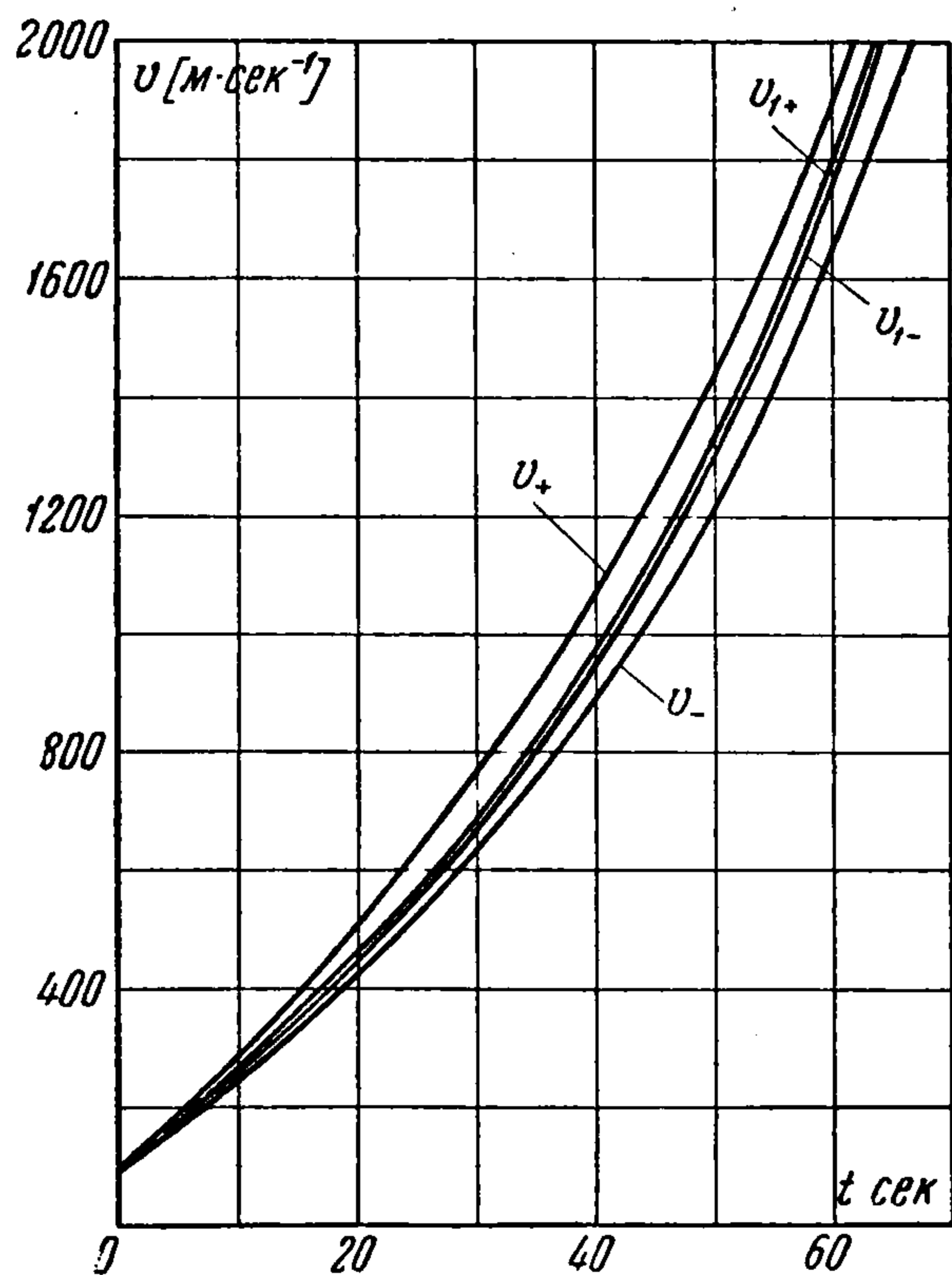
$$p_+ = - \frac{\operatorname{th} \varphi[v_+] - \operatorname{th} \varphi[v_-]}{(\operatorname{th} \varphi_0 - \operatorname{th} \varphi_{k-})(t - t_0)}$$

В качестве решения можно принять полусумму этих приближений: $v_* = \frac{1}{2}(v_{1+} + v_{1-})$, причем ошибка не превышает их полуразности $\gamma = \frac{1}{2}(v_{1+} - v_{1-})$. Затем φ , x и y определяются формулами (2.6).

Рассмотрим конкретный пример. Пусть масса точки меняется по линейному закону $f = 1 - \beta t$, а постоянные параметры и начальные условия таковы:

$$\beta = 0.01 \text{ сек}^{-1}, \quad V = 2290 \text{ м сек}^{-1},$$

$$t_0 = x_0 = y_0 = 0, \quad v_0 = 100 \text{ м сек}^{-1}, \quad \theta_0 = 75^\circ$$



Фиг. 1

Результаты вычислений приведены в табл. 1 и иллюстрируются графиком (Фиг. 1).

Как видно из табл. 1, уже полуразность первых приближений, верхнего и нижнего, не превосходит 0.2%.

Так как первые приближения сверху и снизу весьма близки, то при решении рассматриваемой задачи можно ограничиться первым приближением с одной стороны.

Таблица 1

t сек.	v_- м. сек ⁻¹	v_+ м. сек ⁻¹	v_{1-} м. сек ⁻¹	v_{1+} м. сек ⁻¹	v_* м. сек ⁻¹	γ м. сек ⁻¹	γ в %
0	100	100	100	100	100	0	0
5	170	192	171	171	171	0	0
10	246	290	250	250	250	0	0
15	332	398	341	341	341	0	0
20	423	511	438	438	438	0	0
30	632	764	666	666	666	0	0
40	891	1068	949	951	950	1	0.1
50	1214	1434	1301	1304	1303	2	0.2
60	1632	1896	1751	1759	1755	4	0.2
70	2207	2516	2361	2368	2365	4	0.2

Расчетные формулы (1.17) — (1.19) будут такими:

$$\begin{aligned}
 v_- &= v_0 - V \ln f - g \operatorname{th} \varphi_0 (t - t_0), & \varphi_- &= \varphi_0 - g \int_{t_0}^t \frac{dt}{v_-} \\
 v_+ &= v_0 - V \ln f - g \operatorname{th} \varphi_{k-} (t - t_0), & \varphi_+ &= \varphi_0 - g \int_{t_0}^t \frac{dt}{v_+} \\
 p &= - \frac{\operatorname{th} \varphi_+ - \operatorname{th} \varphi_-}{(\operatorname{th} \varphi_0 - \operatorname{th} \varphi_{k-}) (t - t_0)}, & \varphi_{k-} &= \varphi_-(t_k) \\
 v_* &= v_- - g \exp\left(\int_{t_0}^t p dt\right) \int_{t_0}^t (\operatorname{th} \varphi_- - \operatorname{th} \varphi_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t p dt\right) dt
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Формулы (2.9) еще оценивались посредством сравнения с точным решением уравнений (2.8), которое удается получить лишь для случая показательного закона расхода массы [4]. Вычисления показывают, что разница между приближенным и точным решениями в этом случае не превосходит 1%.

§ 3. Основная задача внешней баллистики снаряда. Известные аналитические решения этой задачи сопровождались упрощениями либо в характере закона сопротивления или в гипотезах о строении атмосферы, либо в характере движения снаряда [5]. Решение задачи при общих условиях в работе К. Попова [6] найдено в виде рядов по степеням искусственно введенного параметра. При этом допускалось, что плотность атмосферы аппроксимируется показательной или рациональной функцией высоты. В. С. Пугачев предложил решение, полученное методом Пуанкаре в виде рядов по степеням баллистического коэффициента.

Покажем, как найти аналитическое решение задачи о движении центра массы снаряда при общей постановке¹, пользуясь изложенным выше способом.

¹ Как обычно, допустим, что земля плоская и неподвижная вместе с атмосферой, а поле силы тяжести однородно.

Если спроектировать векторное уравнение движения центра масс снаряда (при нулевом угле атаки) на горизонтальное направление и на направление нормали к траектории, то получим

$$\ddot{x} = -q \cos \theta, \quad v\dot{\theta} = -g \cos \theta \quad (3.1)$$

где $q = q(y, v)$ — ускорение силы сопротивления воздуха.

Присоединив два кинематических уравнения

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta \quad (3.2)$$

заменяем переменные x и θ на новые переменные w и φ посредством зависимостей

$$w = g \ln \dot{x}, \quad \varphi = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.3)$$

и перейдем в уравнениях (3.1) и (3.2) к аргументу φ . Тогда получим уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\varphi} = q, \quad v = \exp\left(\frac{w}{g}\right) \operatorname{ch} \varphi, \quad \frac{dt}{d\varphi} = -\frac{v}{g} \\ \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{v^2}{g \operatorname{ch} \varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{v^2}{g} \operatorname{th} \varphi \end{aligned} \quad (3.4)$$

При $q = kv^2$ первые два соотношения из (3.4) дают уравнение

$$\frac{dw}{d\varphi} = k \exp\left(\frac{2w}{g}\right) \operatorname{ch}^2 \varphi \quad (3.5)$$

с разделяющимися переменными. Интегрирование [7] этого уравнения приводит к формуле, определяющей скорость точки:

$$v = \operatorname{ch} \varphi \left\{ \frac{\operatorname{ch}^2 \varphi_0}{v_0^2} + \frac{k}{g} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi_0 + \varphi_0 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi - \varphi \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Время движения и координаты точки x и y определяются из трех последних уравнений (3.4):

$$t = t_0 - \frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v d\varphi \quad x = x_0 - \frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v^2}{\operatorname{ch} \varphi} d\varphi, \quad y = y_0 - \frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2 \operatorname{th} \varphi d\varphi \quad (3.7)$$

Решение (3.6) и (3.7) при подходящем выборе коэффициента k , например при

$$k = cH(y_{\text{ср}}) \cdot 4.74 \cdot 10^{-4} c_{x_0 \text{ ср}} \quad (3.8)$$

где

$$y_{\text{ср}} = \frac{2}{3} \frac{v_0^2 \operatorname{th}^2 \varphi_0}{2g}, \quad c_{x_0 \text{ ср}} = \frac{1}{2} (\min c_{x_0} + \max c_{x_0}) \quad (3.9)$$

дает опорную функцию для решения задачи о движении снаряда в неоднородной атмосфере.

В общем случае ускорение силы сопротивления воздуха выражается так:

$$q(y, v) = cH_{\tau}(y) vG(\lambda v) \quad (3.10)$$

Тогда из последнего равенства (3.7) и первых двух (3.4) следует функциональное уравнение вида (1.3):

$$\frac{dw}{d\varphi} - F[w] = 0$$

где

$$F[w] = cH_\tau[v]vG[v], \quad v = \exp\left(\frac{w}{g}\right) \operatorname{ch} \varphi, \quad H_\tau[v] = H_\tau(y), \quad G[v] = G(\lambda v) \quad (3.11)$$

Найдем аналитическое решение основной задачи внешней баллистики в виде приближения (1.18), выбрав в качестве опорной функции

$$w^* = g \ln \frac{v^*}{\operatorname{ch} \varphi}$$

причем v^* определено формулами (3.6) и (3.8).

Тогда расчетные формулы (1.17) — (1.19) будут иметь вид:

$$v^* = \operatorname{ch} \varphi \left\{ \frac{\operatorname{ch}^2 \varphi_0}{v_0^2} + \frac{k}{g} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi_0 + \varphi_0 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi - \varphi \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$y^* = y_0 - \frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^{*2} \operatorname{th} \varphi d\varphi \quad (3.12)$$

$$q^* = cH_\tau(y^*)v^*G(\lambda(y^*)v^*), \quad p = \frac{q^*}{g} n(\lambda(y^*)v^*)$$

$$v = v^* \exp \left\{ \frac{1}{g} \exp \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} p d\varphi \right) \int_{\varphi_0}^{\varphi} (q^* - kv^{*2}) \exp \left(- \int_{\varphi_0}^{\varphi} p d\varphi \right) d\varphi \right\}$$

Величина p определяется следующим образом. Так как

$$\frac{F[w^*] - F[w_*]}{w^* - w_*} = \frac{c\{H(y^*)F(v^*, a^*) - H(y_*)F(v_*, a_*)\}}{g(\ln v^* - \ln v_*)}$$

то

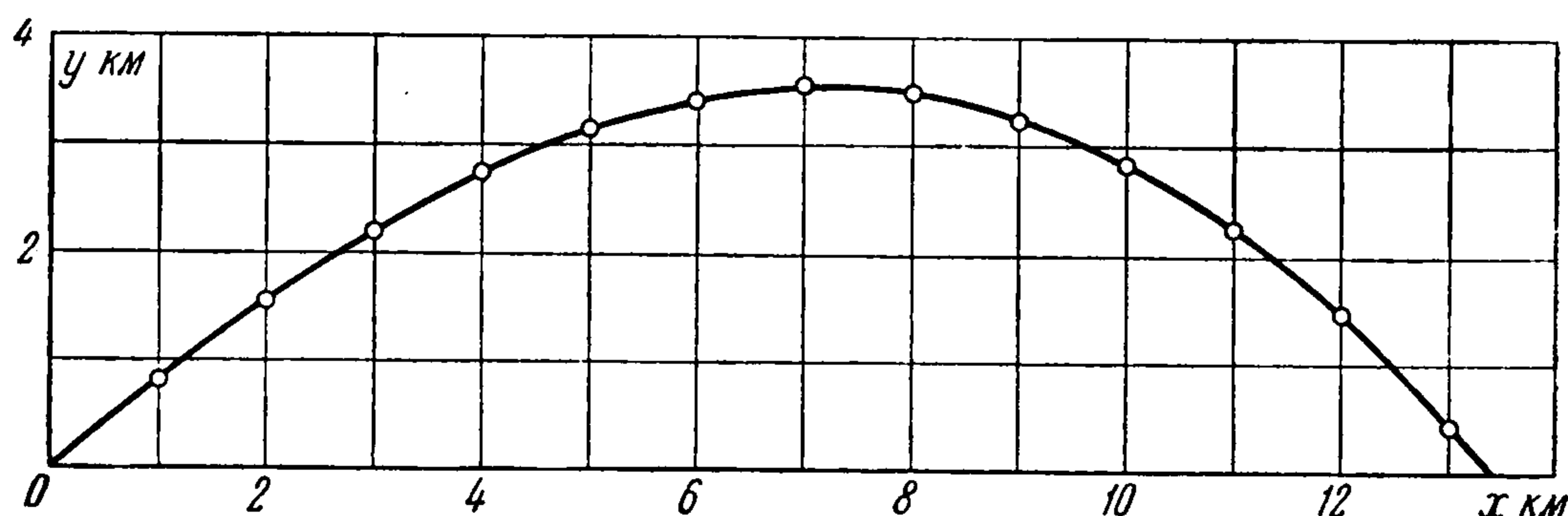
$$p = \lim_{v_* \rightarrow v^*} \frac{c}{g} H(y^*) \frac{F(v^*, a^*) - F(v_*, a_*)}{\ln v^* - \ln v_*} = \frac{c}{g} H(y^*) \frac{dF(v^*, a^*)}{d \ln v^*} =$$

$$= \frac{n(v^*, a^*)}{g} cH(y^*)F(v^*, a^*) = \frac{n(\lambda(y^*)v^*)}{g} cH_\tau(y^*)v^*G(\lambda(y^*)v^*)$$

где $n(v, a)$ — показатель сопротивления воздуха;

$$n(v, a) = \frac{d \ln F(v, a)}{d \ln v}$$

представляет собой известную баллистическую функцию.



Фиг. 2

Рассмотрим конкретный пример. Пусть

$$v_0 = 562 \text{ м сек}^{-1}, \quad \theta_0 = 40^\circ, \quad c = 0.366, \quad t_0 = x_0 = y_0 = 0$$

Траектория снаряда, вычисленная предлагаемым методом (3.12) и (3.7), показана на фиг. 2 (табл. 2), где для сравнения кружочками приведены также результаты вычисления траектории, полученные методом численного интегрирования.

Таблица 2

Аналитическое решение

φ_m	x_m	y_m	φ_m	x_m	y_m	φ_m	x_m	y_m
0.763	0	0	0.463	3970	2744	-0.187	8320	3425
0.713	1050	856	0.413	4380	2920	-0.387	9480	3110
0.663	1850	1456	0.313	5130	3190	-0.587	10600	2520
0.613	2500	1890	0.263	5490	3310	-0.787	11790	1655
0.563	3050	2240	0.213	5830	3400	-0.987	12950	468
0.513	3530	2515	0.013	7130	3550	-1.187	14080	-1010

Численное решение

x_m	y_m	x_m	y_m	x_m	y_m	x_m	y_m
0	0	3500	2479	7000	3525	10500	2585
500	412	4000	2733	7500	3523	11000	2261
1000	809	4500	2955	8000	3479	11500	1883
1500	1189	5000	3143	8500	3392	12000	1450
2000	1548	5500	3295	9000	3260	12500	959
2500	1884	6000	3410	9500	3083	13000	405
3000	2195	6500	3487	10000	2859		

Как показывают вычисления, разница в определении элементов траектории составляет менее 1%. Таким образом, аналитическое решение задачи дает результат, практически совпадающий с результатом, получаемым методом численного интегрирования уравнений внешней баллистики снаряда.

Поступила 12 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1950.
2. Воробьев Л. М. Применимость метода приближенного интегрирования С. А. Чаплыгина к некоторому классу обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Успехи математических наук, т. XI, вып. 1, 1956.
3. Космодемьянский А. А. Лекции по механике тел переменной массы. Уч. зап. МГУ, т. IV, вып. 1, 54, 1951.
4. Moyal J. E. Rocket Motion in a Gravitational Field. Journal of the British Interplanetary Society, vol. 7, No. 3, 1948.
5. Окунев Б. Н. Основы баллистики. Воениздат, 1943.
6. Poff Kyrill. Die Hauptprobleme der äusseren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik. Leipzig, 1954.
7. Некрасов А. И. Курс теоретической механики, т. II, Гостехиздат, 1953.