

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

Р. Н. Кауфман

(Минск)

В настоящей статье при помощи метода, примененного в [1] для решения электростатической (гидродинамической) задачи, решаются некоторые краевые задачи теории упругости для той же области, т. е. для плоско-параллельного слоя с шаровой полостью. Схему метода статьи [1] можно изложить таким образом.

Решение u краевой задачи ищется в виде

$$u = u_0 + u_1 \quad (0.1)$$

где u_0 — решение задачи для слоя с прежними граничными условиями на плоскостях, но при отсутствии полости. Оно легко определяется.

Слагаемое u_1 ищется в виде рядов по шаровым функциям, отнесенным к центру полости и ко всем его зеркальным изображениям в граничных плоскостях слоя.

В силу симметрии расположения этих точек относительно каждой плоскости однородные краевые условия на плоскостях, которые должны выполняться для u_1 , легко удовлетворяются при помощи некоторых простых соотношений между коэффициентами рядов.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности полости, u_1 приводится к одним переменным r, θ и φ , отсчитываемым от центра полости. Для этой цели используются формулы преобразования шаровых функций от одного центра к другому [2].

Из граничных условий на поверхности полости для коэффициентов рядов получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида

$$z_k + \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} z_l = b_k \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (0.2)$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty \quad (0.3)$$

В широком интервале значений отношения радиуса полости R к толщине слоя a система (0.2) регулярна (а значит, вследствие (0.3), и вполне регулярна¹). Ее решение может быть найдено методом усечения или редукции [3], а также, по крайней мере в области регулярности, методом последовательных приближений.

Аналогичным образом можно построить решения краевых задач с произвольным числом шаровых полостей, центры которых лежат на одной прямой, перпендикулярной граничным плоскостям слоя².

¹ Здесь используется терминология работы [3].

² Отметим, что метод зеркальных изображений с использованием формул переноса для шаровых функций был применен А. М. Родовым для решения некоторых электростатических задач о полупространстве с шаровой полостью (устное сообщение). При этом для определения коэффициентов рядов также получалась система вида (0.2).

Чтобы использовать указанный метод для решения краевых задач теории упругости, потребовалось предварительно найти некоторую полную систему решений статического уравнения теории упругости

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = 0 \quad (0.4)$$

(\mathbf{u} — вектор смещения, σ — коэффициент Пуассона), играющую роль системы шаровых функций в теории потенциала и удобную для применения изложенного метода¹, также найти формулы преобразования этих решений от одного центра к другому (формулы переноса).

§ 1. Система нормальных решений и нахождение для нее формул переноса. 1. Упомянутая выше полная система решений уравнения (0.4), названных нормальными, найдена автором в [5] при помощи метода разделения переменных, изложенного в [6]². Она состоит из следующих векторных функций ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ и \mathbf{e}_φ — орты в системе сферических координат):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ln} &= r^{-l} \left(\beta_l Y_{ln} \mathbf{e}_r + \frac{\delta_l}{V l(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{ln} \mathbf{e}_\theta + \frac{\delta_l^i}{V l(l+1)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{ln} \mathbf{e}_\varphi \right) \\ \mathbf{v}_{ln} &= r^{-(l+2)} \left(Y_{ln} \mathbf{e}_r - \frac{1}{l+1} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{ln} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{(l+1) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{ln} \mathbf{e}_\varphi \right) \\ \mathbf{w}_{ln} &= \frac{r^i}{V l(l+1)} r^{-(l+1)} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{ln} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{ln} \mathbf{e}_\varphi \right) \\ \mathbf{p}_{ln} &= r^{l+1} \left(\alpha_l Y_{ln} \mathbf{e}_r - \frac{\gamma_l}{V l(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{ln} \mathbf{e}_\theta - \frac{\gamma_l}{V l(l+1)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{ln} \mathbf{e}_\varphi \right) \\ \mathbf{q}_{ln} &= r^{l-1} \left(Y_{ln} \mathbf{e}_r + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{ln} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{l \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{ln} \mathbf{e}_\varphi \right) \\ \mathbf{r}_{ln} &= \frac{i}{V l(l+1)} r^l \left(\frac{1}{\sin \theta} Y_{ln} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{ln} \mathbf{e}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$Y_{ln}(\theta, \varphi) = P_{ln}(\cos \theta) e^{in\varphi} \quad (l = 0, 1, 2, \dots; -l \leq n \leq l)$$

P_{ln} — присоединенная функция Лежандра, определяемая формулой

$$P_{ln}(x) = \frac{(1-x^2)^{n/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+n}}{dx^{l+n}} (x^2-1)^l$$

$$\alpha_l = \frac{2\rho - (1-\rho)l}{2l+3}, \quad \gamma_l = \frac{l[(1-\rho)l+3-\rho]}{(2l+3)V l(l+1)} \quad \left(\rho = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \right) \quad (1.2)$$

$$\beta_l = \frac{(\rho-1)l - (\rho+1)}{2l-1}, \quad \delta_l = \frac{l^2(1-\rho) - l(1+\rho) - 2}{(2l-1)V l(l+1)}$$

Решения $\mathbf{u}_{ln}, \mathbf{v}_{ln}$ и \mathbf{w}_{ln} названы внешними нормальными решениями, $\mathbf{p}_{ln}, \mathbf{q}_{ln}$ и \mathbf{r}_{ln} — внутренними.

¹ Можно было бы использовать систему решений Томсона [4], но, как проверил автор, системы для определения коэффициентов получились бы при этом значительно более громоздкими. Кроме того, для решений Томсона представило бы большие трудности нахождение так называемых формул поворота (см. конец § 2).

² Она могла быть найдена также, притом более коротким путем, методом шаровых векторов (см. [7]).

2. Найдем формулы переноса, выражающие внешние нормальные векторы, отнесенные к системе координат с началом в точке O_{10} (фиг. 1), через внутренние нормальные векторы, отнесенные к системе координат XYZ с началом в точке O (оси обеих систем координат параллельны).

Предварительно заметим, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_{ln} = P_{ln}(\cos \theta) e^{in\varphi} / r^{l+1}, \quad \operatorname{div} \mathbf{p}_{ln} = P_{ln}(\cos \theta) e^{in\varphi} r^l \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w}_{ln} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{r}_{ln} = 0 \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{ln} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{q}_{ln} = 0 \quad (1.5)$$

Нетрудно проверить также, что \mathbf{v}_{ln} и \mathbf{q}_{ln} суть градиенты гармонических функций, а именно

$$\mathbf{v}_{ln}(r, \theta, \varphi) = \operatorname{grad} \left(-\frac{1}{l+1} \frac{P_{ln}(\cos \theta) e^{in\varphi}}{r^{l+1}} \right) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{q}_{ln}(r, \theta, \varphi) = \operatorname{grad} \left(\frac{1}{l} P_{ln}(\cos \theta) e^{in\varphi} r^l \right)$$

3. Формулу переноса для \mathbf{u}_{ln} ищем в виде

$$\mathbf{u}_{ln}(r_{10}, \theta_{10}, \varphi) = \sum \alpha_{lkn} \mathbf{p}_{kn}(r, \theta, \varphi) + \sum \beta_{lkn} \mathbf{q}_{kn}(r, \theta, \varphi) + \sum \gamma_{lkn} \mathbf{r}_{kn}(r, \theta, \varphi) \quad (1.7)$$

где пределы суммирования определяются одновременно с коэффициентами α_{lkn} , β_{lkn} , γ_{lkn} .

Для нахождения α_{lkn} возьмем дивергенцию от левой и правой частей написанного равенства. Учитывая (1.3), (1.4) и (1.5), а также формулу переноса для шаровых функций (способ ее получения указан в [2] на стр. 136)

$$\frac{P_{ln}(\cos \theta_{10}) e^{in\varphi}}{r_{10}^{l+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n}}{d^{l+k+1}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!} P_{kn}(\cos \theta) r^k e^{in\varphi} \quad (r < d) \quad (1.8)$$

получаем, что

$$\alpha_{lkn} = \frac{(-1)^{l-n}}{d^{l+k+1}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!} \quad (k = n, n+1, \dots) \quad (1.9)$$

Для нахождения γ_{lkn} удобно найти ротор левой и правой частей (1.7), ибо α_{lkn} уже известно, а из (1.6) следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{q}_{ln} = 0 \quad (1.10)$$

Находя по известным формулам какую-либо компоненту ротора от левой и правой частей (1.7), например φ -ю¹, и используя опять (1.8), получаем

$$\gamma_{lkn} = \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k}} \frac{2n}{lk} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!} \quad (k = n, n+1, \dots) \quad (1.11)$$

Для нахождения β_{lkn} напишем векторное равенство (1.7) в φ -х компонентах. Учитывая значения α_{lkn} и γ_{lkn} , а также формулу переноса

¹ φ -е компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{u}_{ln}$, $\operatorname{rot} \mathbf{p}_{ln}$, $\operatorname{rot} \mathbf{w}_{ln}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{r}_{ln}$ суть шаровые функции.

(1.8), имеем

$$\beta_{lkn} = \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k-1}} \frac{(l+k-1)!}{(k+n)!(l-n)!} (\sigma_{k-1,l} + 2n^2\tau_{k-1,l}) \quad (1.12)$$

где

$$\sigma_{kl} = \frac{8(\rho-1)k^2l^2 - 2(\rho-1)(l^2+k^2) + (\rho+3)(l-2kl-k)}{(4k^2-1)(4l^2-1)} \quad (1.13)$$

$$\tau_{kl} = \frac{4(\rho-5)k^2l^2 + 8(l^2+k^2) + (\rho+3)lk(2k-2l-lk)}{kl(4k^2-1)(4l^2-1)}$$

4. Формула переноса для v_{ln} находится из (1.6) и (1.8) сразу:

$$v_{ln}(r_{10}, \theta_{10}, \varphi) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k+1}} \frac{k(l+k)!}{(l+1)(k+n)!(l-n)!} q_{ln}(r, \theta, \varphi), \quad (r < d) \quad (1.14)$$

5. Формулу переноса для w_{ln} тоже будем искать в виде, аналогичном виду (1.7). При этом, так как $\operatorname{div} w_{ln} = \operatorname{div} r_{ln} = \operatorname{div} q_{ln} = 0$, то коэффициенты при r_{kn} получаются равными нулю, т. е. формула приобретает вид:

$$w_{ln}(r_{10}, \theta_{10}, \varphi) = \sum \lambda_{lkn} r_{kn}(r, \theta, \varphi) + \sum \mu_{lkn} q_{kn}(r, \theta, \varphi) \quad (1.15)$$

Прежде чем находить λ_{lkn} и μ_{lkn} , заметим, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} w_{ln} = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} r_{ln} = 0$$

Кроме того, из уравнения (0.4), равенства

$$\Delta u = \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u$$

и из (1.5) вытекает, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} w_{ln} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} r_{ln} = 0$$

т. е.

$$\operatorname{rot} w_{ln} = \operatorname{grad} \varphi_{ln}, \quad \operatorname{rot} r_{ln} = \operatorname{grad} \psi_{ln}$$

где φ_{ln} и ψ_{ln} — гармонические функции.

Вычислив φ -ю компоненту ротора от левой и правой частей равенства (1.15), находим, что

$$\varphi_{ln} = i \sqrt{\frac{l}{l+1}} \frac{P_{ln} e^{in\varphi}}{r^{l+1}}, \quad \psi_{ln} = -i \sqrt{\frac{l+1}{l}} P_{ln} r^l e^{in\varphi}$$

откуда, учитывая (1.10) и (1.8), имеем

$$\lambda_{lkn} = \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k+1}} \sqrt{\frac{lk}{(l+1)(k+1)}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(k-n)!} \quad (k = n, n+1, \dots) \quad (1.16)$$

Написав теперь равенство (1.15) для φ -х компонент векторов и подставляя значение λ_{lkn} , находим μ_{lkn} :

$$\mu_{lkn} = \frac{(-1)^{l-n} n}{d^{l+k} \sqrt{l(l+1)}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!} \quad (k = n+1, k+2, \dots) \quad (1.17)$$

6. Таким образом, искомые формулы переноса получены¹. Равномер-

¹ Аналогичным образом можно было бы получить формулы переноса для $r > d$, но они нам в дальнейшем не понадобятся.

ная сходимость рядов, стоящих в их правых частях, в любом шаре радиуса, меньшего, чем d , легко проверяется при помощи признака Даламбера и оценки

$$|P_{ln}(\cos \theta)| \leq \sqrt{\frac{(l+n)!}{(l-n)!}} \quad (1.18)$$

Справедливость найденных векторных формул можно проверить путем выписывания их во всех трех декартовых компонентах¹.

Для удобства выпишем формулы переноса для нормальных решений в виде (здесь прежними буквами обозначены уже другие коэффициенты)

$$\begin{aligned} u_{ln}(r_{10}, \theta_{10}, \varphi) = & \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n}}{d^{l+k+1}} \alpha_{lkn} p_{kn}(r, \theta, \varphi) + \\ + & \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k-1}} \beta_{lkn} q_{kn}(r, \theta, \varphi) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k}} \gamma_{lkn} r_{kn}(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$v_{ln}(r_{10}, \theta_{10}, \varphi) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k+1}} \delta_{lkn} q_{kn}(r, \theta, \varphi)$$

$$w_{ln}(r_{10}, \theta_{10}, \varphi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n}}{d^{l+k}} \mu_{lkn} q_{kn}(r, \theta, \varphi) +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{l-n+1}}{d^{l+k+1}} \lambda_{lkn} r_{kn}(r, \theta, \varphi)$$

где

$$\alpha_{lkn} = \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!}, \quad \beta_{lkn} = \frac{(l+k-1)!}{(k+n)!(l-n)!} (\sigma_{k-1, l} + 2n^2 \tau_{k-1, l}) \quad (1.20)$$

$$\gamma_{lkn} = \frac{2n}{l \sqrt{k(k+1)}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!}, \quad \delta_{lkn} = \frac{k}{l+1} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!}$$

$$\lambda_{lkn} = \sqrt{\frac{lk}{(l+1)(k+1)}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!}, \quad \mu_{lkn} = \frac{n}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{(l+k)!}{(k+n)!(l-n)!}$$

σ_{kl} и τ_{kl} определяются из (1.13).

Замечание. Мы получили формулы переноса «сверху вниз» (фиг. 1). Формулы переноса «снизу вверх», т. е. формулы, выражающие, например, $u_{ln}(r, \theta, \varphi)$ через $P_{ln}(r_{10}, \theta_{10}, \varphi)$ и т. д., легко находятся из полученных. Для этого, меняя направление оси z на противоположное, выражаем при помощи (1.8) $P_{ln}(\cos \psi) e^{in\varphi} / r^{l+1}$ через $P_{kn}(\cos \psi_1) r_{10}^k e^{in\varphi}$ (фиг. 1), а затем учитываем, что $\psi = \pi - \theta$, $\psi_1 = \pi - \theta_{10}$ и

$$P_{ln}(-x) = (-1)^{l-n} P_{ln}(x) \quad (1.21)$$

§ 2. Постановка и решение задач. 1. При помощи системы нормальных решений и формул переноса для них теперь можно построить реше-

¹ При этом в правых и левых частях получающихся равенств появляются бигармонические функции. Формулы переноса для них легко получаются из (1.8).

ния краевых задач для слоя с шаровой полостью со следующими граничными условиями: на плоскостях A и B (фиг. 1)¹

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0, \quad u_z|_A = -c, \quad u_z|_B = c, \quad c = \text{const} \quad (2.1)$$

(что означает равномерное сдавливание слоя жестким бесконечным штампом при отсутствии трения); на поверхности полости можно ставить самые различные условия вида

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} u_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_{ikj} \sigma_{ik} = f_j(\theta, \varphi) \quad (j = 1, 2, 3, b_{ikj} = b_{kij}) \quad (2.2)$$

где a_{ij} и b_{ikj} — постоянные; значения 1, 2, 3, которые принимают индексы i и k , соответствуют значкам r, θ и φ , т. е. здесь компоненты вектора смещения и тензора напряжений берутся в сферических координатах. Три равенства (2.2), соответствующие различным j , линейно независимы.

От функций $f_j(\theta, \varphi)$ ($j = 1, 2, 3$) требуется возможность разложения в равномерно сходящиеся ряды по $Y_{ln}(\theta, \varphi)$ так, чтобы для их коэффициентов Фурье были справедливы соотношения

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{kj} | f_{k-1, j} = p_j < 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

(эти соотношения достаточны для доказательства сходимости рядов, представляющих решение, но, по всей вероятности, не необходимы).

Кроме того, по указанной выше схеме можно решить также задачи с другим типом граничных условий на плоскостях A и B , когда

$$u_x = u_y = 0, \quad \sigma_{zz} = p = \text{const} \quad (2.3)$$

Решения краевых задач ищутся в области 1 (фиг. 1), причем требуется также выполнение следующих условий на бесконечности [8]:

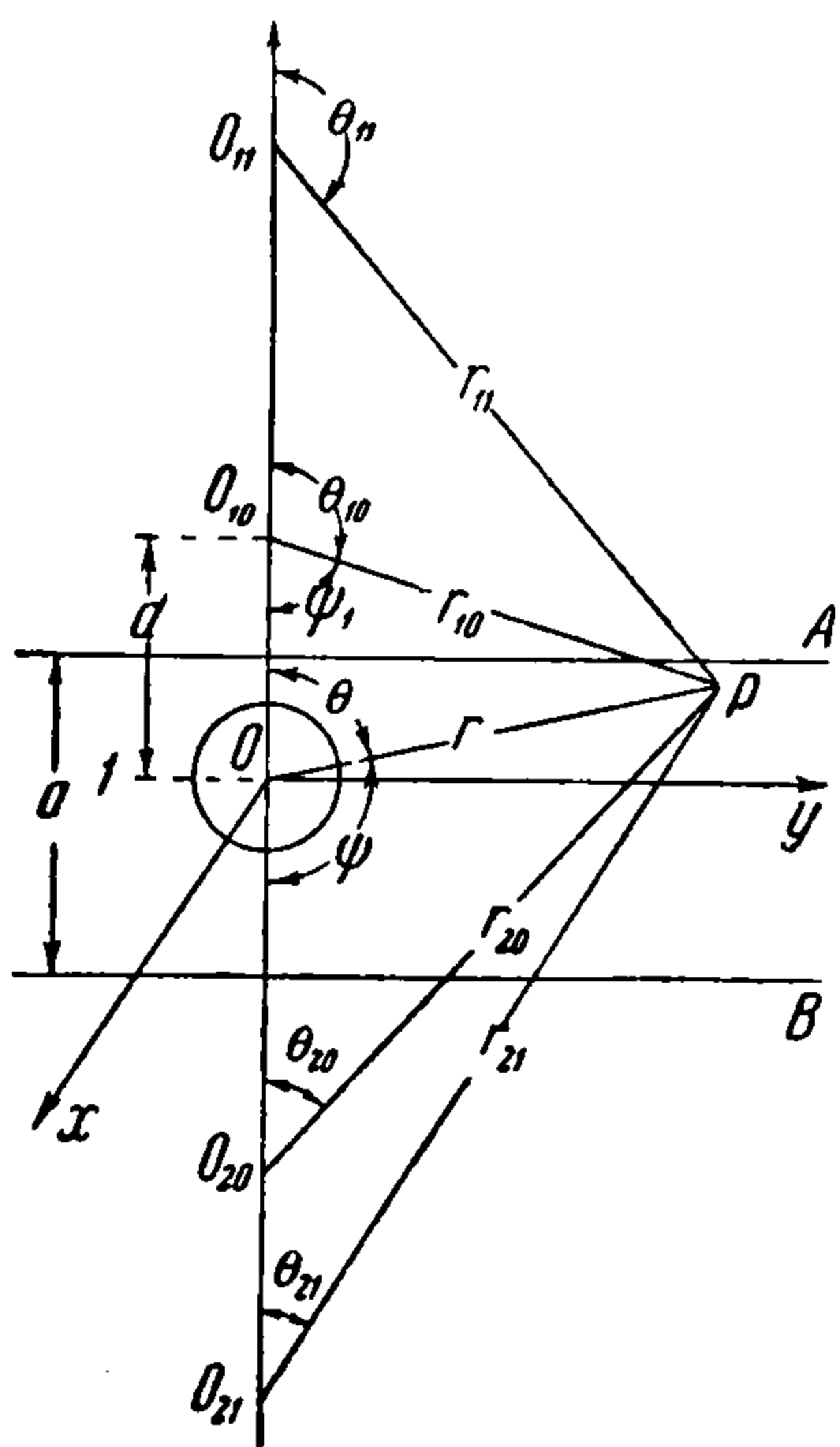
$$r(u - u_0) = 0(1), \quad r^2(Tu - Tu_0) = 0(1) \quad (2.4)$$

где r — радиус-вектор, отсчитываемый от произвольной точки, T — оператор напряжения такой, что

$$(Tu)_i = \sigma_{ik} n_k$$

(n_k — направляющие косинусы нормали в данной точке поверхности, $i, k = 1, 2, 3$, что соответствует $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$); вектор u_0 — это то u_0 , о котором говорилось во введении при изложении схемы применяемого метода, т. е. это решение краевой задачи с теми же условиями на плоскостях, но при отсутствии полости.

¹ $\sigma_{zx}, \sigma_{r\theta}$ и т. д. суть компоненты тензора напряжений в соответствующих системах координат.



Фиг. 1

Как легко проверить, для задач с граничными условиями (2.1)

$$u_{0z} = \frac{2c}{a} z = \frac{2c}{a} r P_1(\cos \theta), \quad u_{0x} = u_{0y} = 0 \quad (2.5)$$

для задач с граничными условиями (2.3)

$$u_{0z} = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)} p z, \quad u_{0x} = u_{0y} = 0 \quad (E \text{ — модуль упругости})$$

Решение любой из перечисленных краевых задач строится в векторном виде по схеме, изложенной во введении, только роль шаровых функций играют здесь внешние нормальные решения.

2. Построим, например, решение краевой задачи, если $u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$ при $r = R$ (что соответствует жесткому шаровому включению при бесконечно большом трении) и с граничными условиями (2.1) на плоскостях. Ищем решение \mathbf{u} в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad (2.6)$$

где \mathbf{u}_0 определяется формулой (2.5), а \mathbf{u}_1 строится в виде следующих рядов по осесимметрическим решениям \mathbf{u}_{l0} и \mathbf{v}_{l0} ($\mathbf{w}_{l0} \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = & \sum_{l=1}^{\infty} A_l R^{l+1} \mathbf{u}_{l0}(r, \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^{l+3} \mathbf{v}_{l0}(r, \theta) + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{l\mu} R^{l+1} \mathbf{u}_{l0}(r_{i\mu}, \theta_{i\mu}) + \sum_{i=1}^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} B_{l\mu} R^{l+3} \mathbf{v}_{l0}(r_{i\mu}, \theta_{i\mu}) \quad (2.7) \end{aligned}$$

где A_l , $A_{l\mu}$, B_l и $B_{l\mu}$ — неизвестные коэффициенты, r и $r_{i\mu}$, θ и $\theta_{i\mu}$ — расстояния и углы, отсчитываемые, как указано на фиг. 1 (точки $O_{i\mu}$ ($i = 1, 2$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$) суть зеркальные изображения центра полости O в граничных плоскостях слоя).

Вектор \mathbf{u}_1 , очевидно, должен удовлетворять на плоскостях A и B однородным граничным условиям

$$u_{1z} = 0, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (2.8)$$

Используя рекуррентные соотношения между функциями P_{ln} и формулы дифференцирования шаровых функций [2], после элементарных вычислений находим, что $(\mathbf{u}_{l0})_z$ и $(\mathbf{v}_{l0})_z$ и соответствующие условиям (2.8) компоненты тензоров напряжений содержат линейные комбинации функций $P_{l\pm 1}/r^l$, P_{l+1}/r^{l+2} , $P_{l,1}/r^{l+1}$, $P_{l+2,1}/r^{l+1}$, $P_{l+2,1}/r^{l+3}$. Отсюда, учитывая, что, например, на плоскости A (фиг. 1)

$$r = r_{10}, \quad r_{2\mu} = r_{1, \mu+1}, \quad \cos \theta_{10} = -\cos \theta, \quad \cos \theta_{2\mu} = -\cos \theta_{1, \mu+1}$$

и принимая во внимание (1.21), находим, что для выполнения на плоскостях A и B условий (2.8) являются достаточными следующие соотношения между коэффициентами рядов:

$$A_{l\mu} = (-1)^{l(\mu+1)} A_l, \quad B_{l\mu} = (-1)^{l(\mu+1)} B_l \quad (2.9)$$

Для того чтобы потребовать выполнения граничных условий на поверхности полости, приведем \mathbf{u}_1 к одним переменным r , θ и φ .

Считая для простоты, что центр полости равноудален от граничных плоскостей слоя¹, используя формулы переноса (1.19) (см. также замечание в конце § 1) и меняя порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} A_k R^{k+1} u_{k0}(r, \theta) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k R^{k+3} v_{k0}(r, \theta) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{k0}(r, \theta)}{a^k} \sum_{l=1}^{\infty} A_l [(-1)^l + (-1)^k] \alpha_{lk0} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \eta(l+k+1) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_{k0}(r, \theta)}{a^{k-2}} \sum_{l=1}^{\infty} A_l [(-1)^l + (-1)^k] \beta_{lk0} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \eta(l+k-1) - \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k0}(r, \theta)}{a^k} \sum_{l=0}^{\infty} B_l [(-1)^l + (-1)^k] \delta_{lk0} \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \eta(l+k-1) \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

$$\eta(p) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(\mu+1)}}{(\mu+1)^p}$$

где α_{lk0} , β_{lk0} и δ_{lk0} определяются по формулам (1.20).

Теперь из граничных условий $u_r = 0$ и $[u_\theta = 0$ при $r = R$ ($u_\varphi = 0$, ибо $(u_{l0})_\varphi \equiv (v_{l0})_\varphi \equiv 0$) находим следующую систему для определения коэффициентов A_l и B_l (здесь $u = R/a$):

$$B_0 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{4}{3} A_l u^{l+1} \eta(l+1) = -\frac{c}{3a} \quad (l - \text{четн.}) \quad (2.11.1)$$

$$\begin{aligned}
 A_k \beta_k + B_k + \alpha_k \sum_{l=1}^{\infty} A_l [(-1)^l + (-1)^k] \alpha_{lk0} u^{l+k+1} \eta(l+k+1) - \\
 - \sum_{l=1}^{\infty} A_l [(-1)^l + (-1)^k] \beta_{lk0} u^{l+k-1} \eta(l+k-1) - \\
 - \sum_{l=0}^{\infty} B_l [(-1)^l + (-1)^k] \delta_{lk0} u^{l+k+1} \eta(l+k+1) = -\frac{4c}{3a} \delta_{k2} \\
 (k = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad \delta_{km} = 0 \text{ при } k \neq m, \quad \delta_{mm} = 1) \quad (2.11.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_k \frac{\delta_k}{V k(k+1)} - B_k \frac{1}{k+1} - \frac{\gamma_k}{V k(k+1)} \sum_{l=1}^{\infty} A_l [(-1)^l + \\
 + (-1)^k] \alpha_{lk0} u^{l+k+1} \eta(l+k+1) - \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{\infty} A_l [(-1)^l + \\
 + (-1)^k] \beta_{lk0} u^{l+k-1} \eta(l+k-1) - \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} B_l [(-1)^l + \\
 + (-1)^k] \delta_{lk0} \eta(l+k+1) = -(2c/3a) \delta_{k2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2) \quad (2.11.3)
 \end{aligned}$$

¹ В случае произвольного расположения центра полости выражение (2.10), а соответственно и система (2.11) получаются лишь более громоздкими.

Если вычесть из уравнений (2.11.2), деленных на k , уравнения (2.11.3) и ввести новые коэффициенты

$$x_k = A_k \beta_k + B_k$$

$$y_k = A_k \left(\frac{\beta_k}{k} - \frac{\delta_k}{V k(k+1)} \right) + B_k \frac{2k+1}{k(k+1)} \equiv \frac{\rho-1}{k} A_k + \frac{2k+1}{k(k+1)} B_k \quad (2.12)$$

а затем положить

$$x_k = z_k, \quad y_k = z_{k+1}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (2.13)$$

то систему (2.11) можно будет записать в виде (0.2).

3. Покажем, что имеют место неравенства (0.3). Для этого заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} D_{kl}^2 < \infty \quad \left(D_{kl} = \frac{(k+l)!}{k!l!} u^{k+l}, \quad u < \frac{1}{2} \right) \quad (2.14)$$

Действительно,

$$\sum_{l=1}^{\infty} D_{kl} = \frac{u^k}{k!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial^k u^{k+l}}{\partial u^k} = \left(\frac{u}{1-u} \right)^k \quad (2.15)$$

откуда и следует (2.14).

Отличие C_{kl} [т. е. коэффициентов при z_l в преобразованной системе (2.11)] от D_{kl} не мешает выполнению первого из неравенств (0.3). Второе из этих неравенств проверяется сразу.

Таким образом, матрица из коэффициентов C_{kl} есть вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве l_2 . Кроме того, и свободный член b_k также принадлежит этому же пространству.

Следовательно, для системы (2.11) справедлива альтернатива Фредгольма. Но соответствующая однородная система, которая получается при $c=0$, т. е. при нулевых граничных условиях [см. (2.1)], не может иметь нетривиальное решение в силу справедливости для поставленных краевых задач теоремы единственности.

Отсюда вытекает, что система (2.11) имеет единственное ограниченное решение при любых правых частях.

Доказательство того, что полученные ряды сходятся и в сумме с u_0 дают решение рассматриваемой задачи, в частности доказательство возможности двукратного почленного дифференцирования рядов (2.7), производится при помощи мажорирования коэффициентов A_l и B_l (все остальные выражаются через них) такими коэффициентами A_l' и B_l' , для которых

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (A_l' / A_{l-1}') < 1, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} (B_l' / B_{l-1}') < 1 \quad (2.16)$$

при этом поведение нормальных решений оценивается при помощи неравенства (1.18).

Возможность введения коэффициентов A_l' и B_l' видна из следующего.

Если в системе (2.11), записанной в виде (0.2), заменить C_{kl} коэффициентами D_{kl} , то, учитывая (2.15) и ограниченность решения системы, получаем оценку

$$|z_k| \leq z_k' = z_{\max} \left(\frac{u}{1-u} \right)^k + |b_k|$$

Отсюда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k' / x_{k-1}') = \lim_{k \rightarrow \infty} (y_k' / y_{k-1}') < 1 \quad (2.17)$$

Заменяя в (2.12) x_k и y_k через x_k' и y_k' , мы и получим A_k' и B_k' , для которых справедливо (2.16). Таким же образом, но несколько более громоздко находят мажорирующие коэффициенты A_k' и B_k' , если в системе (2.11) не делать замены C_{kl} на D_{kl} .

4. Совершенно аналогично с использованием осесимметрических векторов u_{l0} и v_{l0} решаются также краевые задачи с такими граничными условиями на поверхности полости:

1) $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0$ (свободная поверхность);

2) $u_r = 0$, $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0$ (жесткое шаровое включение при отсутствии трения), а также другие осесимметрические задачи.

О быстрой сходимости рядов, представляющих решение, можно судить по данным, относящимся к электростатической задаче (см. [1]), для которой в некотором частном случае показано, что ряды, представляющие компоненты напряженности поля, могут быть заменены с погрешностью около 1% всего лишь двумя-тремя членами.

При наличии n шаровых полостей, центры которых лежат на одной прямой, перпендикулярной граничным плоскостям слоя, u_1 ищется в виде рядов, отнесенных к центрам всех полостей и их зеркальным изображениям в плоскостях A и B . Соответственно этому, вместо двух рядов неизвестных коэффициентов A_l и B_l u_1 будет содержать n таких рядов, причем для их определения получается система рассмотренного вида.

В случае неосесимметрических задач u_1 ищется в виде рядов не только по u_{l0} и v_{l0} , а и по всем нормальным решениям. (Если шаровые полости заполнены веществом с другими коэффициентами σ и E , чем в слое, то решение внутри полостей нужно искать, естественно, в виде рядов по внутренним нормальным векторам.)

5. Для решения задач с более общими условиями на плоскостях, когда в правых частях условий (2.1) и (2.3) стоят функции от точки плоскости, оказывается возможным построить по изложенной схеме тензоры Грина (см. [5]). При этом, кроме формул переноса, используются также теоремы сложения для нормальных решений, или формулы поворота, которые выражают нормальный вектор $Q_{ln}(r, \theta, \varphi)$ в данной системе координат через нормальные векторы $Q_{ln}(r, \theta', \varphi')$, рассматриваемые в системе координат, получающейся из данной некоторым вращением с углами Эйлера $\varphi_1, \alpha, \varphi_2$. Эти формулы, имеющие вид:

$$Q_{ln}(r, \theta, \varphi) = \sum_{s=-l}^l Q_{ls}(r', \theta', \varphi') \sqrt{\frac{(l+n)!(l-s)!}{(l-n)!(l+s)!}} T_{sn}^l(\pi - \varphi_2, \alpha, \pi - \varphi_1) \quad (2.18)$$

просто получаются из теоремы сложения для обобщенных сферических функций $T_{sn}^l(\varphi_1, \alpha, \varphi_2)$ из работы [6].

Замечание. Эти задачи можно было бы попытаться решить непосредственно по изложенной схеме (без тензоров Грина). В этом случае u_0 также можно найти

(см. ¹⁹⁾). Однако разложение u_0 на поверхности полости в ряд по Y_{ln} само по себе сложно.

Заметим также, что задачи с граничными условиями на плоскостях, отличными от перечисленных, изложенным методом не решаются.

Отметим, что при помощи формул поворота (а также формул переноса) могут быть решены задачи о слое и полупространстве с любым числом шаровых полостей при произвольном расположении их центров, задачи о трех и более шаровых полостях в пространстве (задача о двух полостях может быть решена при помощи одних формул переноса), а также задача о неконцентрической шаровой полости в шаре.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. М. Родову за ценные указания при выполнении данной работы.

Поступила 27 XI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Кауфман Р. Н. Диэлектрический слой с шаровой полостью в однородном электростатическом поле. ДАН СССР, т. 101, № 4, 1955.
2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, 1952.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
5. Кауфман Р. Н. Решение некоторых краевых задач математической физики для слоя с шаровыми полостями. Диссертация. Минск, БГУ, 1956.
6. Гельфанд И. М. и Шапиро З. Я. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения. УМН, т. 7, вып. 1, 1952.
7. Петрашень Г. И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы. Уч. зап. ЛГУ, вып. 17, № 114, 1949.
8. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний. УМН, т. 8, вып. 1, 1952.
9. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1955.