

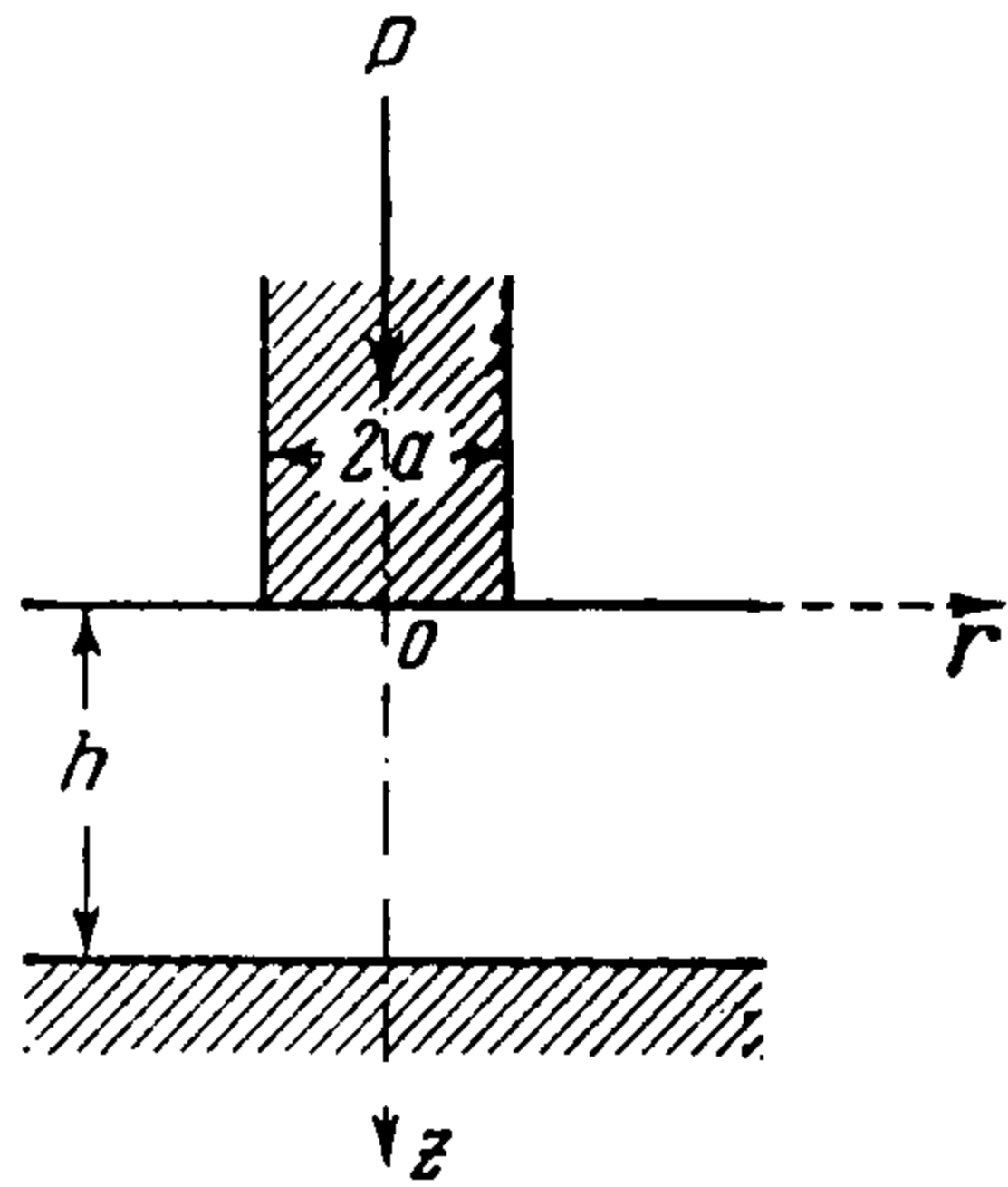
## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

При решении контактных задач теории упругости обычно предполагается, что тело, подверженное действию жесткого штампа, представляет собой упругое полупространство. Настоящая работа посвящена исследованию более сложной задачи о вдавливании кругового в плане штампа в упругий слой. Развитый в работе метод позволяет выразить искомые перемещения и напряжения через одну вспомогательную функцию, являющуюся решением интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным симметричным ядром. Для случая штампа с плоским основанием дается ряд численных результатов.

§ 1. Рассматривается упругое равновесие неограниченного слоя, лежащего на жестком неподвижном основании и деформирующегося под действием кругового в плане жесткого штампа. Предполагается, что штамп ограничен поверхностью вращения и вдавливание осуществляется осевой силой  $P$  (фиг. 1). Принимается, что трение между штампом и слоем, а также между слоем и основанием отсутствует, хотя предлагаемый метод допускает распространение и на более сложные случаи. (Например, можно считать слой и основание находящимися в условиях сцепления.)



Фиг. 1

При сделанных предположениях контактная задача сводится к интегрированию уравнений теории упругости в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  при смешанных граничных условиях

$$\tau_{rz} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } z = h \quad (1.1)$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad w = w_0 - \chi(r) \quad (r < a), \quad \sigma_z = 0 \quad (r > a) \quad \text{при } z = 0 \quad (1.2)$$

где  $(u, 0, w)$  — составляющие вектора перемещения в цилиндрической системе координат,  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  — нормальное и касательные напряжения,  $\chi(r)$  — кривая, определяющая форму поверхности штампа,  $w_0$  — перемещение штампа в направлении оси  $z$ .

Радиус  $a$  штампа считается заданным, что при неплоском основании соответствует случаю полного погружения под действием достаточно большой силы  $P$ . При неполном погружении задача осложняется тем

обстоятельством, что радиус площадки контакта заранее неизвестен и его требуется определить из условия непрерывности нормальных напряжений в точках окружности  $r = a$ .

Для решения рассматриваемой задачи удобно воспользоваться представлением составляющих вектора перемещения через гармонические функции Папковича-Нейбера. В данном случае эти формулы принимают вид:

$$2\mu u = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad 2\mu w = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad \Phi = \Phi_0 + z\Phi_1 \quad (1.3)$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  — функции, гармонические в слое  $0 < z < h$ .

Воспользовавшись равенствами (1.1) — (1.3), а также формулами

$$\sigma_z = 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-2\nu)\Phi_1 - \Phi_2 - z\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right], \quad \Phi_2 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \quad (1.4)$$

дающими выражения упругих напряжений через введенные функции, приходим к граничным условиям

$$[\Phi_1]_{z=h}, \quad \left[ \Phi_2 + h\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right]_{z=h} = 0 \quad (1.5)$$

$$[(1-2\nu)\Phi_1 - \Phi_2]_{z=0} = 0 \quad (1.6)$$

$$[(3-4\nu)\Phi_1 - \Phi_2]_{z=0} = 2\mu[w_0 - \chi(r)] \quad \text{при } r < a \quad (1.7)$$

$$\left[ 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad \text{при } r > a \quad (1.8)$$

позволяющим однозначным образом определить  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ . Предполагается, что функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  при  $r \rightarrow \infty$  имеют порядок  $O(r^{-1})$ , а их производные  $O(r^{-2})$ , что обеспечивает должное поведение смещений и напряжений на бесконечности.

§ 2. Решение поставленной задачи основывается на приведении ее к парным интегральным уравнениям, допускающим точное решение в квадратурах через вспомогательную функцию, удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма с непрерывным симметричным ядром.

Будем искать гармонические функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в виде

$$\Phi_1 = \int_0^\infty A(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (h-z) J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h} \quad (2.1)$$

$$\Phi_2 = \int_0^\infty [\lambda h A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (h-z) + B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (h-z)] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h}$$

где  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  — функции, подлежащие определению,  $J_0(x)$  — функция Бесселя.

При данном выборе искоемых функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  граничные условия (1.5) будут удовлетворены при любых значениях  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$ . Из оставшихся условий равенство (1.6) позволяет установить соотношение

$$B(\lambda) = (1-2\nu - \lambda h \operatorname{cth} \lambda h) A(\lambda) \quad (2.2)$$

а два других, (1.7) и (1.8), приводят к системе парных интегральных уравнений для  $A(\lambda)$ :

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = f(r) \quad (r < a), \quad \int_0^{\infty} \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a) \quad (2.3)$$

где

$$g(\lambda) = \frac{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h e^{-\lambda h}}{\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h}, \quad f(r) = \frac{\mu}{1-\nu} [w_0 - \chi(r)] \quad (2.4)$$

Решение уравнений (2.3) будем искать в виде<sup>1</sup>

$$A(\lambda) = [1 - g(\lambda)] \int_0^a \varphi(t) \cos \lambda t dt \quad (2.5)$$

где  $\varphi(t)$  — некоторая неизвестная функция, непрерывная вместе со своей производной в замкнутом интервале  $(0, a)$ .

Если выполнить в правой части равенства (2.5) интегрирование по частям и подставить<sup>2</sup> преобразованное выражение для  $A(\lambda)$  во второе уравнение (2.3), то получим при  $r > a$

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda A(\lambda)}{1-g(\lambda)} J_0(\lambda r) d\lambda = \varphi(a) \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda a d\lambda - \int_0^a \varphi'(t) dt \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = 0$$

Так как на основании известной формулы

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \sin \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < r) \\ (t^2 - r^2)^{-1/2} & (t > r) \end{cases} \quad (2.6)$$

интегралы по переменной  $\lambda$  равны нулю.

Таким образом, одно из парных интегральных уравнений (2.3) удовлетворяется тождественно.

Подстановка  $A(\lambda)$  в первое из уравнений (2.3) после перемены порядка интегрирования и использования формул

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cos \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0 & (t > r) \\ (r^2 - t^2)^{-1/2} & (0 \leq t < r) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$J_0(\lambda r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \cos(\lambda r \sin \theta) d\theta \quad (2.8)$$

приводит к соотношению

$$\int_0^r \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} d\theta \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^{\infty} g(\lambda) \cos \lambda t \cos(\lambda r \sin \theta) d\lambda = f(r) \quad (2.9)$$

<sup>1</sup> См. [2], где аналогичный метод был применен для решения одной электростатической задачи.

<sup>2</sup> Все вычисления данного параграфа имеют формальный характер, однако могут быть легко обоснованы, если постулировать существование решения уравнения Фредгольма (2.12), непрерывного вместе с производной в замкнутом интервале  $(0, a)$ .

Если ввести в первом из интегралов новую переменную интегрирования, положив  $t = r \sin \theta$ , и обозначить через  $G(x)$  косинус-преобразование Фурье от функции  $g(\lambda)$ :

$$G(x) = \int_0^{\infty} g(\lambda) \cos \lambda x d\lambda \quad (2.10)$$

то последнее равенство может быть записано в виде

$$\int_0^{1/2\pi} \left( \varphi(r \sin \theta) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t + r \sin \theta) + G(t - r \sin \theta)] dt \right) d\theta = f(r) \quad (2.11)$$

Полагая

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t + x) + G(t - x)] dt = F(x) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2.12)$$

приходим к интегральному уравнению Шлемильха

$$\int_0^{\pi/2} F(r \sin \theta) d\theta = f(r) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2.13)$$

непрерывное решение которого дается формулой [4]

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[ f(0) + x \int_0^{1/2\pi} f'(x \sin \theta) d\theta \right] \quad (2.14)$$

После определения  $F(x)$  равенство (2.12) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $\varphi(t)$ . Из определения (2.10) функции  $G(x)$  следует, что ядро уравнения есть непрерывная и симметричная функция переменных  $(x, t)$ . Если решение интегрального уравнения (2.12), принадлежащее к классу функций с непрерывной производной, может быть найдено, то формулы (2.5), (2.2) и (2.1) дают полное решение рассматриваемой контактной задачи<sup>1</sup>.

Интересно отметить, что многие величины, представляющие интерес для приложений, могут быть выражены непосредственно через функцию  $\varphi(t)$ , минуя промежуточные формулы, что особенно удобно при численных методах решения уравнения (2.12). Так, например, воспользовавшись формулами (1.4) и (2.6), легко получим простую формулу для распределения нормальных напряжений под штампом:

$$[\sigma_z]_{z=0} = \int_r^a \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt - \frac{\varphi(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{при } r < a \quad (2.15)$$

Особенно простое выражение получается для величины суммарного давления штампа на слой, численно равного приложенной силе  $P$ . Интегрируя (2.15) по площади круга радиуса  $a$ , находим

$$P = 2\pi \int_0^a \varphi(t) dt \quad (2.16)$$

<sup>1</sup> Если  $F'(x)$  — непрерывная функция, то достаточно потребовать существования непрерывного решения уравнения (2.12).

Последнее равенство является уравнением для определения величины  $w_0$  перемещения штампа по заданной силе  $P$ .

В случае штампа с неплоским основанием, находящегося в условиях неполного погружения, из формулы (2.15) получается дополнительное уравнение

$$\varphi(a) = 0 \quad (2.17)$$

вытекающее из условия непрерывности нормальных напряжений на плоскости  $z = 0$ . В этом случае соотношения (2.16) и  $\varphi(a) = 0$  должны служить для определения перемещения штампа  $w_0$  и радиуса  $a$  площадки контакта.

§ 3. Для штампа с плоским основанием

$$\chi(r) = 0, \quad f(r) = \frac{\mu w_0}{1 - \nu}$$

интегральное уравнение (2.12) принимает вид:

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t+x) + G(t-x)] dt = \frac{2\mu w_0}{\pi(1-\nu)} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (3.1)$$

Для дальнейших расчетов удобно перейти к безразмерным величинам, положив

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{t}{a} = \tau, \quad \varphi(x) = \frac{2\mu w_0}{\pi(1-\nu)} \omega(\xi) \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) запишется тогда в форме

$$\omega(\xi) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [K(\tau + \xi) + K(\tau - \xi)] \omega(\tau) d\tau \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3.3)$$

где

$$K(u) = p \int_0^{\infty} \frac{\alpha + e^{-\alpha} \operatorname{sh} \alpha}{\alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha} \cos \alpha p u d\alpha \quad \left( p = \frac{a}{h} \right) \quad (3.4)$$

При малых значениях параметра  $p$  решение рассматриваемого уравнения может быть построено в виде разложения по степеням этого параметра. В общем случае приходится прибегать к численным методам, для чего в первую очередь надлежит табулировать функцию  $K(u)$  в интервале  $0 \leq u \leq 2$ . Далее, заменяя значение интеграла в (3.3) его приближенным выражением по формуле трапеций (или другой квадратурной формуле), мы приведем задачу определения  $\omega(\tau)$  к решению системы линейных уравнений, что дает возможность составить таблицу этой функции с необходимой степенью точности.

Формула (2.16), дающая искомую связь между перемещением штампа  $w_0$  и силой  $P$ , в безразмерных переменных принимает вид:

$$\kappa = \frac{P(1-\nu)}{4a\mu w_0} = \int_0^1 \omega(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Поэтому, имея таблицу функции  $\omega(\tau)$ , не представляет труда вычислить соответствующее значение коэффициента  $\kappa$ .

Расчеты по указанной схеме проводились для пяти значений параметра  $p$  — от  $p = 0$  до  $p = 2$  с шагом 0.5. Значению  $p = 0$  соответствует случай воздействия штампа на упругое полупространство. В этом случае  $K(u) \equiv 0$ ,  $\omega(\tau) \equiv 1$ ,  $\kappa = 1$ .

Таблица 1

Значения ядра  $K(u)$ 

$u$	$p = 0.5$	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
0	0.5837	1.1674	1.7511	2.3349
0.1	0.5828	1.1596	1.7248	2.2728
0.2	0.5798	1.1364	1.6486	2.0990
0.3	0.5750	1.0991	1.5310	1.8448
0.4	0.5682	1.0495	1.3836	1.5513
0.5	0.5598	0.9897	1.2196	1.2565
0.6	0.5496	0.9224	1.0515	0.9875
0.7	0.5378	0.8502	0.8894	0.7591
0.8	0.5248	0.7757	0.7406	0.5753
0.9	0.5104	0.7010	0.6090	0.4336
1.0	0.4948	0.6282	0.4962	0.3279
1.1	0.4784	0.5587	0.4021	0.2512
1.2	0.4612	0.4937	0.3252	0.1962
1.3	0.4434	0.4339	0.2635	0.1571
1.4	0.4251	0.3795	0.2148	0.1291
1.5	0.4065	0.3308	0.1767	0.1088
1.6	0.3878	0.2877	0.1472	0.0939
1.7	0.3691	0.2498	0.1243	0.0826
1.8	0.3505	0.2168	0.1065	0.0737
1.9	0.3322	0.1883	0.0925	0.0663
2.0	0.3141	0.1640	0.0816	0.0602

Таблица 2

Значения функции  $\omega(\tau)$ 

$\tau$	$p = 0.5$	$p = 1.0$	$p = 1.5$	$p = 2.0$
0	1.530	2.353	3.320	4.321
0.1	1.529	2.348	3.308	4.303
0.2	1.527	2.333	3.272	4.246
0.3	1.523	2.307	3.212	4.153
0.4	1.518	2.272	3.129	4.022
0.5	1.511	2.228	3.025	3.854
0.6	1.503	2.176	2.902	3.650
0.7	1.494	2.118	2.763	3.416
0.8	1.484	2.054	2.611	3.157
0.9	1.472	1.986	2.454	2.884
1.0	1.460	1.915	2.290	2.608

Таблица 3

$p$	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$x$	1	1.51	2.20	2.95	3.72

Результаты вычислений представлены в табл. 1—3. Следует заметить, что данные табл. 1 могут быть также использованы при рассмотрении контактной задачи для штампа с неплоским основанием.

§ 4. Выведенные в § 2 общие формулы позволяют рассмотреть предельный случай  $h \rightarrow \infty$ , исследованный в работах многих авторов (см., например, [1,3]). Для этого случая функция  $G(x) \equiv 0$  и формула (2.12) дает явное выражение для искомой функции:

$$\varphi(x) = F(x) = \frac{2}{\pi} \left[ f(0) + x \int_0^{\infty} f'(x \sin \theta) d\theta \right] \quad (4.1)$$

где  $f(r)$  определяется равенством (2.4).

Из (4.1) и (2.16) непосредственно определяется искомая связь между перемещением штампа  $w_0$  и силой  $P$

$$P = \frac{4a\mu}{1-\nu} \left[ w_0 - \int_0^{1/2\pi} \chi(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \right] \quad (4.2)$$

В случае неполного погружения штампа с неплоским основанием, к этому соотношению добавляется еще уравнение (2.17), принимающее в данном случае вид:

$$\frac{w_0}{a} = \int_0^{\pi/2} \chi'(a \sin \theta) d\theta \quad (4.3)$$

Из уравнений (4.2) — (4.3) должны быть найдены величины перемещения штампа  $w_0$  и радиуса  $a$  площадки контакта.

Формулы (4.2) — (4.3) позволяют также для заданного радиуса штампа  $a_0$  находить то предельное значение силы  $P_0$ , начиная с которого происходит полное погружение штампа:

$$P_0 = \frac{4a_0\mu}{1-\nu} \int_0^{\pi/2} [a_0\chi'(a_0 \sin \theta) - \sin \theta \chi(a_0 \sin \theta)] d\theta \quad (4.4)$$

В заключение приведем еще формулу для нормальных напряжений в области контакта ( $r < a$ ):

$$\begin{aligned} [\sigma_z]_{z=0} = & -\frac{2\mu}{\pi(1-\nu)} \left\{ \left[ w_0 - a \int_0^{1/2\pi} \chi'(a \sin \theta) d\theta \right] \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \right. \\ & \left. + \int_r^a \frac{d^2}{dt^2} \left[ \int_0^{1/2\pi} t \sin \theta \chi(t \sin \theta) d\theta \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right\} \quad (4.5) \end{aligned}$$

Поступила 3 VII 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г а л и н Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГТТИ, 1953.
2. Л е б е д е в Н. Н. Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте. ДАН СССР, т. СХIV, № 3, 1957.
3. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГТТИ, 1955.
4. У и т т е к е р Е. Т. и В а т с о н Г. Н. Курс современного анализа, ч. I. ГТТИ, 1933.