

**ПРИМЕР ОКОЛОЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ОБЛАСТЬЮ
 СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННОЙ ВНИЗ
 ПО ТЕЧЕНИЮ ИСКРИВЛЕННЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ,
 ОКОНЧИВАЮЩИМСЯ ВНУТРИ ТЕЧЕНИЯ**

И. Бийбосунов

(Фрунзе)

Ф. И. Франкль в работе [1] построил пример околозвукового течения с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. В настоящей работе дается пример течения того же типа с криволинейным скачком. Решение находим на основании уравнений С. В. Фальковича [2], заменяющих уравнения Чаплыгина приближенно вблизи критической скорости, а именно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -C \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = C \eta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad C = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} (\kappa + 1)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

где θ — угол наклона скорости, η — функция скорости, введенная Ф. И. Франклем [3], φ — потенциал скорости, ψ — функция тока.

Переменной энтропии и, следовательно, вихрями за скачком уплотнения пренебрегается, что возможно вблизи критической скорости, поскольку скачок энтропии пропорционален квадрату скачка нормальной скорости.

Функция тока и потенциал скорости в отдельности удовлетворяют уравнениям

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2)$$

Функцию тока в дозвуковой области будем искать в виде

$$\psi = \psi^{(2)} = \eta^4 \left[\psi \left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3} \right) + \varepsilon g \left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3} \right) \right] \quad (3)$$

Скачок уплотнения в плоскости $\theta\eta$ отображается в виде двух кривых

$$\frac{3}{2} \frac{\theta_1}{(-\eta_1)^{3/2}} = k_1, \quad \frac{3}{2} \frac{\theta_2}{(+\eta_2)^{3/2}} = k_2 \quad (4)$$

соответственно на сверхзвуковой стороне и на дозвуковой стороне.

На характеристике, исходящей из начала координат, имеем

$$-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3} = 1 \quad (5)$$

Уравнение (3) имеет место также в точках плоскости θ, η , расположенных выше характеристики (5). Ниже этой характеристики имеем

$$\psi = \psi^{(1)} = \eta^4 \left[\alpha f \left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3} \right) + \beta g \left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3} \right) \right] \quad (6)$$

Причем при прохождении через характеристику (5) функция тока должна меняться непрерывно, т. е.

$$\alpha f(1) + \beta g(1) = f(1) + \varepsilon g(1) \quad (7)$$

где f и g — гипергеометрические функции, а именно:
в дозвуковой зоне

$$\begin{aligned} f(z) &= -F\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, z\right), \quad g(z) = -(-z)^{\frac{1}{2}} \cdot F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, z\right) \\ \psi(z) &= -\eta^4 \left[F\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, z\right) + \varepsilon (-z)^{\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, z\right) \right] \end{aligned} \quad (8_1)$$

ниже характеристики

$$\begin{aligned} f(z) &= -F\left(-1, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, z\right), \quad g(z) = \sqrt{3} z^{\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, z\right) \\ \psi(z) &= -\eta^4 \left[\alpha F\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, z\right) - \beta \sqrt{3} z^{\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, z\right) \right] \end{aligned} \quad (8_2)$$

выше характеристики в сверхзвуковой зоне

$$\begin{aligned} f(z) &= -F\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, z\right) \quad (8_3) \\ g(z) &= Az F\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{4}{3}, \frac{1}{z}\right) - B (-z)^{\frac{1}{3}} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{z}\right) \\ \psi(z) &= -\eta^4 \left\{ F\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, z\right) - \varepsilon \left[Az F\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{4}{3}, \frac{1}{z}\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - B (-z)^{\frac{1}{3}} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{z}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

В этих формулах

$$z = -\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3}, \quad A = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \Gamma(2)} = 0.5382, \quad B = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} = -0.5625 \quad (8_4)$$

Здесь коэффициент $-\sqrt{3}$ взят для того, чтобы на характеристике значение $g(z)$ выше характеристики совпало со значением ниже характеристики. Знак минус в выражении $f(z)$ выбран для того, чтобы скачок уплотнения лежал правее нулевой линии тока^[1]. Векторы скорости перед и за скачком, как известно, связаны условием^[4]

$$(\theta_2 - \theta_1)^2 = \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 (-\eta_1 - \eta_2) \quad (9)$$

Краевое условие для φ и ψ в общем случае вдоль скачка уплотнения имеет вид^[4]:

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \pm C \sqrt{\frac{-\eta_1 - \eta_2}{2}} \quad (10)$$

где C определяется по формуле (1).

Само собой понятно, что при прохождении через скачок уплотнения потенциал скорости и функция тока остаются непрерывными:

$$\varphi^{(1)} = \varphi_2 = \varphi, \quad \psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \psi \quad (11)$$

На основании уравнений (3), (4) и (11) получим, что

$$\alpha f(k_1^2) + \beta g(k_1^2) = k^4 [f(-k_2^2) + \varepsilon g(-k_2^2)] \quad \left(k = \frac{\eta_2}{\eta_1}\right) \quad (12)$$

Теперь на основании уравнений (3), (6) и (8) напишем

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d\psi^{(1)}} = \pm C \sqrt{\frac{-\eta_1 - \eta_2}{2}}, \quad \frac{d\varphi^{(2)}}{d\psi^{(2)}} = \pm C \sqrt{\frac{-\eta_1 - \eta_2}{2}} \quad (13)$$

Затем найдем φ и легко убедимся, что

$$\varphi = \varphi^{(1)} = (-\eta)^{1/2} \left[\alpha f^\circ\left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3}\right) + \beta g^\circ\left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3}\right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{(ниже характе-} \\ \text{ристики)} \end{array} \quad (14)$$

$$\varphi = \varphi^{(2)} = \eta^{1/2} \left[f^\circ\left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3}\right) + \varepsilon g^\circ\left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3}\right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{(выше харак-} \\ \text{теристики)} \end{array}$$

где f° и g° — гипергеометрические функции, а именно:

в дозвуковой зоне

$$f^\circ(z) = \frac{8}{3} C (-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right), \quad g^\circ(z) = -\frac{1}{3} C F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, z\right) \quad (15_1)$$

$$\varphi(z) = \eta^{1/2} C \left[\frac{8}{3} (-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right) - \frac{\varepsilon}{C} F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, z\right) \right]$$

ниже характеристики

$$f^\circ(z) = -\frac{8}{3} C z^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right), \quad g^\circ(z) = \frac{\sqrt{3}}{3} C F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, z\right) \quad (15_2)$$

$$\varphi(z) = (-\eta)^{1/2} C \left[-\alpha \frac{8}{3} z^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right) + \beta \frac{\sqrt{3}}{3} F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, z\right) \right]$$

выше характеристики в сверхзвуковой зоне

$$\begin{aligned} f^\circ(z) &= \frac{8}{3} C (-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right) \\ g^\circ(z) &= -\frac{1}{3} C \left[D (-z)^{3/2} F\left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{z}\right) + \right. \\ &\quad \left. + E (-z)^{5/6} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{z}\right) \right] \\ \varphi(z) &= (-\eta)^{1/2} C \left\{ \frac{8}{3} z^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon}{3} \left[D z^{3/2} F\left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{z}\right) + E z^{5/6} \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{z}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (15_3)$$

Здесь C и z выражены формулами (1) и (8), а

$$D = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \Gamma(2)} = -0.3591, \quad E = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)} = -3.3750 \quad (15_4)$$

На основании уравнений (3), (6), (14) и обращая внимание на уравнения (4), (12), из последних уравнений (13) получаем:

$$9 \sqrt{2} [\alpha f^\circ(k_1^2) + \beta g^\circ(k_1^2)] = 8C \sqrt{1-k} [\alpha f(k_1^2) + \beta g(k_1^2)] \quad (16_1)$$

$$9 \sqrt{2} [\alpha f^\circ(k_1^2) + \beta g^\circ(k_1^2)] = -8C \sqrt{1-k} [\alpha f(k_1^2) + \beta g(k_1^2)] \quad (16_2)$$

$$9 \sqrt{2k} [\varphi(-k_2^2) + \varepsilon g^\circ(-k_2^2)] = 8C \sqrt{1-k} [f(-k_2^2) + \varepsilon g(-k_2^2)] \quad (17_1)$$

$$9 \sqrt{2k} [\varphi(-k_2^2) + \varepsilon g^\circ(-k_2^2)] = -8C \sqrt{1-k} [f(-k_2^2) + \varepsilon g(-k_2^2)] \quad (17_2)$$

Из уравнений (7) и (12) найдем α и β . Итак,

$$\alpha = \frac{k^4 [f(-k_2^2) + \varepsilon g(-k_2^2)] g(1) - [f(1) + \varepsilon g(1)] g(k_1^2)}{f(k_1^2) g(1) - f(1) g(k_1^2)}$$

$$\beta = \frac{[f(1) + \varepsilon g(1)] f(k_1^2) - k^4 [f(-k_2^2) + \varepsilon g(-k_2^2)] f(1)}{f(k_1^2) g(1) - f(1) g(k_1^2)}$$
(18)

Подставив (18) в уравнения (16), получим

$$\{9\sqrt{2}[f^\circ(k_1^2)g(1) - f(1)g^\circ(k_1^2)] - 8C\sqrt{1-k}[f(k_1^2)g(1) - f(1)g(k_1^2)]\} k^4 [f(-k_2^2) + \varepsilon g(-k_2^2)] - [\varphi(k_1^2)g(k_1^2) - f(k_1^2)g^\circ(k_1^2)] [f(1) + \varepsilon g(1)] 9\sqrt{2} = 0$$
(19₁)

$$\{9\sqrt{2}[f^\circ(k_1^2)g(1) - f(1)g^\circ(k_1^2)] + 8C\sqrt{1-k}[f(k_1^2)g(1) - f(1)g(k_1^2)]\} k^4 [f(-k_2^2) + \varepsilon g(-k_2^2)] - [f^\circ(k_1^2)g(k_1^2) - f(k_1^2)g^\circ(k_1^2)] [f(1) + \varepsilon g(1)] 9\sqrt{2} = 0$$
(19₂)

Теперь из уравнений (4), (9) и (12) получим, что

$$\frac{2}{3}(k_2 k_1^{3/2} - k_1) = \sqrt{\frac{1-k}{2}}(1+k)$$
(20₁)

или

$$\frac{2}{3}(k_1 - k_2 k_1^{3/2}) = \sqrt{\frac{1-k}{2}}(1+k)$$
(20₂)

Таким образом, мы получили уравнения (17), (19), (20), которые дают возможность найти постоянные α , β , k_1 , k_2 , k .

Из уравнений (8₁), (8₂) и (15₁), (15₂), разлагая в ряды, получим

$$f(k_1^2) = -(1 + ak_1^2 + \dots), \quad f^\circ(k_1^2) = -\frac{8}{3}C(k_1 + mk_1^3 + \dots)$$

$$g(k_1^2) = \sqrt{3}(k_1 + bk_1^3 + \dots), \quad g^\circ(k_1^2) = \frac{\sqrt{3}}{3}C(1 + nk_1^2 + \dots)$$
(21)

$$f(-k_1^2) = -(1 - ak_1^2 + \dots), \quad f^\circ(-k_1^2) = \frac{8}{3}C(k_1 - mk_1^3 + \dots)$$

$$g(-k_1^2) = -(k_1 - bk_1^3 + \dots), \quad g^\circ(-k_1^2) = -\frac{1}{3}C(1 - nk_1^2 + \dots)$$

$$a = \frac{8}{3}, \quad b = \frac{5}{18}, \quad m = \frac{2}{9}, \quad n = \frac{5}{2}$$

Величины k_1 , k_2 , k разложим также в ряды:

$$k_1 = \alpha_1 \varepsilon + \dots, \quad k_2 = \beta_1 \varepsilon + \dots, \quad k = 1 - \gamma_1^2 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$\gamma_1 \varepsilon = \sqrt{1-k} + \dots$$
(22)

На основании (21) и (22) уравнения (17₁), (19₁), (20₂) и (17₂), (19₂), (20₁) примут следующий вид:

$$(24\sqrt{2}\alpha_1 - 8\gamma_1 - 3\sqrt{6})g(1)\varepsilon + \dots = 0$$

$$(24\sqrt{2}\beta_1 + 8\gamma_1 - 3\sqrt{2})\varepsilon + \dots = 0$$
(23₁)

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}(\beta_1 - \alpha_1) - 2\gamma_1\right]\varepsilon + \dots = 0$$

$$(24\sqrt{2}\alpha_1 + 8\gamma_1 - 3\sqrt{6})g(1)\varepsilon + \dots = 0$$

$$(24\sqrt{2}\beta_1 - 8\gamma_1 - 3\sqrt{2})\varepsilon + \dots = 0$$
(23₂)

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}(\alpha_1 - \beta_1) - 2\gamma_1\right]\varepsilon + \dots = 0$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} 24\sqrt{2}\alpha_1 - 8\gamma_1 - 3\sqrt{6} &= 0 \\ 24\sqrt{2}\beta_1 + 8\gamma_1 - 3\sqrt{2} &= 0 \end{aligned} \quad (24_1)$$

$$\begin{aligned} 2(\beta_1 - \alpha_1) - 3\sqrt{2}\gamma_1 &= 0 \\ 24\sqrt{2}\alpha_1 + 8\gamma_1 - 3\sqrt{6} &= 0 \\ 24\sqrt{2}\beta_1 - 8\gamma_1 - 3\sqrt{2} &= 0 \\ 2(\alpha_1 - \beta_1) - 3\sqrt{2}\gamma_1 &= 0 \end{aligned} \quad (24_2)$$

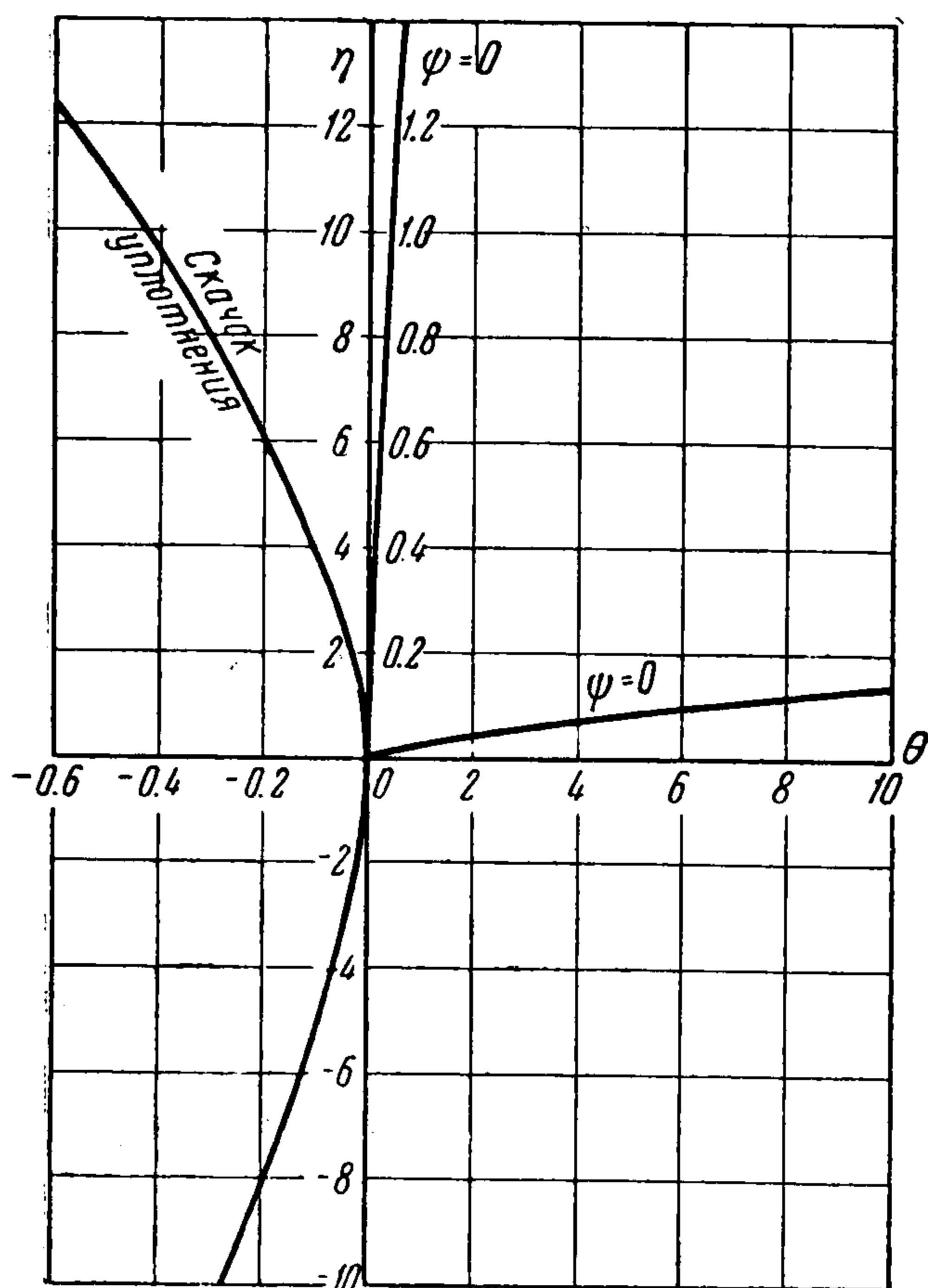
Таким образом, для определения постоянных α_1 , β_1 , γ_1 надо пользоваться либо системой уравнений (24₁), либо системой уравнений (24₂).

В случае (24₁) имеем

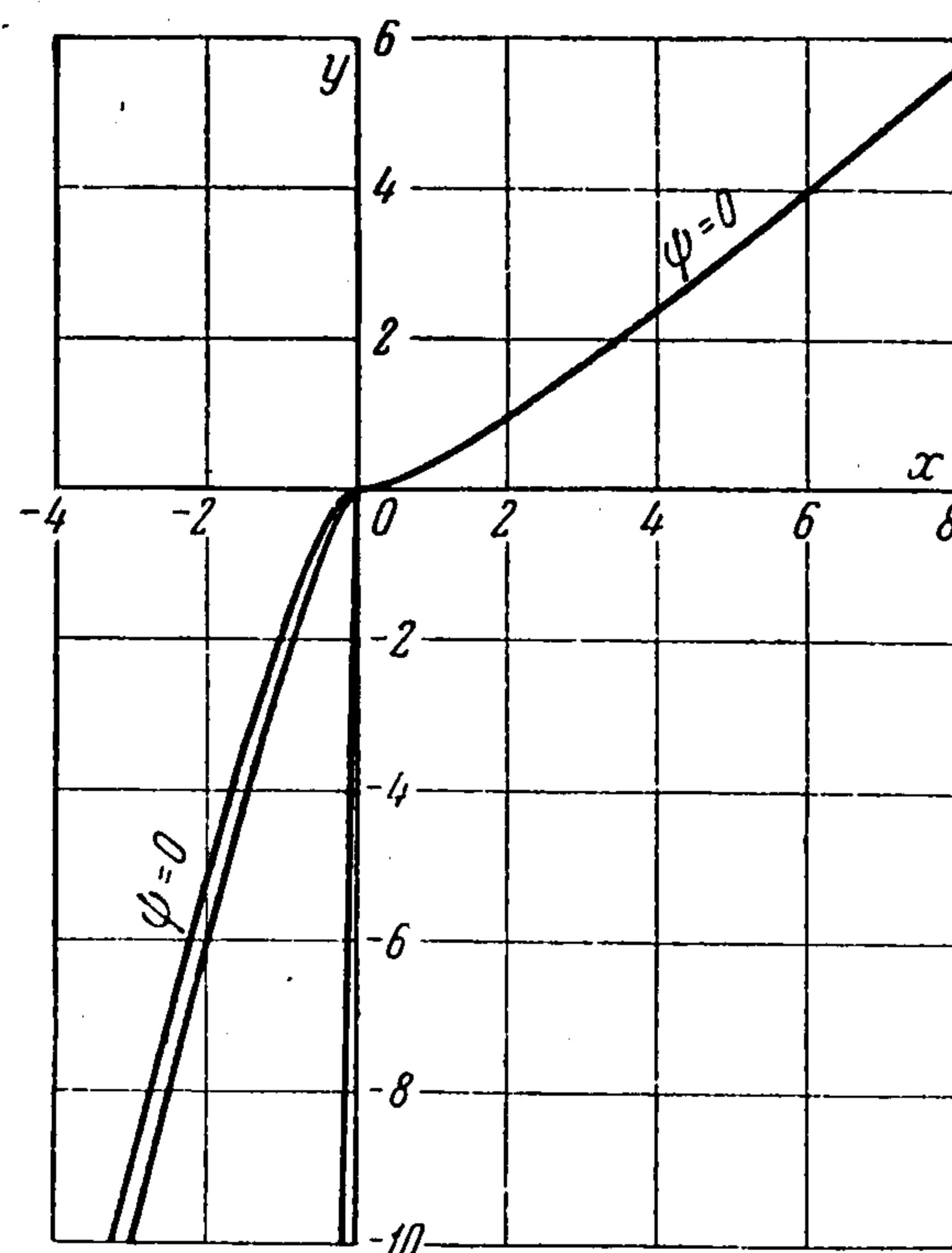
$$\alpha_1 = \frac{10\sqrt{3}+1}{88} = 0.2081, \quad \beta_1 = \frac{10+\sqrt{3}}{88} = 0.1333, \quad \gamma_1 = \frac{3\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{88} = -0.0352 \quad (25)$$

Если использовать систему уравнений (24₂), то получается противоположный знак γ_1 . Отсюда вытекает, что при $\varepsilon < 0$ нужно применить

первый знак, т. е. системы уравнений (24₁), при $\varepsilon > 0$ — второй знак, т. е. системы уравнений (24₂): ведь $\gamma_1 \varepsilon$ по определению положительно.



Фиг. 1



Фиг. 2

Так как в дальнейшем берется $\varepsilon < 0$, то по причинам, указанным ниже, мы остановимся на первом выборе знаков. Тогда согласно уравнениям (25) из уравнения (22) получим

$$k_1 = 0.208\varepsilon + \dots, \quad k_2 = 0.1333\varepsilon + \dots, \quad k = 1 - 0.0012\varepsilon^2 + \dots$$

В дальнейшем, предполагая $\varepsilon < 0$, возьмем конкретно $\varepsilon = -0.1$. В этом случае $\theta > 0$ при $\eta = 0$, получим $\psi < 0$, вследствие чего подводящая линия тока, проходящая через конец скачка, лежит полностью в дозвуковой области.

Построение такого примера мы и поставили своей задачей. Итак,

$$k_1 = -0.0208, \quad k_2 = -0.0133, \quad k = 0.9999 \quad (26)$$

Из уравнений (4) согласно (26) имеем

$$\theta_1 = -0.0138 (-\eta_1)^{3/2}, \quad \theta_2 = -0.0088 \eta_2^{3/2} \quad (27)$$

Графическое изображение в плоскости θ, η дано на фиг. 1. Из уравнений (27) и (12) получим $\theta_2 / \theta_1 = 0.6376 k^{3/2}$.

Подставим значение k из уравнения (26), тогда

$$\theta_2 = 0.6375 \theta_1 \quad (28)$$

В уравнении (1) для воздуха $\kappa = 1.4$; тогда $C = 2.1111$. На основании (26) из уравнений (21) получим в первом приближении

$$\begin{aligned} f(k_1^2) &= -1, & g(k_1^2) &= -0.0360, & f^\circ(k_1^2) &= 0.1171, & g^\circ(k_1^2) &= 1.2188 \\ f(-k_2^2) &= -1, & g(-k_2^2) &= 0.0133, & f^\circ(-k_2^2) &= -0.0748, & g^\circ(-k_2^2) &= -0.7036 \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (18) и (29) имеем

$$\alpha = 1.0034, \quad \beta = -0.0945 \quad (30)$$

Теперь найдем x и y в зависимости от η на скачке:

$$\psi = \psi^{(1)} = \psi^{(2)} = -1.0013 \eta^4, \quad \varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = -0.0045 \eta^{3/2} \quad (31)$$

Теперь из формул Чаплыгина имеем

$$dx = \frac{\cos \theta}{w} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho w} \sin \theta d\psi, \quad dy = \frac{\rho_0}{\rho w} \cos \theta d\psi + \frac{\sin \theta}{w} d\varphi$$

Получим, что

$$dx = \left[\frac{1}{a^*} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{w} \right)_{|\eta=0} \eta + \dots \right] d\varphi - \left[\frac{\rho_0}{\rho^* a^*} + \dots \right] (\theta + \dots) d\psi$$

$$dy = \left[\frac{\rho_0}{\rho^* a^*} + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\rho_0}{\rho w} \right)_{|\eta=0} \eta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho w} \right)_{|\eta=0} \eta^2 + \dots \right] d\psi + (\theta + \dots) \left(\frac{1}{a^*} + \dots \right) d\varphi$$

или

$$a^* dx = d\varphi + [(\kappa + 1)^{-1/2} \eta + \dots] d\varphi - \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} (\theta + \dots) d\psi$$

$$a^* dy = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left[1 + \frac{(\kappa - 1)^{1/2}}{2} \eta^2 + \dots \right] d\psi + \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} (\kappa + 1)^{1/2} \theta d\varphi$$

Интегрируя обе части, получим

$$a^* x = \varphi + (\kappa + 1)^{-\frac{1}{3}} \int \eta d\varphi - \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \int \theta d\psi + \dots$$

$$a^* y = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \psi + \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \frac{(\kappa + 1)^{1/2}}{2} \int \eta^2 d\psi + \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} (\kappa + 1)^{1/2} \int \theta d\varphi \quad (32)$$

Отсюда (считая $\theta = -0.0088 \eta^{3/2}$, $\kappa = 1.4$ — для воздуха) согласно уравнению (31) получим

$$a^* x = -0.0045 \eta^{3/2} - 0.0129 \eta^{11/2}, \quad a^* y = -1.5791 \eta^4 - 0.7045 \eta^8 \quad (33)$$

Таким образом, в данном случае мы получаем искривленный скачок уплотнения, который, двигаясь со стороны конца скачка, направлен вверх по течению.

Теперь найдем x и y при $\eta = 0$ (т. е. звуковую линию); для этого ψ и φ выражаем через θ . Нам известно, что

$$\psi = -\eta^4 \left[F\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, z\right) + \varepsilon (-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, z\right) \right]$$

$$\varphi = \frac{C}{3} \eta^{9/2} \left[8(-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right) + \varepsilon F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, z\right) \right]$$

при $\eta = 0$

$$\psi = -0.1658 \theta^{8/3}, \quad a^* x = \varphi - 1.5777 \int \theta d\psi$$

$$\varphi = -4.3075 \theta^3, \quad a^* y = 1.5777 \psi + 2.1111 \int \theta d\varphi$$

или

$$a^* x = -4.3070 \theta^3 + 0.1901 \theta^{11/3}, \quad a^* y = -0.1829 \theta^{8/3} - 6.8190 \theta^4 \quad (34)$$

Найдем x и y на линиях $\psi = 0$ (т. е. нулевую линию тока). Известно, что

$$\begin{aligned} \psi &= -\eta^4 \left[F\left(-1, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, z\right) + \varepsilon (-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, z\right) \right] = \\ &= -\eta^4 \left\{ \left(1 + \frac{8}{3} z\right) + \varepsilon \left[(-z) AF\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{z}\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (-z)^{4/3} BF\left(-\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{z}\right) \right] \right\} = -\left(\frac{9}{4}\right)^{4/3} \theta^{8/3} \left\{ (-z)^{-4/3} \left(1 + \frac{8}{3} z\right) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon \left[(-z)^{-1/3} AF_1\left(\frac{1}{z}\right) + BF_2\left(\frac{1}{z}\right) \right] \right\} = -\left(\frac{9}{4}\right)^{4/3} \theta^{8/3} \left\{ \tau \left(\tau - \frac{8}{3}\right) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon \left[\tau A \left(1 - \frac{8}{3} \tau^3 + \dots\right) + B \cdot F_2(-\tau^3 + \dots) \right] \right\} = -\left(\frac{9}{4}\right)^{4/3} \theta^{8/3} \{h_1(\tau) + \varepsilon h_2(\tau)\} \end{aligned}$$

Здесь

$$h_1(\tau) = \tau \left(\tau^3 - \frac{8}{3}\right), \quad h_1'(0) = -\frac{8}{3}$$

$$h_2(\tau) = A\tau \left(1 - \frac{8}{3} \tau^3\right) + BF_2(-\tau^3)$$

$$h_2'(0) = B = -\frac{9}{16} = -0.5625, \quad \tau = \left(\frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\theta^2}\right)^{1/3} = (-z)^{-1/3}$$

причем A и B выражены формулами (8).

Пусть $\psi = 0$ при $\tau = \tau'$ и $\tau = \tau''$ (т. е. при $z = z'$ и $z = z''$); тогда

$$h(\tau) = h_1(\tau) + \varepsilon h_2(\tau) = 0$$

Легко видеть, что

$$h_1(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \text{ и } \tau = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/3}$$

Итак, $h_1(0) = h_1\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{1/3}\right] = 0$. Пусть $\tau = \tau'$, тогда

$$h(\tau') = h_1(\tau') + \varepsilon h_2(\tau') = 0$$

Рассмотрим $h_1(\tau')$ и разложим в ряд Тейлора; получим

$$h_1(\tau') = h_1(0) + \tau' h_1'(0) + \dots = \tau' h_1'(0) + \dots$$

Следовательно,

$$\tau' h_1'(0) + \varepsilon h_2(0) = 0, \quad \tau' = -\varepsilon \frac{h_2(0)}{h_1'(0)} = \frac{3}{8} B\varepsilon = -\frac{3}{8} \frac{9}{16} \varepsilon$$

или

$$\tau' = 0.0211, \quad z' = -\frac{1}{\tau'^3} = 106382.9780 \quad (35)$$

Полученное значение $z = z'$ соответствует передней части линии тока. Другое значение $z = z''$, соответствующее задней части линии тока (вниз по течению от конца скачка уплотнения), близко к корню z_0 уравнения $f(z) = 0$ ($z = -3/8$).

Разлагая в ряд, имеем в первом приближении

$$0 = (z'' - z_0) f'(z_0) + \varepsilon g(z_0)$$

$$z'' - z_0 = -\varepsilon \frac{g(z_0)}{f'(z_0)} = -\frac{3}{8} \varepsilon g(z_0)$$

так как $f'(z_0) = 8/3$. Таким образом,

$$z'' = \frac{3}{8} \left[1 - \left(\frac{3}{8}\right)^{1/2} \varepsilon F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, -\frac{8}{3}\right) \right] = -0.3545 \quad (36)$$

Итак, получили $z' = -106382.9780$, $z'' = -0.3545$. Следовательно, уравнения

$$\eta = \left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{z'}\right)^{1/3} = 0.0276 \theta^{2/3}$$

$$\eta = \left(-\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{z''}\right) = 1.8517 \theta^{2/3} \quad (37)$$

дают изображение нулевой линии тока в плоскости θ, η ; графическое изображение дано на фиг. 1.

Из уравнения (32) при $\psi = 0$ получим, что

$$a^* x = \varphi + (\kappa + 1)^{-1/3} \int \eta d\varphi, \quad a^* y = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\kappa-1} (\kappa + 1)^{1/3} \int \theta d\varphi \quad (38)$$

Теперь, используя значения $z = z' = -106382.9780$, вычислим φ . Согласно (15)

$$\begin{aligned} \varphi &= \eta^{3/2} \frac{C}{3} \left[8(-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right) - \varepsilon F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, z\right) \right] = \\ &= C(4\eta^3\theta - 2\theta^3) + \frac{0.1}{3} C \left[\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} D\theta^3 F\left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{z}\right) + \right. \\ &\quad \left. + E\left(\frac{3}{2}\theta\right)^{5/3} \eta^2 F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{z}\right) \right] = \\ &= 2.1111 \theta^3 \left\{ 4 \frac{\eta^3}{\theta^2} - 2 + \frac{0.1}{3} \left[\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} D\left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{z}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E\left(\frac{3}{2}\right)^{5/3} \frac{\eta^2}{\theta^{4/3}} F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{z}\right) \right] \right\} = \\ &= 2.1111 \theta^3 \left\{ 9\tau^3 - 2 + \frac{0.1}{3} \left[\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} D\left(1 + \frac{9}{2} \tau^3\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E\left(\frac{3}{2}\right)^3 \tau^2 F\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\tau^3\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Считая $\tau = \tau' = 0.0211$, получим

$$\varphi = -4.1166 \theta^3 \quad (39)$$

С другой стороны,

$$\varphi = \eta^{3/2} \frac{C}{3} \left[8(-z)^{1/2} F\left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{3}{2}, z\right) - \varepsilon F\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, z\right) \right]$$

так что при $z = z'' = -0.3545$ тогда получим

$$\varphi = 3.0736 \eta^{3/2} \quad (40)$$

Из уравнений (39), (40), (38), обращая внимание на (36), получим

$$a^* x = -4.1166 \theta^3 - 0.0694 \theta^{11/3}, \quad a^* y = -6.5179 \theta^4 \quad (41)$$

$$a^* x = 49.1668 \theta^3 + 55.6299 \theta^{11/3}, \quad a^* y = 77.8468 \theta^4 \quad (42)$$

Ниже в табл. 1 приведены координаты в плоскости xu скачка уплотнения и звуковой линии, а в табл. 2 координаты нулевой линии тока.

Таблица 1

Скачок уплотнения			Звуковая линия		
η	$-x$	$-y$	θ	$-x$	$-y$
0.50	0.0005	0.1096	0.50	0.5235	0.4549
0.75	0.0038	0.6249	0.75	1.7500	2.2424
1.00	0.0174	2.2836	1.00	4.1169	7.0019
1.25	0.0564	6.5426	1.25	7.9813	16.9794
1.50	0.1478	16.0186	1.50	13.7956	35.0602
1.75	0.3359	35.0454	1.75	21.6036	64.7680
2.20	0.6854	70.2536	2.00	32.0425	110.2650
2.25	1.2900	131.8769	2.25	45.3415	176.3532
2.50	2.2701	233.6806	2.50	61.8255	268.4728
2.75	3.7904	395.0176	2.75	81.8124	392.7062
3.00	6.0610	641.4876	3.00	105.6150	555.8628

Таблица 2

Формула (41)			Формула (42)	
θ	x	y	x	y
0.10	— 0.0041	— 0.0006	0.0602	0.0077
0.25	— 0.0646	— 0.0254	1.1119	0.3036
0.50	— 0.5199	— 0.4074	10.5238	4.8654
0.75	— 1.7604	— 2.1622	40.1088	24.6307
1.00	— 4.1860	— 6.5179	104.7967	77.8468
1.25	— 8.1973	— 15.9128	222.0627	109.0551
1.50	— 14.2003	— 32.9968	411.8943	394.0994
1.75	— 22.6025	— 61.1307	696.4052	730.1173
2.00	— 33.8139	— 104.2864	1099.6116	1245.5488
2.25	— 48.2478	— 167.0466	1648.0265	1995.1278
2.50	— 66.3192	— 254.6054	2369.3264	3040.8906
2.75	— 88.4448	— 372.7710	3293.2022	4452.2064

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Ф. И. Франклю за ценные советы при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Пример околовзвукоего течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалья. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
3. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР, серия матем., т. IX, № 5, 1945.
4. Франкль Ф. И. Обтекание профиля дозвуковым потоком с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся искривленным скачком уплотнения. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
5. Фалькович С. В. Об одном семействе сопел Лавалья. ПММ, т. XI, вып. 2, 1947.
6. Франкль Ф. И. Об одном семействе частных решений уравнения Дарбу-Трикоми. ДАН СССР, т. 56, № 7, 1947.
7. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, т. II, ГТТИ, 1934.