Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ

Б. С. Разумихин

(Москва)

1. Некоторые определения[1]. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $p_{ij}(t)$ — известные непрерывные ограниченные функции времени.

Пусть n^2 чисел $p_{ij}(i, j = 1, \ldots, n)$ являются координатами точки n^2-мерного пространства P. Линию, заданную в пространстве P параметрически уравнениями $p_{ij} = p_{ij}(t)$, будем называть коэффициентной линией системы линейных дифференциальных уравнений (1.1).

Пусть $V(t;\ x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная функция[1]. Ее производная по времени в силу системы (1.1)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{1.2}$$

является известной функцией времени и коэффициентов системы (1.1). Введем понятие области $L(V)$ следующим образом.

Областью $L(V)$, отвечающей данной знакоопределенной функции V, называется множество точек n^2-мерного пространства коэффициентов P, в каждой из которых для всякого $t > t_0$ производная dV/dt является функцией знакопостоянной противоположного с V знака.

Очевидно, из теоремы Ляпунова об устойчивости [1] следует, что невозмущенное движение устойчиво, если существует знакоопределенная функция, которой отвечает область $L(V)$, содержащая коэффициентную линию системы уравнений возмущенного движения. При этом функция V будет функцией Ляпунова рассматриваемой системы.

2. Функции Ляпунова в виде квадратичных форм с постоянными коэффициентами. Пусть

$$V = \sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \quad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji})$$

— определенно-положительная квадратичная форма с постоянными коэф-

---

[1] В статье содержатся некоторые результаты кандидатской диссертации автора, защищенной в 1952 г. в Институте механики АН СССР.

фициентами. Ее производная по времени в силу системы (1.1) будет, очевидно, также квадратичной формой:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_i x_j \qquad (2.1)$$

где a_{ij} — функции времени, определяемые равенствами

$$a_{ij}(t) = \sum_{s=1}^{n} (\alpha_{is} p_{sj}(t) + \alpha_{js} p_{si}(t)) \qquad (i;\ j = 1, \ldots, n) \qquad (2.2)$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Условиями, определяющими область $L(V)$, будут в данном случае известные условия отрицательности квадратичных форм Сильвестера:

$$(-1)^S \det_S |a_{ij}| \geqslant 0 \qquad (s = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, n) \qquad (2.3)$$

Назовем областью Рауса — Гурвица множество точек n^2-мерного пространства P, в которых выполнены условия теоремы Рауса — Гурвица для полинома

$$\Delta(\lambda) = \det|p_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

Справедливо предложение: область $L(V)$, отвечающая любой знакоопределенной квадратичной форме, заключена внутри области Рауса-Гурвица.

Действительно, предложение справедливо, так как в противном случае было бы возможно построить систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, не удовлетворяющими условиям Рауса — Гурвица, но устойчивую в силу теоремы Ляпунова об устойчивости. Противоречие доказывает предложение. Легко убедиться также, что всякой знакоопределенной квадратичной форме V отвечает не пустая область $L(V)$. Действительно, полагая $p_{ij} = -\alpha_{ij}$, получим

$$\frac{dV}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j\Big) = -2\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\Big)^2$$

т. е. точка пространства P с координатами $p_{ij} = -\alpha_{ij}$ принадлежит области $L(V)$, а следовательно, в силу непрерывности области $L(V)$ принадлежит и некоторая ее окрестность.

Покажем далее, что область $L(V)$ ограничена поверхностью n^2-мерного конуса.

Действительно, если точка с координатами $p_{ij} = p_{ij}^\circ$ принадлежит области $L(V)$, то и любая точка полупрямой, выходящей из начала координат и проходящей через точку $\{p_{ij}^\circ\}$, также принадлежит области $L(V)$. Указанная полупрямая определяется в параметрической форме уравнениями

$$p_{ij} = k p_{ij}^\circ \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

где k — положительный параметр. Очевидно, в силу (2.1) и (2.2)

$$\frac{dV}{dt}(x_s,\ p_{kl}) = k\frac{dV}{dt}(x_s,\ p_{kl}^\circ)$$

т. е. при всяком $k > 0$ точка $\{p_{ij}\}$ принадлежит области $L(V)$.

3. Уравнение и свойства поверхности, ограничивающей область $L(V)$. Пусть V — определенно-положительная квадратичная форма с постоянными коэффициентами и $p_{ij} = p_{ij}(\tau)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторая линия в пространстве P. Пусть далее при $\tau = \tau_0$ точка

$$p_{ij}^{\circ} = p_{ij}(\tau_0)$$

принадлежит области $L(V)$.

Докажем предложение: если при $\tau = \tau_0$ $(p_{ij}^{\circ} = p_{ij}(\tau_0))$ коэффициенты квадратичной формы dV/dt удовлетворяют условиям Сильвестра (2.3), то при непрерывном изменении параметра τ от значения τ_0 первым может быть нарушено только последнее из условий Сильвестра (2.3).

Справедливость этого предложения следует из того, что если в ряду главных диагональных миноров $D_1, \ldots, D_n$ дискриминанта квадратичной формы обращается в нуль минор $D_k (n > k > 1)$, то значения миноров D_{k-1} и D_{k+1} противоположны по знаку [3].

Следовательно, точки, принадлежащие границе области $L(V)$, удовлетворяют уравнению

$$D_n = \det_n \| a_{ij} \| = 0 \tag{3.1}$$

где a_{ij} определяются уравнениями (2.2).

Рассмотрим определитель D_n как функцию коэффициентов k-го уравнения системы (1.1) $p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{kn}$.

На основании (2.2) можно написать

$$a_{ij} = \alpha_{ik} p_{kj} + \alpha_{jk} p_{ki} + A_{ij}^{(k)} \tag{3.2}$$

$$A_{ij}^{(k)} = \sum_{s \neq k}^{n} (\alpha_{is} p_{sj} + \alpha_{js} p_{si}) \tag{3.3}$$

Представляя определитель (3.1) в виде суммы определителей, элементами которых будут слагаемые элементов определителя (3.1), заметим, что определители, в которых два или более столбцов состоят из элементов, являющихся первыми или вторыми слагаемыми элементов определителя (3.1),равны нулю как определители с двумя или более пропорциональными столбцами.

Итак, определитель (3.1) может быть представлен в виде суммы определителей следующих четырех видов.

1. Определители, содержащие два столбца с элементами, имеющими p_{ks} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ в качестве множителей, при этом если один столбец состоит из элементов, являющихся первыми слагаемыми соответствующих элементов определителя (3.1), то второй столбец должен состоять из вторых слагаемых соответствующих элементов определителя (3.1).

2. Определители, содержащие один столбец, состоящий из первых слагаемых соответствующих элементов (3.2).

3. Определители, содержащие один столбец, состоящий из вторых слагаемых соответствующих элементов (3.2).

4. Определитель $\det | A_{ij}^{(k)} |$. Обозначим суммы определителей указанных видов соответственно S_1, S_2, S_3, S_4:

$$D_n = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \tag{3.4}$$

Легко видеть, что

$$S_1 = \sum_{s;\ r\ s\neq r}^{n} \det_n \| (1-\delta_{js}-\delta_{jr}) A_{ij}^{(k)} + \delta_{js}\alpha_{ik}p_{kj} + \delta_{jk}\alpha_{jk}p_{ki} | \tag{3.5}$$

$$S_2 = \sum_{s=1}^{n} \det_n \| (1-\delta_{js}) A_{ij}^{(k)} + \delta_{js}\alpha_{ik}p_{kj} \| \tag{3.6}$$

$$S_3 = \sum_{s=1}^{n} \det_n \| (1-\delta_{js}) A_{ij}^{(k)} + \delta_{js}\alpha_{jk}p_{ki} \| \tag{3.7}$$

$$S_4 = \det_n | A_{ij}^{(k)} \| \tag{3.8}$$

где

$$\delta_{sr} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = r \\ 0 & \text{при } s \neq r \end{cases} \tag{3.9}$$

Вынося общие множители элементов s-го и r-го столбцов, слагаемых определителей суммы S_1 и общий множитель s-го столбца, слагаемых определителей суммы S_2 и S_3, получим

$$S_1 = \sum_{s=1}^{n} p_{ks} \sum_{r=1\ r\neq s}^{n} \alpha_{rk} \det_n | (1+\delta_{js}+\delta_{jr}) A_{ij}^{(k)} + \delta_{js}\alpha_{ik} + \delta_{jr}p_{ki} |$$

$$S_2 = \sum_{s=1}^{n} p_{ks} \det_n | (1-\delta_{js}) A_{ij}^{(k)} + \delta_{js}\alpha_{ik} |$$

Сумма S_1 может быть записана в виде определителя $n+2$-го порядка:

$$S_1 = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & p_{k1} \cdots p_{kn} \\ 0 & 0 & \alpha_{k1} \cdots \alpha_{kn} \\ p_{k1} & \alpha_{k1} & \\ \cdots & \cdots & \boxed{|A_{ij}^{(k)}|} \\ p_{kn} & \alpha_{kn} & \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

Суммы S_2 и S_3 могут быть записаны в виде определителей $n+1$-го порядка:

$$S_2 = -\begin{vmatrix} 0 & p_{k1} \cdots p_{kn} \\ \alpha_{k1} & \\ \vdots & \boxed{|A_{ij}^{(k)}|} \\ \alpha_{kn} & \end{vmatrix} \qquad S_3 = -\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{k1} \cdots \alpha_{kn} \\ p_{k1} & \\ \vdots & \boxed{|A_{ij}^{(k)}|} \\ p_{kn} & \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

Очевидно, $S_2 \equiv S_3$. Выражение для определителя $D_n = S_1+S_2+S_3+S_4$ получим, заменяя в определителе S_1 нули, стоящие вне главной диагонали, единицами с минусом:

$$D_n = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & p_{k1} \cdots p_{kn} \\ -1 & 0 & \alpha_{k1} \cdots \alpha_{kn} \\ p_{k1} & \alpha_{k1} & \\ p_{kn} & \alpha_{kn} & \boxed{|A_{ij}^{(k)}|} \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Выясним, что представляет собой поверхность $D_n = 0$ в n-мерном пространстве коэффициентов $p_{k1}, \ldots, p_{kn}$ k-го уравнения.

Очевидно, уравнение $D_n = 0$ является уравнением поверхности второго порядка. Докажем теперь теорему.

Теорема. Область $L(V)$, отвечающая определенно-положительной квадратичной форме

$$V = \sum_{i;j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

в n-мерном пространстве коэффициентов любого из уравнений возмущенного движения, является эллиптическим параболоидом с компонентами вектора асимптотического направления, пропорциональными значениям соответствующих коэффициентов квадратичной формы V.

Доказательство. Определитель D_n может быть представлен как многочлен второй степени:

$$D_n = \sum_{ij=1}^{n} H_{ij} p_{ki} p_{kj} + 2 \sum_{i=1}^{n} H_i p_{ki} + H \tag{3.13}$$

где, очевидно,

$$\sum_{ij=1}^{n} H_{ij} p_{ki} p_{kj} \equiv S_1, \qquad \sum_{i=1}^{n} H_i p_{ki} \equiv S_2 \equiv S_3, \qquad H = S_4 \tag{3.14}$$

Условием того, что $D_n = 0$ параболоид, является равенство нулю дискриминанта квадратичной формы:

$$\sum_{ij=1}^{N} H_{ij} p_{ki} p_{kj} \quad \text{или} \ \det \| H_{ij} \| = 0 \tag{3.15}$$

Очевидно, коэффициент H_{ij} получится из определителя

$$S = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{k1} \ldots \alpha_{kn} \\ \alpha_{k1} & \\ \alpha_{kn} & \boxed{\,| A_{ij}^{(k)} |\,} \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

вычеркиванием $i+1$-й строки и $j+1$-го столбца:

$$H_{ij} = (-1)^{i+j} S_{ij} \tag{3.17}$$

где S_{ij} — минор, отвечающий элементу $A_{ij}^{(k)}$ определителя (3.16). Покажем, что справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{n} H_{ij} \alpha_{kj} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.18}$$

Действительно, это следует из того, что левая часть каждого из этих равенств представляет собой определитель с двумя равными строками, но α_{kj} $(j = 1, \ldots, n)$ не все равны нулю в силу знакоопределенности квадратичной формы V, следовательно, должно быть выполнено условие

$$\det \| H_{ij} \| = 0 \tag{3.19}$$

т. е. область $L(V)$ — параболоид. Компоненты $k_1 k_2 \ldots k_n$ асимптотического направления поверхности второго порядка удовлетворяют известному уравнению

$$\sum_{ij=1}^{n} H_{ij} k_i k_j = 0 \tag{3.20}$$

Очевидно, величины $\alpha_{k1} \alpha_{k2} \ldots \alpha_{kn}$ удовлетворяют этому уравнению.

Действительно,

$$\sum_{ij=1}^{n} H_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\sum_{j=1}^{n} H_{ij}\alpha_{kj} = 0$$

в силу (3.18).

Таким образом, $D_n = 0$ является уравнением параболоида с компонентами асимптотического направления пропорциональными величинам $\alpha_{k1}\alpha_{k2}\ldots\alpha_{kn}$, т. е. теорема доказана.

Преобразования, которые позволили привести определитель D_n к виду (3.12), можно применить к определителю $\det_n \| A_{ij}^{(k)} \|$. Действительно, элементы $A_{ij}^{(k)}$ можно представить в виде

$$A_{ij}^{(k)} = \alpha_{il}p_{lj} + \alpha_{jl}p_{li} + A_{ij}^{(kl)}, \quad A_{ij}^{(kl)} = \sum_{\substack{s \neq k \\ s \neq l}}^{n} (\alpha_{is}p_{sj} + \alpha_{js}p_{si}) \tag{3.21}$$

Таким образом, элементы $A_{ij}^{(k)}$ представлены в виде, антлогичном (3.12). При этом, очевидно, определитель D_n можно представить в виде

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & p_{k1} & \ldots & p_{kn} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p_{l1} & \ldots & p_{ln} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \alpha_{l1} & \ldots & \alpha_{ln} \\ p_{k1} & \alpha_{k1} & p_{l1} & \alpha_{l1} & A_{11}^{(kl)} & \ldots & A_{m}^{(kl)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{kn} & \alpha_{kn} & p_{ln} & \alpha_{ln} & A_{n1}^{(kl)} & \ldots & A_{nn}^{(kl)} \end{vmatrix}. \tag{3.22}$$

Аналогичные преобразования можно проводить до тех пор, пока верхние индексы k, l не исчерпают все значения от 1 до n. При этом все $A_{ij}^{(k,\, l, \ldots)}$ обратятся в нули и определитель получит окончательно следующую форму:

$$D_n = (-1)^n \times \tag{3.23}$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \ldots & 0 & 0 & p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 0 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \\ p_{11} & \alpha_{11} & p_{21} & \alpha_{21} \ldots & p_{n1} & \alpha_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_{12} & \alpha_{12} & p_{22} & \alpha_{22} \ldots & p_{n2} & \alpha_{n2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{m} & \alpha_{1n} & p_{2n} & \alpha_{2n} \ldots & p_{nn} & \alpha_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Определим координаты точек касания параболоида (3.12) с плоскостями, параллельными координатным (в n-мерном пространстве коэффициентов k-го уравнения $p_{k1}p_{k2}\ldots p_{kn}$).

Положим в определителе D_n

$$p_{ki} = p_{ki}^{(s)} = -\frac{A_{si}^{(k)}}{\alpha_{ks}} + \nu_s\alpha_{ki}. \tag{3.24}$$

При этом элементы первой строки определителя D_n (3.12), начиная со второго, будут равны линейным комбинациям соответствующих элементов $S+2$-й и второй строк.

Используя произвол множителя ν_s, определим его из условия

$$\frac{p_{ks}^{(s)}}{\alpha_{ks}} + \nu_s = 0 \tag{3.25}$$

но согласно (3.24)

$$p_{ks}^{(s)} = -\frac{A_{ss}^{(k)}}{\alpha_{ks}} + \nu_s \alpha_{ks} \tag{3.26}$$

Подставляя в (3.25), получим

$$\frac{A_{ss}^{(k)}}{\alpha_{ks}^2} - 2\nu_s = 0, \qquad \text{или} \qquad \nu_s = \frac{A_{ss}^{(k)}}{2\alpha_{ks}^2} \tag{3.27}$$

Подставляя полученное для ν_s выражение в (3.24), получим

$$p_{ki}^{(s)} = \frac{1}{\alpha_{ks}} \left(\frac{A_{ss}^{(k)}}{2} \frac{\alpha_{ki}}{\alpha_{ks}} - A_{si}^{(k)} \right) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.28}$$

При этих значениях $p_{k1}, \ldots, p_{kn}$ [отвечающих произвольному фиксированному значению $s\,(s = 1, \ldots, n)$] определитель D_n равен нулю.

Таким образом, получены n точек, $P_1, \ldots, P_n$, принадлежащих границе области $L(V)$. Вычислим значения производных $\partial D_n / \partial p_{ki}$ в точках $P_1, \ldots, P_n$. Имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial D_n}{\partial p_{ki}} = (-1)^i \begin{vmatrix} -1 & p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kn} \\ 0 & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \alpha_{k1} & A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \cdots & A_{1n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{ki-1} & A_{i-1,1} & A_{i-1,2} & \cdots & A_{i-1,n} \\ \alpha_{ki+1} & A_{i+1,1} & A_{i+1,2} & \cdots & A_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{kn} & A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.29}$$

Очевидно, в силу (3.25) в точке P_s обращаются в нуль все частные производные, за исключением $\partial D_n / \partial p_{ks}$, т. е.

$$\left.\frac{\partial D_n}{\partial p_{ki}}\right|_{p_{ki}=p_{ki}^{(s)}} \begin{cases} = 0 & (i \neq s) \\ \neq 0 & (i = s) \end{cases} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Это означает, что параболоид $D_n = 0$ в точке P_s касается плоскости $p_{ks} = p_{ks}^{(s)}$, параллельной координатной плоскости $p_{ks} = 0$ в точке с координатами $p_{k_1}^{(s)} p_{k2}^{(s)} \ldots p_{kn}^{s}$, определяемыми равенствами (3.28).

4. Случай одного уравнения n-го порядка. Уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + A_1(t)\, y^{(n-1)} + A_2(t)\, y^{(n-2)} + \ldots + A_n(t)\, y = 0 \tag{4.1}$$

может быть записано в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_{11}(t)\, x_1 + p_{12}(t)\, x_2 + \ldots + p_{1n}(t)\, x_n && (p_{1s}(t) = -A_s(t)) \\ \dot{x}_2 &= x_1, \ldots, \quad \dot{x}_n = x_{n-1} && (x_s = y^{(n-s)}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

В этом случае, рассматривая область $L(V)$ как область n-мерного пространства коэффициентов $p_{11}p_{12}\ldots p_{1n}$, будем иметь

$$A_{ij}^{(1)} = \sum_{s=2}^{n}(\alpha_{is}p_{sj} + \alpha_{js}p_{si}) = \begin{cases} \alpha_{ij+1} + \alpha_{ji+1} & (i<n,\ j<n) \\ \alpha_{ij+1} & (i=n,\ j<n) \\ \alpha_{ji+1} & (i<n,\ j=n) \\ 0 & (i=n,\ j=n) \end{cases} \tag{4.3}$$

и уравнение границы области $L(V)$ имеет вид:

$$D_n = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & p_{11}\ldots p_{1n} \\ -1 & 0 & \alpha_{11}\quad \alpha_{1n} \\ p_{11} & \alpha_{11} & \\ & & |A_{ij}^{(1)}| \\ p_{1n} & \alpha_{1n} & \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) представляет в пространстве коэффициентов $p_{11},\ldots p_{1n}$ эллиптический параболоид с компонентами вектора асимптотического направления, пропорциональными величинам $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n}$ и касающийся координатных плоскостей в точках с координатами [см. (3.28) и (4.3)]

$$p_{1i}^{(s)} = \frac{1}{\alpha_{1s}}\left(\alpha_{s,s+1}\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1s}} - \alpha_{s,\,i+1} - \alpha_{is+1}\right) \tag{4.5}$$

Формулы (4.5) показывают, что область $L(V)$ в рассматриваемом случае касается координатной плоскости $p_{1n} = 0$ в точке

$$p_{11}^{(n)} = -\frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}}, \quad p_{12}^{(n)} = -\frac{\alpha_{3n}}{\alpha_{1n}}, \ldots, p_{1n-1}^{(n)} = -\frac{\alpha_{nn}}{\alpha_{1n}}, \quad p_{1n}^{(n)} = 0 \tag{4.6}$$

Полученные простые зависимости координат точек касания области $L(V)$ с плоскостями, параллельными координатным плоскостям пространства коэффициентов $p_{11}\ldots p_{1n}$, могут существенно упростить нахождение функции Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянными коэффициентами в конкретных случаях.

В рассматриваемом случае, очевидно, не всякой определенно-положительной квадратичной форме V отвечает не пустая в пространстве коэффициентов $p_{11}\ldots p_{1n}$ область $L(V)$.

Выясним дополнительные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты α_{ij} квадратичной формы V, при которых существует область $L(V)$.

Определителями Сильвестра для квадратичной формы dV/dt будут, очевидно, следующие определители:

$$D_r = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & p_{11}\ldots p_{1r} \\ -1 & 0 & \alpha_{11}\ldots\alpha_{1r} \\ p_{11} & \alpha_{11} & \\ \cdots & \cdots & |A_{ij}^{(1)}|_r \\ \cdots & \cdots & \\ p_{1r} & \alpha_{1r} & \end{vmatrix} \qquad (r=1,\ldots,n) \tag{4.7}$$

где $|A_{ij}|_r$ — главный диагональный минор r-го порядка определителя $|A_{ij}^{(1)}|$; $A_{ij}^{(1)}$ определяются выражениями (4.3).

Для существования области $L(V)$ достаточно существование одной точки, в которой выполнены неравенства Сильвестра

$$(-1)^r D_r > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

Рассмотрим значения определителей Сильвестра в точке касания поверхности $D_n = 0$ с плоскостью $p_{1n} = 0$. Координаты этой точки определяются выражениями (4.6).

Если область $L(V)$ существует, то в этой точке должны выполняться неравенства

$$(-1)^r D_r |_{p_{1i}=p_{1i}^{(n)}} > 0 \quad (r = 1, \ldots, n-1), \qquad (-1)^n \frac{\partial D_n}{\partial p_{1n}}\bigg|_{p_{1i}=p_{1i}^{(n)}} < 0 \tag{4.8}$$

Последнее неравенство должно быть справедливо в силу того, что область $L(V)$ принадлежит области Рауса — Гурвица, для которой $p_{1n} < 0$.

Подставляя значения $p_{1i}^{(n)}$ из (4.5) в (4.8), получим после элементарных преобразований искомые условия:

$$(-1)^{r+1} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \ldots \alpha_{r+1,1} \\ \alpha_{1n} & 0 & \alpha_{11} \ldots \alpha_{1r} \\ \alpha_{2n} & \alpha_{11} & \\ \ldots\ldots & & |A_{ij}^{(1)}|_r \\ \alpha_{r+1,n} & \alpha_{1r} & \end{vmatrix} > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n-1) \tag{4.9}$$

$$(-1)^n \frac{1}{\alpha_{1n}} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{11} & \\ \alpha_{1n} & |A_{ij}^{(1)}| \end{vmatrix} > 0 \tag{4.10}$$

Сравнивая последнее неравенство (4.8) с неравенством (4.9) (при $r = n-1$), легко убедиться, что неравенство (4.9) может быть заменено простым условием $\alpha_{1n} > 0$.

Так как область $L(V)$ принадлежит области, определяемой неравенствами Рауса — Гурвица, из которых следуют неравенства $p_{1i} < 0$, то на основании (4.6) имеем

$$\alpha_{in} > 0 \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{4.11}$$

Кроме того, так как $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}$ являются компонентами вектора, параллельного оси параболоида и расположенного в области, где $p_{1i} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}$ должны быть величинами одного знака.

В силу условия определенной положительности $\alpha_{11} > 0$. Следовательно, должно быть

$$\alpha_{1i} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.12}$$

Таким образом, получены дополнительные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты определенно-положительной квадратичной формы

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \tag{4.13}$$

чтобы существовала не пустая область $L(V)$ в n-мерном пространстве коэффициентов:

$$(-1)^{r+1}\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{11} \ldots \alpha_{1r} & \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{11} & & \alpha_{2n} \\ \ldots & \boxed{\,|A_{ij}^{(1)}|_r\,} & \ldots\ldots \\ \alpha_{r1} & & \alpha_{r+1,\,n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots \alpha_{n,r+1} & \ldots 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (r=1,\ldots,n-1) \qquad (4.14)$$

$$\alpha_{1i} > 0, \qquad \alpha_{in} > 0 \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (4.15)$$

Рассмотрим в качестве примера задачу, представляющую интерес для теории автоматического регулирования.

Пусть возмущенное движение системы удовлетворяет дифференциальному уравнению n-го порядка

$$y^{(n)} + A_1{}^\circ y^{(n-1)} + A_2{}^\circ y^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1}{}^\circ y' + A_n{}^\circ(t)\,y = 0 \qquad (4.16)$$

где $A_i{}^\circ = \mathrm{const}\,(i=1,\ldots n-1)$, $A_n(t) \geqslant 0$ для всяких значений $t > 0$ принимает нулевые значения для $t > 0$.

Постоянные $A_1{}^\circ, \ldots, A_{n-1}{}^\circ$ и функцию $A_n(t)$ предположим удовлетворяющими условиям Рауса —Гурвица.

Если квадратичная форма (4.13) с постоянными коэффициентами является функцией Ляпунова для рассматриваемой системы, то область $L(V)$ должна касаться плоскости $p_{1n}=0$ в точке с координатами $p_{11} = -A_1{}^\circ p_{12} = -A_2{}^\circ \ldots p_{1n-1} = -A^\circ{}_{n-1}$. Следовательно, на основании формул (4.6) коэффициенты $\alpha_{1n}\alpha_{2n}\ldots\alpha_{nn}$ связаны с $A_1{}^\circ, \ldots, A^\circ{}_{n-1}$ равенствами

$$\frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{1n}} = A_1{}^\circ, \qquad \frac{\alpha_{3n}}{\alpha_{1n}} = A_2{}^\circ, \ldots, \frac{\alpha_{nn}}{\alpha_{1n}} = A^\circ{}_{n-1} \qquad (4.17)$$

Без ограничения общности можно положить $\alpha_{1n}=1$ [условия (4.14)] и тогда будем иметь

$$\alpha_{1n}=1, \qquad \alpha_{2n}=A_1{}^\circ, \qquad \alpha_{3n}=A_2{}^\circ, \ldots, \alpha_{nn}=A^\circ{}_{n-1} \qquad (4.18)$$

Заменяя в уравнении (3.12), определяющем границу области $L(V)$, величины $p_{11}p_{12}\ldots p_{1n}$ величинами $-A_1{}^\circ - A_2{}^\circ, \ldots, -A^\circ{}_{n-1} - A_n$ и подставляя полученные значения $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{nn}$, будем иметь

$$D_n = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & A_1{}^\circ & A_2{}^\circ & \ldots & A_n \\ 1 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & 1 \\ A_1{}^\circ & \alpha_{11} & \alpha_{12}+\alpha_{12} & \alpha_{13}+\alpha_{22} & \ldots & A_1{}^\circ \\ A_2{}^\circ & \alpha_{12} & \alpha_{22}+\alpha_{13} & \alpha_{23}+\alpha_{23} & \ldots & A_2{}^\circ \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n & 1 & A_1{}^\circ & A_2{}^\circ & \ldots & 0 \end{vmatrix} \qquad (4.19)$$

Значение $A_n=0$ в силу (4.6) является корнем квадратного уравнения $D_n(A_n)=0$. Второй корень $\bar{A}_n(\{\alpha_{ij}\})$ $(i;\ j=1,\ldots,\ n-1)$ будет рациональной функцией оставшихся неопределенными коэффициентов α_{ij} квадратичной формы V. Эти коэффициенты всегда возможно определить из системы уравнений

$$\frac{\partial \bar{A}_n}{\partial \alpha_{ij}} = 0 \qquad (i;\ j=1,\ldots,n-1) \qquad (4.20)$$

Таким образом, достаточным условием устойчивости рассматриваемой системы будет

$$\bar{A}_n > A_n(t) > 0$$

В случае уравнения второго порядка

$$y'' + A_1^\circ y' + A_2(t)\, y = 0 \tag{4.21}$$

где $A_1^\circ > 0$, будем на основании (4.18) иметь следующие значения коэффициентов функции Ляпунова:

$$\alpha_{12} = 1, \qquad \alpha_{22} = A_1^\circ$$

При этом для A_2 получим выражение (4.19):

$$\bar{A}_2 = 4\,\frac{\alpha_{11}A_1^\circ - 1}{\alpha_{11}^2} \quad \text{или} \quad \bar{A}_2 = A_1^{\circ 2} \tag{4.22}$$

так как из условия $\partial\bar{A}_2 / \partial\alpha_{11} = 0$ вытекает $\alpha_{11} = 2/A_1^\circ$.

Таким образом, если функция $A_2(t)$ удовлетворяет условию

$$A_1^{\circ 2} > A_2(t) > 0 \tag{4.23}$$

то невозмущенное движение устойчиво и квадратичная форма с постоянными коэффициентами

$$V = \frac{2}{A_1^\circ}\, y'^2 + 2y'y + A_1^\circ y^2 \tag{4.24}$$

будет функцией Ляпунова. В случаях $n > 2$ решение системы (4.20) может быть получено известными приближенными методами.

5. Устойчивость одного класса неустановившихся движений. Пусть система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

где

$$p_{ij}(t) = p_{ij}^\circ + t^{m_1} p_{ij}^{(1)} + \ldots + t^{m} p_{ij}^{(k)} \tag{5.2}$$

$$0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_k \text{ — постоянные}$$

$$p_{ij}^{(s)} \qquad (i;\ j = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k) \text{ — постоянные}$$

Введем новую независимую переменную τ согласно равенству

$$\tau = \frac{1}{m_k + 1}\, t^{m_k + 1} \tag{5.3}$$

При этом система уравнений возмущенного движения (5.1) примет вид:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(\tau)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.4}$$

где

$$q_{ij}(\tau) = \sum_{s=0}^{k} p_{ij}^{(s)} \left[(m_k + 1)\,\tau\right]^{-\frac{m_k + m_s}{m_k + 1}} \qquad (i;\ j = 1, \ldots, n), \qquad m_0 = 0$$

Очевидно, коэффициенты $q_{ij}(\tau)$ при неограниченном возрастании τ стремятся к определенным пределам:

$$\lim_{\tau\to\infty} q_{ij}(\tau) = p_{ij}^{(k)} \qquad (i,\ j = 1, \ldots, n)$$

и поэтому, в силу теоремы Н. Г. Четаева [2], устойчивость очевидного решения системы (5.4), а следовательно, и системы (5.1) следует из устойчивости очевидного решения предельной системы

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(k)} x_j \tag{5.5}$$

Из этого следует справедливость следующего утверждения (5.5).

Теорема. Тривиальное решение системы линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения (5.1) с коэффициентами вида (5.2) устойчиво асимптотически, если корни характеристического уравнения предельной системы (5.5)

$$\det \| p_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re} el \lambda_i < \varepsilon$, где ε — произвольно малое фиксированное отрицательное число.

6. Устойчивость нелинейных систем. Полученные выше результаты применимы и при исследовании устойчивости нелинейных систем. Пусть система уравнений возмущенного движения представлена в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, x_1, \ldots, x_n)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.1}$$

где $\varphi_{ij}(t; x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывные и ограниченные в любой конечной окрестности начала координат и при $t > 0$ функции. Пусть

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i;\, j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \mathrm{const})$$

определенно-положительная квадратичная форма, производная которой в силу системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t, 0, \ldots, 0)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

является определенно-отрицательной квадратичной формой. При этом, очевидно, квадратичная форма V будет также функцией Ляпунова для системы (6.1). Полученные в п.п. 1—3 результаты позволяют оценить область начальных возмущений $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$, которым отвечают решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (6.1), удовлетворяющие условию $x_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, заменяя в условии $(-1)^n \det_n \| a_{ij} \| > 0$ коэффициенты p_{ij} функциями $\varphi_{ij}(t; x_1, \ldots, x_n)$, получим в переменных $t; x_1, \ldots, x_n$ достаточное условие

$$(-1)^n \det_n \| a_{ij}(t; x_1, \ldots, x_n) \| > 0$$

где

$$a_{ij}(t; x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} (\alpha_{is}\varphi_{sj}(t; x_1, \ldots, x_n) + \alpha_{js}\varphi_{si}(t; x_1, \ldots, x_n))$$

при соблюдении которого функция

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(t; x_1, \ldots, x_n)\, x_j$$

определенно-отрицательна. Если $c(t) = \inf V(x_1, \ldots, x_n)$ на поверхности $\det_n \| a_{ij}(t; x_1, \ldots, x_n) \| = 0$ и если $c_0 = \inf c(t)$ при $t > 0$, то свойство $x_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеет место при условии $V(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \leqslant c_0$, где $x_i^\circ = x_i(0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ (число $c_0 > 0$ существует в силу предположения, что dV/dt согласно (6.2) определенно-отрицательна).

Поступила 24 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, ОГИЗ, 1946.
3. Жуковский Н. Е. О прочности движения. Полное собрание сочинений, т. I, 1937.