

ПРЕДЕЛЬНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ
НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА
(ЗАДАЧА КОШИ
И ЗАДАЧА О ПОРШНЕ)

С. С. Григорян

(Москва)

В работе Г. И. Баренблатта [1] рассмотрены некоторые задачи о неустановившейся одномерной фильтрации жидкости в пористой среде и о движении жидкости в пограничном слое, которые могут быть получены из соответствующих автомодельных задач предельным переходом; поэтому эти движения названы предельными автомодельными движениями.

Ниже рассматриваются предельные автомодельные движения идеального, нетеплопроводного, совершенного газа в случаях задачи Коши для уравнений одномерных неустановившихся движений с плоскими волнами (одномерная автомодельная задача Коши допускает упомянутый выше предельный переход лишь в случае движений с плоскими волнами) и задачи о симметричном поршне, вытесняющем газ.

На существование решений системы уравнений одномерных движений газа с плоскими волнами, имеющих вид предельных автомодельных решений, было указано К. П. Станюковичем [2], однако фактического построения решений конкретных задач им дано не было. Автомодельная задача Коши для одномерных неустановившихся движений газа была рассмотрена нами в работе [7], в которой было установлено, что эта задача не всегда имеет решение. В настоящей работе при рассмотрении предельной автомодельной задачи Коши мы убедимся в том, что это явление имеет место и здесь. Более того, мы увидим, что решение рассматриваемой задачи при некоторых условиях не единственно. В работе [7] было произведено также изучение задачи об автомодельном движении газа, вытесняемого симметричным поршнем, рассмотренной ранее Л. И. Седовым [3, 4], Н. Л. Крашенинниковой [5] и Г. Г. Черным [6], и было выяснено, что эта задача также не всегда имеет решение. Рассматривая здесь предельную автомодельную задачу о поршне, мы установим, что эта задача всегда однозначно разрешима, чего, впрочем, и следовало ожидать на основе результатов работы [7].

В предлагаемой работе производится лишь принципиальное качественное исследование поставленных задач и не даются числовые результаты вычисления решений, которое при необходимости может быть легко выполнено.

§ 1. Задача Коши. 1. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$p(x, 0) = Ax^\alpha, \quad \rho(x, 0) = Bx^\beta, \quad u(x, 0) = M \sqrt{\frac{A}{B}} x^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad (x > 0) \quad (1.2)$$

$$p(x, 0) = LA(-x)^\alpha, \quad \rho(x, 0) = NB(-x)^\beta, \quad u(x, 0) = M_1 \sqrt{\frac{A}{B}} (-x)^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad (x < 0) \quad (1.3)$$

Решение этой задачи автомодельно и имеет вид [3,4,7]:

$$u(x, t) = \frac{x}{t} V(\lambda), \quad p(x, t) = B |x|^{\beta+2} t^{-2} P(\lambda), \quad \rho(x, t) = B |x|^\beta R(\lambda) \quad (1.4)$$

где

$$\lambda = \mu \sqrt{\frac{A}{B}} t |x|^{\frac{\alpha-\beta}{2}-1} \quad (\mu = \text{const}) \quad (1.5)$$

а функции V , R , $P = RZ/\gamma$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.6)$$

$$\frac{dZ}{dV} = Z \frac{[2(V-1) + (\gamma-1)V](V-q)^2 - (\gamma-1)V(V-1)(V-q) - [2(V-1) + \kappa(\gamma-1)]Z}{(V-q)[V(V-1)(V-q) + (\kappa-V)Z]}$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{1}{q} \frac{(V-q)^2 - Z}{V(V-1)(V-q) + (\kappa-V)Z} \quad (1.7)$$

$$\frac{V-q}{q} \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = \frac{V(V-1)(V-q) + (\kappa-V)Z}{Z - (V-q)^2} + (\beta+1)V \quad (1.8)$$

$$q = 2/[2 - (\alpha - \beta)], \quad \kappa = -\alpha q/\gamma \quad (1.9)$$

Заменим везде x на $x + a\alpha$, положим $\mu = \alpha$, $A = p_0(a\alpha)^{-\alpha}$, $B = p_0(a\alpha)^{-\beta}$, $a\alpha = b\beta$, $V = (1/\alpha)V_1$, $P = (1/\alpha^2)P_1$, $R = R_1$ и перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$.

Формулы (1.2) дадут при этом

$$p(x, 0) = p_0 e^{x/a}, \quad \rho(x, 0) = p_0 e^{x/b}, \quad u(x, 0) = M \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} e^{\frac{b-a}{2ab}x} \quad (1.10)$$

формулы (1.3) учитывать не нужно, ибо область их определения уходит влево в бесконечность, формулы (1.4) и (1.5) перейдут в следующие (индексы опускаем):

$$u(x, t) = \frac{a}{t} V(\lambda), \quad p(x, t) = p_0 \frac{a^2}{t^2} e^{x/b} P(\lambda), \quad \rho(x, t) = p_0 e^{x/b} R(\lambda) \quad (1.11)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{t}{a}} e^{\frac{b-a}{2ab}x} \quad (1.12)$$

Дифференциальные уравнения (1.6), (1.7), (1.8) перейдут в следующие:

$$\frac{dZ}{dV} = Z \frac{\left(2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}n\right)Z + (\gamma-1)V(V+n) - 2(V+n)^2}{(V+n)\left[\frac{n}{\gamma}Z - V(V+n)\right]} \quad (1.13)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{Z - (V+n)^2}{n\left[\frac{n}{\gamma}Z - V(V+n)\right]} \quad (1.14)$$

$$\frac{V+n}{n} \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = -\frac{\frac{n}{\gamma}Z - V(V+n)}{Z - (V+n)^2} - \left(1 - \frac{2}{n}\right)V \quad (1.15)$$

где $n = 2b/(b-a)$.

2. Для рассмотрения разрывных решений нам понадобятся условия на ударной волне в безразмерной форме — формулы (2.7) и им предшеству-

ющие в главе IV книги [4]. Перейдя в этих формулах к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, получим

$$V_2 + n = (V_1 + n) \left[1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{Z_1 - (V_1 + n)^2}{(V_1 + n)^2} \right], \quad R_2 = R_1 \frac{V_1 + n}{V_2 + n} \quad (2.1)$$

$$Z_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{1}{(V_1 + n)^2} \left[(V_1 + n)^2 + \frac{2}{\gamma - 1} Z_1 \right] \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} (V_1 + n)^2 - Z_1 \right]$$

Соотношения (2.1) преобразуют точки верхней полуплоскости плоскости V, Z следующим образом (точки $Z < 0$ не имеют физического смысла). Точки параболы (фиг. 1)

$$Z = (V + n)^2 \quad (2.2)$$

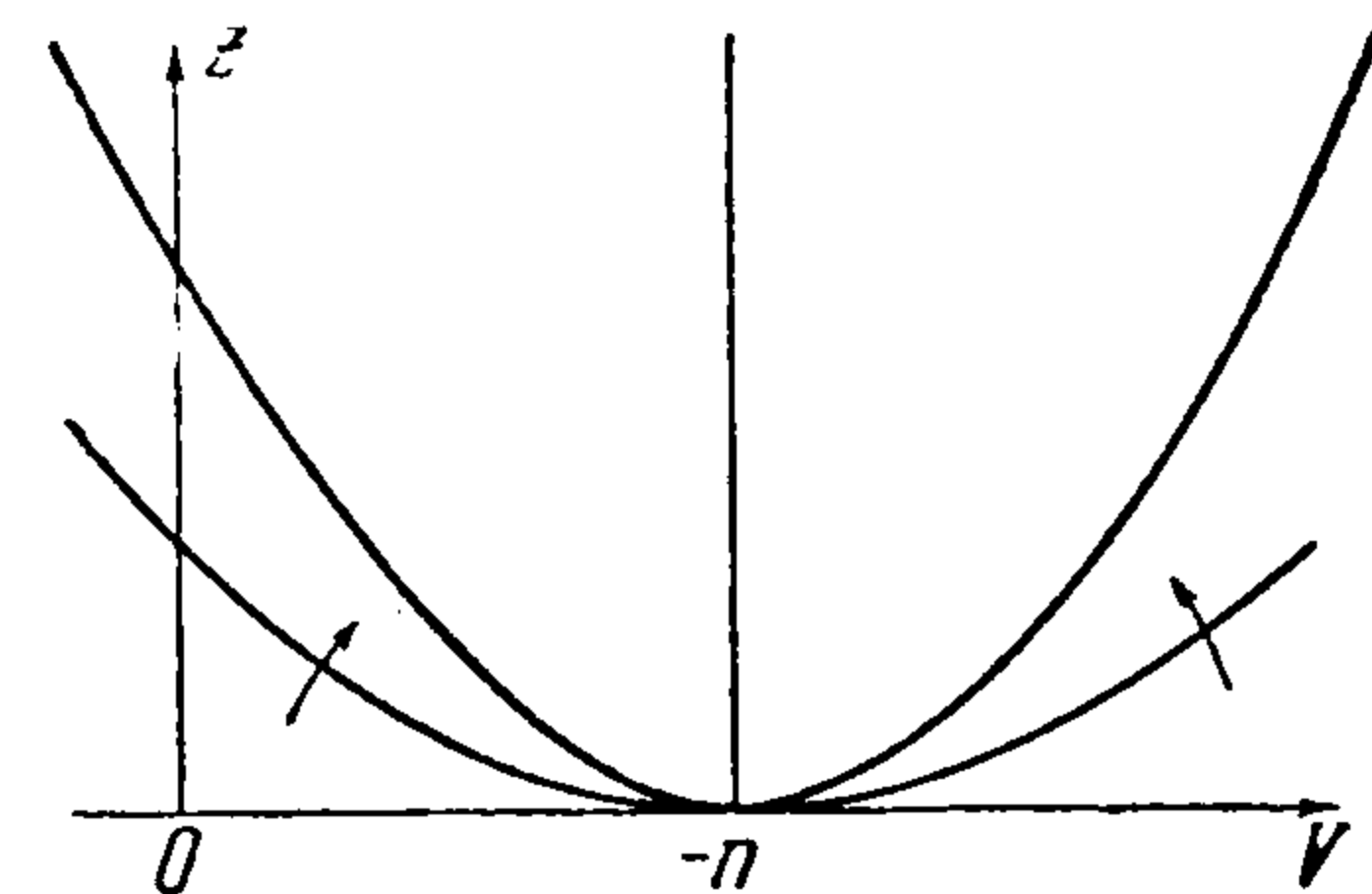
переходят в себя, точки оси $Z = 0$ переходят в точки параболы

$$Z = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} (V + n)^2 \quad (2.3)$$

точки области между осью $z = 0$ и параболой (2.2) переходят в точки области между параболой (2.2) и (2.3), причем первые точки изображают состояния газа впереди ударной волны, вторые — за ней. В область, ограниченную снизу параболой (2.3), попасть невозможно.

3. Заключение о том, что искомые предельные решения имеют вид (1.11), (1.12), можно сделать и следующим образом. Ищется решение задачи Коши для системы (1.1) при начальных условиях

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= p_0 e^{x/a}, & \rho(x, 0) &= \rho_0 e^{x/b} \\ u(x, 0) &= U e^{x/c} \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 1

Решение зависит от системы определяющих параметров $x, t, p_0, \rho_0, U, a, b, c, \gamma$, из которых можно составить независимые безразмерные комбинации,

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \frac{t}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \pi_1 = U \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}, \quad \pi_2 = \frac{b}{a}, \quad \pi_3 = \frac{c}{a}, \quad \gamma$$

и имеет вид [4]:

$$p = p_0 P(\lambda, \xi, \pi_i, \gamma), \quad \rho = \rho_0 R(\lambda, \xi, \pi_i, \gamma), \quad u = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} V(\lambda, \xi, \pi_i, \gamma) \quad (3.2)$$

Сделаем преобразование $x = x' + x_0$. Система (1.1) инвариантна относительно этого преобразования, а начальные условия изменяются следующим образом:

$$p(x', 0) = p_0' e^{x'/a}, \quad \rho(x', 0) = \rho_0' e^{x'/b}, \quad u(x', 0) = U' e^{x'/c} \quad (3.3)$$

где $p_0' = p_0 e^{x_0/a}$, $\rho_0' = \rho_0 e^{x_0/b}$, $U' = U e^{x_0/c}$, т. е. они тоже сохраняют свой вид.

Таким образом, задача Коши (1.1), (3.3) отличается от такой же задачи (1.1), (3.1) лишь значениями p_0, ρ_0, U . Следовательно, решение задачи (1.1), (3.3) получится из решения задачи (1.1), (3.1), т. е. из (3.2),

если в последнем заменить p_0, ρ_0, U на p_0', ρ_0', U' , а x на x' , т. е.

$$\begin{aligned} p(x', t) &= p_0 e^{\frac{x_0}{a}} P \left(\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{t}{a}} e^{\frac{b-a}{2ab} x_0}, \frac{x'}{a}, U \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} e^{\left(\frac{1}{c} - \frac{b-a}{2ab}\right) x_0}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \gamma \right) \\ \rho(x', t) &= \rho_0 e^{\frac{x_0}{b}} R \left(\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{t}{a}} e^{\frac{b-a}{2ab} x_0}, \frac{x'}{a}, U \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} e^{\left(\frac{1}{c} - \frac{b-a}{2ab}\right) x_0}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \gamma \right) \\ u(x', t) &= U e^{\frac{x_0}{c}} V \left(\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{t}{a}} e^{\frac{b-a}{2ab} x_0}, \frac{x'}{a}, U \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} e^{\left(\frac{1}{c} - \frac{b-a}{2ab}\right) x_0}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \gamma \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Но при $x' = x - x_0$ (3.4) должно совпасть с (3.2), причем получающиеся приравниванием правых частей (3.4) и (3.2) при $x' = x - x_0$ соотношения являются тождественными относительно x_0 . Положив в этих тождествах $x_0 = x$ и требуя, чтобы a, b, c были связаны соотношением

$$\frac{1}{c} - \frac{b-a}{2ab} = 0 \quad (3.5)$$

получим

$$\begin{aligned} &P \left(\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{t}{a}}, \frac{x}{a}, U \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \gamma \right) = \\ &= e^{\frac{x}{a}} P \left(\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \frac{t}{a}} e^{\frac{b-a}{2ab} x}, 0, U \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \gamma \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

и аналогичные соотношения для R и V .

Таким образом, мы видим, что при выполнении условия (3.5) решение задачи Коши (1.1), (3.1) имеет «автомодельный» вид (3.7), т. е. определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями. Очевидные преобразования сводят эти уравнения к системе (1.13), (1.14), (1.15).

4. В силу теоремы Ковалевской задача (1.1), (1.10) вблизи любой конечной точки оси $t = 0$ имеет единственное аналитическое решение, поэтому система (1.13), (1.14), (1.15) вблизи $\lambda = 0$ имеет единственное аналитическое по λ решение, определяемое начальными данными

$$V(0) = P(0) = 0, R(0) = 1,$$

причем имеют место разложения

$$V = M\lambda + \dots, R = 1 + \dots, P = \lambda^2 + \dots,$$

из которых следует, что интересующая нас интегральная кривая уравнения (1.13) вблизи точки $V = Z = 0$ имеет представление

$$Z = (\gamma/M^2) V^2 + \dots \quad \text{при } M \neq 0, \quad Z = -\gamma V + \dots \quad \text{при } M = 0.$$

Последние формулы показывают, что на плоскости V, Z начало координат является узлом для интегральных кривых уравнения (1.13), причем различные кривые узла соответствуют различным распределениям начальных скоростей. Решить задачу Коши — значит довести все интегральные кривые, выходящие из начала координат, либо до точек, в которых $\lambda = \infty$, либо до точек, находящихся на прямой $V = -n$, соответствующих границе области, занятой движущимся газом (поршень, пустота). При этом параметр λ должен изменяться вдоль интегральных кривых монотонно. На параболе (2.2) λ достигает стационарного значения, поэтому непрерывный переход через нее вдоль интегральных кривых недопустим [4,7].

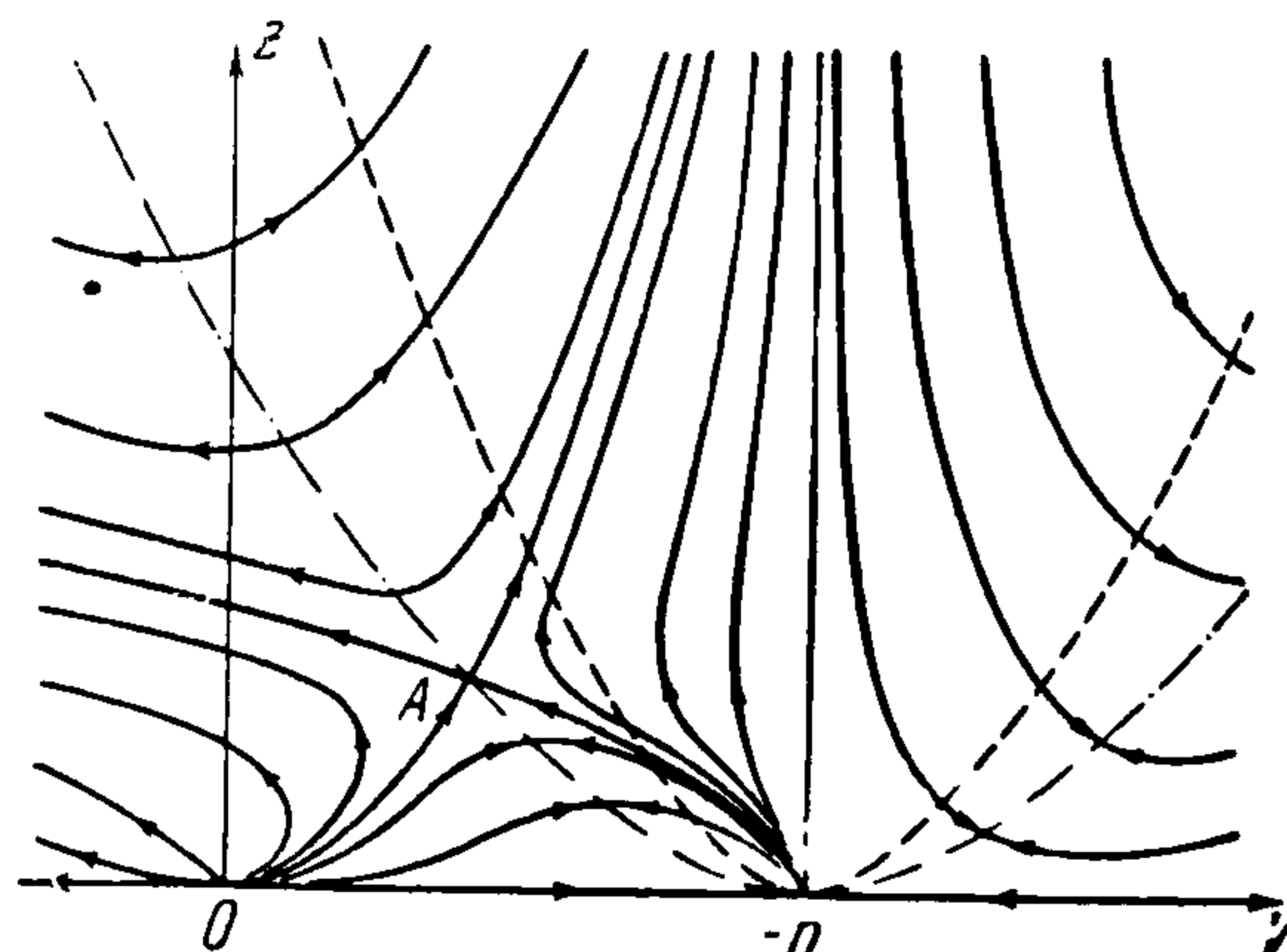
Уравнения (1.13), (1.14), (1.15) содержат лишь один параметр n , поэтому изучение всего рассматриваемого класса задач Коши сводится к

изучению поля интегральных кривых уравнения (1.13) и распределения λ и R вдоль них при всех возможных значениях n .

Поле интегральных кривых при $n < 0$ представлено на фиг. 2. Стрелки на интегральных кривых указывают направление роста параметра λ . Пунктирные кривые — параболы (2.2), (2.3). В точке A , имеющей координаты $V = n^2/(\gamma - n)$, $Z = [\gamma n/(\gamma - n)]^2$, имеем седло. При перемещении вдоль сепаратрис в точку A имеем асимптотически

$$\lambda = \lambda_0 \exp c \left(V - \frac{n^2}{\gamma - n} \right)$$

$$c = \frac{\gamma}{n^2} \frac{a - 2\gamma \frac{n}{\gamma - n}}{a - \gamma \frac{\gamma + n}{\gamma - n}}$$



Фиг. 2

a — тангенс угла наклона сепаратрисы в точке A , причем $a \neq 2\gamma n/(\gamma - n)$, $a \neq \gamma(\gamma + n)/(\gamma - n)$. Поэтому λ в точке A конечно и через точку A можно пройти по интегральным кривым (сепаратрисам). При этом λ будет в точке A меняться монотонно. При $\gamma < 3$ и при $|V| \rightarrow \infty$ имеем

$$Z = a_1 |V|^{3-\gamma} + \dots, \lambda = c_1 \exp(V/n) + \dots \quad (4.1)$$

где a_1, c_1 — постоянные. Из всего этого вытекает следующее.

Для интегральных кривых, выходящих из начала координат левее сепаратрисы, входящей в седло A , решение задачи Коши непрерывно и определено для всех x и $t > 0$. Для оставшейся совокупности интегральных кривых решение может быть построено следующим образом. С этих кривых изображающая точка делает скачок на сепаратрису, проходящую через седло A и точку $Z = 0, V = -n$, и дальше, двигаясь по этой сепаратрисе, проходит через A и уходит в бесконечность при $V \rightarrow -\infty$. Решение задачи Коши при этом разрывно, движение происходит с одной ударной волной.

Для доказательства этих утверждений заметим следующее. Поскольку часть сепаратрисы, проходящей через точки A и $Z = 0, V = -n$, расположенная между параболой (2.2) и (2.3), пересекается со второй из последних при $Z > 0$, то образ этого куска, получающийся в силу отображения (2.1), является некоторой непрерывной кривой без самопересечений, лежащей между параболой (2.2) и осью $Z = 0$ и соединяющей точку A с некоторой точкой оси $Z = 0$, для которой $V < -n$. Покажем, что этот образ целиком лежит в области, ограниченной отрезком $Z = 0, 0 < V < -n$, куском сепаратрисы OA и куском параболы (2.2), соединяющим точки A и $Z = 0, V = -n$. Образ прямой $V = V_A = n^2/(\gamma - n)$ в силу (2.1) является параболой, проходящей через точки A и $Z = 0, V = -n$. Легко показать, что эта парабола на интервале $V_A < V < -n$ расположена выше куска сепаратрисы, соединяющей точки A и $Z = 0, V = -n$. Поэтому и образ этого куска целиком расположен правее вертикали $V = V_A$, что и доказывает наше утверждение. Таким образом, этот образ пересекает каждую интегральную кривую из

тех, которые выходят из точки O правес сепаратрисы OA , и, наоборот, не пересекает ни одну из остальных интегральных кривых, выходящих из точки O . Этим доказывается существование решения задачи Коши.

Для доказательства единственности заметим, что, как легко показать, можно провести через точки A и $Z = 0$, $V = -n$ две параболы, имеющие вертикальную ось и касающиеся с разных сторон куска сепаратрисы, соединяющего эти точки, так что этот кусок заключен между параболой. Но, как можно показать, образы этих парабол снова являются параболой с вертикальной осью, причем пересекают ось $Z = 0$ в точках, расположенных правес $V = V_A$. Между этими образами заключен образ куска сепаратрисы. Поэтому этот образ, будучи по крайней мере вблизи точки A монотонно опускающейся кривой с отрицательным наклоном, будет пересекаться с каждой интегральной кривой только один раз, так как эти кривые в рассматриваемой области имеют положительный наклон. Кажется маловероятным, чтобы у рассматриваемого образа при удалении от точки A изменился знак наклона и этот наклон стал так мал, чтобы с некоторыми из интегральных кривых образ пересекался более одного раза и тем самым нарушилась единственность решения задачи Коши для некоторых M . В самом деле, этот образ заключен в узкой полоске между двумя параболой, наклон которых отрицателен, и трудно допустить, что кривизна образа может настолько резко измениться, чтобы произошло нарушение единственности. Строго доказать это, однако, по-видимому, невозможно.

Единственность решения задачи Коши могла бы нарушиться, если бы можно было сделать скачок с интегральных кривых, выходящих из точки O , на кривые, идущие в точку $V = -n$, $Z = \infty$, причем в этой точке получилось бы $P = 0$ (пустота). Сделав скачок с определенной, выбранной кривой на определенную кривую из только что указанных, мы придем по ней в точку $V = -n$, $Z = \infty$ с вполне определенным значением $\lambda = \lambda^*$. С одной и той же кривой можно делать скачок на разные кривые, идущие в $V = -n$, $Z = \infty$, и получать разные значения λ^* . Решения, соответствующие таким разрывным интегральным кривым, описывают движения с образованием пустоты, закон движения границы которой определяется уравнением $\lambda = \lambda^*$, т. е.

$$x^* = -\frac{2ab}{b-a} \left[\ln \sqrt{\frac{p_0 t}{\rho_0 a}} - \ln \lambda^* \right] \quad (4.2)$$

Из асимптотических формул

$$\begin{aligned} Z &\approx C(V+n)^{\frac{2\gamma}{n} - (\gamma-1)}, & R &\approx C_1(V+n)^{-\frac{2\gamma}{n} + \gamma - 1} \\ P &\approx \frac{1}{\gamma} CC_1, & \lambda &\approx \lambda^* \exp \left[\frac{\gamma}{n^2} (V+n) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

справедливых вблизи $V = -n$, $Z = \infty$, следует, что давление на границе образующейся пустоты отлично от нуля, т. е. полость образуется вследствие того, что газ вытесняется поршнем, идущим из бесконечности по закону (4.2). Таким образом, рассматриваемое решение соответствует движениям газа, возникающим благодаря начальным неравновесным распределениям (1.10) и вытесняющему действию поршня. Отмеченная

выше возможность совершать скачок с одной и той же кривой, выходящей из начала координат, на разные кривые, идущие в точку $V = -n$, $Z = \infty$, с получением различных значений λ^* соответствует движениям с одинаковыми начальными состояниями, но с различными законами движения поршня (4.2).

Из сказанного следует, что движениям без поршня, т. е. задаче Коши, соответствуют либо непрерывные интегральные кривые, отмеченные выше, либо разрывные, составленные из части кривых, выходящих из начала координат правее сепаратрисы, и части другой сепаратрисы.

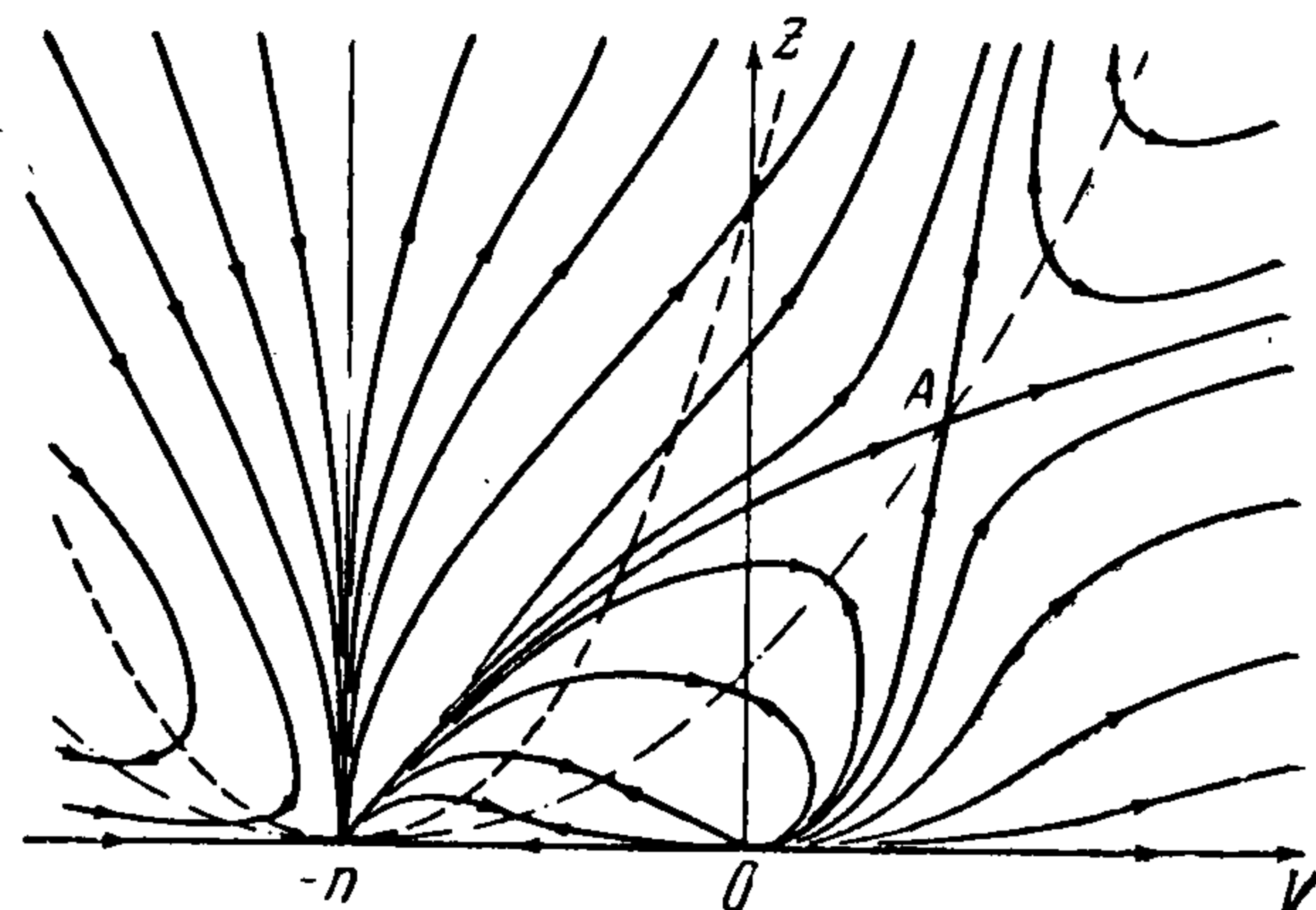
Можно показать, что проведенные рассуждения имеют силу при $n < 0$ для всех значений $\gamma > 1$. Таким образом, решение задачи Коши в случае $n < 0$ существует, единственно, определено для всех x и $t > 0$; оно непрерывно при $M \leq M_0$ и разрывно при $M > M_0$, где M_0 — число M , соответствующее сепаратрисе, проходящей через начало координат.

На фиг. 3 представлено поле интегральных кривых для случая $0 < n < \gamma < 3$. Его изучение показывает, что если образ точки O расположен на параболе (2.3) выше точки пересечения этой параболы с сепаратрисой, проходящей через точки $Z = 0$, $V = -n$ и A , то решение задачи Коши для всех значений M существует, но не единственно; каждому M соответствует бесконечно много разных решений, совпадающих, однако, при малых λ . Если же указанные точки расположены на параболе (2.3) в обратном порядке, то существует такое значение $M = M_0$, что для $M < M_0$ решение задачи Коши не продолжимо на все значения $t > 0$, а для $M > M_0$ это продолжение можно сделать бесконечным числом разных способов, т. е. решение не единственно; для $M = M_0$ решение продолжимо и единственно. Обе эти возможности действительно реализуются, так как при $\gamma = 2$ уравнением сепаратрисы, проходящей через точки $Z = 0$, $V = -n$ и A , является $Z = -[2n/(n-2)](V+n)$, поэтому координаты сравниваемых точек можно найти в явном виде и убедиться в том, что выбором n можно осуществить оба случая.

Не останавливаясь на том, как будет изменяться картина интегральных кривых при дальнейшем росте n , рассмотрим ее при $n > 2\gamma/(\gamma-1)$ (фиг. 4). Асимптотические формулы для $V \rightarrow \infty$ (4.1) показывают, что существует M_0 такое, что при $M \geq M_0$ решение задачи Коши непрерывно, единственно и определено для всех значений x и $t > 0$. Из фиг. 4 ясно видно вместе с тем, что для всех $M < M_0$ решение задачи Коши не продолжимо на все значения $t > 0$.

Аналогично обстоит при $n > 0$ и для $\gamma > 3$.

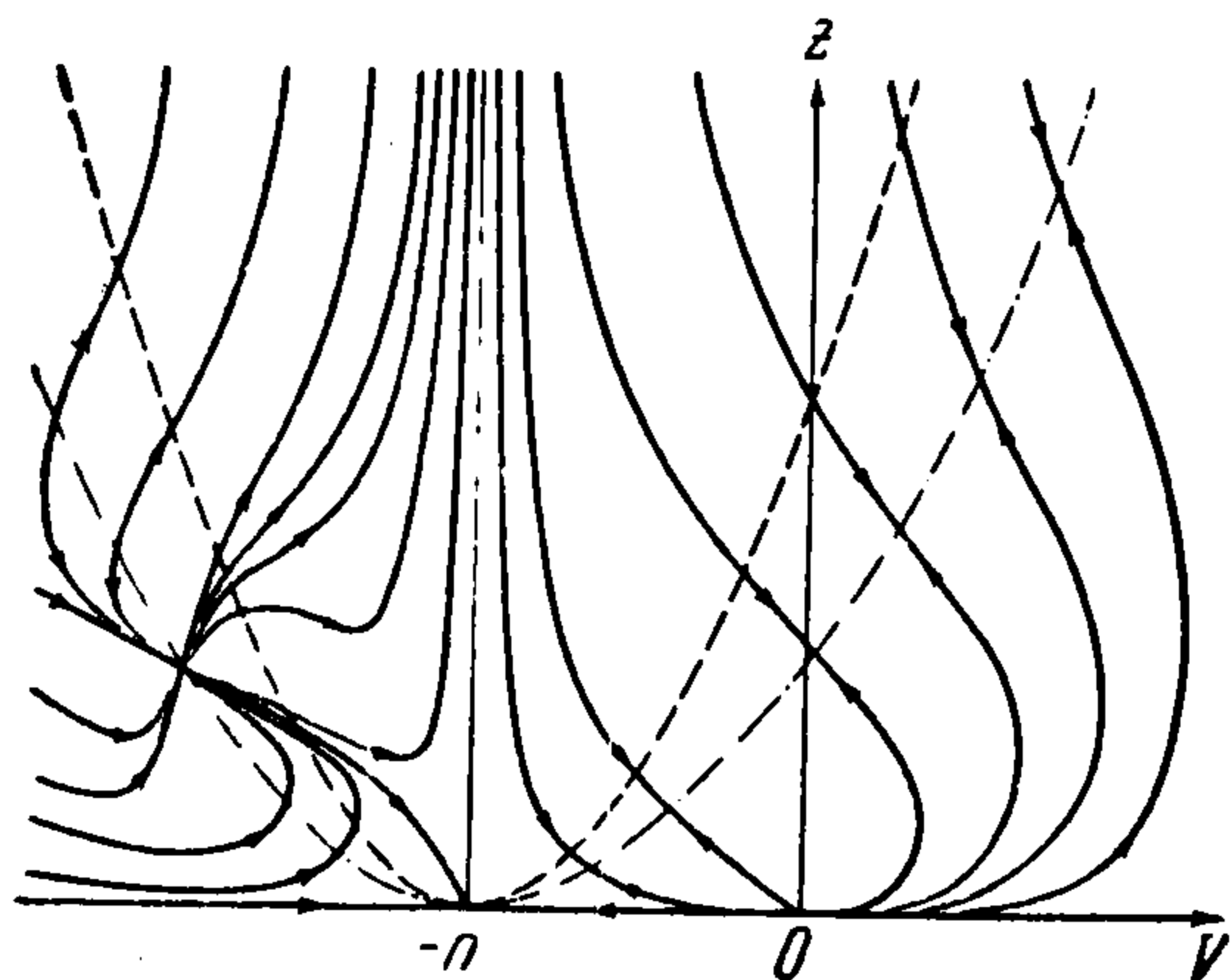
Окончательный результат можно сформулировать следующим образом. При $n > 0$ для любых $\gamma > 1$ решение задачи Коши либо продолжимо на все моменты $t > 0$ не для всех значений M , при этом для тех значений M , при которых решение продолжимо на все моменты $t > 0$, продолжение осуществимо или единственным образом для заданного M , или бесконеч-



Фиг. 3

ным числом способов; либо решение продолжимо для всех значений M , но тогда это продолжение можно осуществить бесконечным числом способов для каждого значения M .

Таким образом, мы видим, что при некоторых заданиях начальных данных решения задачи Коши для системы уравнений (1.1), являющейся системой типа Ковалевской, продолжимого на все значения $t > 0$, либо не существует вовсе, так как на плоскости x, t возникает непреодоли-



Фиг. 4

мая предельная линия (см. [7]), либо таких решений для одних и тех же начальных данных существует бесчисленное множество.

Факт потери единственности решения задачи Коши для таких систем при определенных начальных условиях представляется нам заслуживающим внимания и, насколько известно автору, в литературе не встречался.

Наконец, в случае $n = \infty$ уравнения интегрируются в элементарных функциях и решение выписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= M \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} - \frac{p_0}{\rho_0} \frac{t}{a} \\ p(x, t) &= p_0 \exp\left(\frac{x}{a} - M \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \frac{t}{a} + \frac{1}{2} \frac{p_0 t^2}{\rho_0 a^2}\right) \\ \rho(x, t) &= \rho_0 \exp\left(\frac{x}{a} - M \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \frac{t}{a} + \frac{1}{2} \frac{p_0 t^2}{\rho_0 a^2}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рассмотрение асимптотического поведения решения системы (1.13), (1.14), (1.15) при $V \rightarrow \infty$ показывает, что в случаях, когда решение задачи Коши существует и определено для всех x и $t > 0$, при $t \rightarrow \infty$ это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\approx C_1(x) V \exp\left(-\frac{V}{C}\right), \quad p(x, t) \approx C_2(x) V^\alpha \exp\left(-n \frac{V}{C}\right) \\ \rho(x, t) &\approx C_3(x) \exp\left[-(n-2) \frac{V}{C}\right], \quad t \approx C_4(x) \exp\left(\frac{V}{C}\right) \end{aligned}$$

где $\alpha > 0$, C — постоянные величины. Отсюда следует, что при $t \rightarrow \infty$

$$u \rightarrow 0, \quad p \rightarrow 0 \quad (n > 0), \quad p \rightarrow \infty \quad (n < 0), \quad \rho \rightarrow 0 \quad (n > 2)$$

$$\rho \rightarrow \infty \quad (n < 2), \quad RT = \frac{p}{\rho} \rightarrow 0$$

R — газовая постоянная, T — абсолютная температура).

Случай $n = \infty$ является в этом отношении исключительным, так как из формул (4.4) следует, что при $t \rightarrow \infty$ и $u \rightarrow -\infty$; при этом $RT = RT_0 = p_0/\rho_0$ движение изотермично). Отметим, что решение (4.4) не содержит γ .

§ 2. Задача о поршне. Задача об автотомодельном движении газа, возникающем при его вытеснении симметричным поршнем, ставится так [5]. В покоящемся газе, заполняющем все пространство, имеющем плотность ρ_0 и нулевое давление, из точки расширяется сфера (цилиндр или плоский слой в случаях цилиндрической и плоской симметрий) по закону

$r_0 = ct^{n+1}/(n+1)$, где r_0 — радиус поршня, t — время, c и n — постоянные. Требуется определить возникающее при этом движение идеального, нетеплопроводного, совершенного газа. Движение это описывается некоторым решением системы (1.1). Оно автомодельно, и функции u , p , ρ имеют вид [5]:

$$u(r, t) = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad p(r, t) = \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\lambda), \quad \rho(r, t) = \rho_0 R(\lambda) \quad (5.1)$$

$$\lambda = \mu \frac{ct^{n+1}}{r} \quad (\mu = \text{const})$$

а функции $V(\lambda)$, $P(\lambda) = \gamma^{-1} R(\lambda) Z(\lambda)$, $R(\lambda)$ находятся из обыкновенных уравнений (4), (5), (6) работы [5].

Заменим t на $t + n\tau$, положим $\mu = 1/n$, $V = nV_1$, $P = n^2P_1$, $R = R_1$, $c = (a/\tau)(n\tau)^{-n}$ и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. В результате получим для закона движения поршня формулу

$$r_0 = ae^{t/\tau} \quad (5.2)$$

а из формул (5.1) формулы (индексы опущены) (5.3)

$$u(r, t) = \frac{r}{\tau} V(\lambda), \quad p(r, t) = \rho_0 \frac{r^2}{\tau^2} P(\lambda), \quad \rho(r, t) = \rho_0 R(\lambda), \quad \lambda = \frac{a}{r} e^{t/\tau}$$

Дифференциальные уравнения при этом перейдут в

$$\frac{dZ}{dV} = Z \frac{[2 + \nu(\gamma - 1)]V(V-1)^2 - (\gamma - 1)V^2(V-1) - 2[V - (\gamma - 1)/\gamma]Z}{(V-1)[V^2(V-1) - [2/\gamma + \nu V]Z]} \quad (5.4)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{(V-1)^2 - Z}{V^2(V-1) - (2/\gamma + \nu V)Z} \quad (5.5)$$

$$(V-1) \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = \frac{V^2(V-1) - (2/\gamma + \nu V)Z}{Z - (V-1)^2} + \nu V \quad (5.6)$$

Предельный переход в безразмерных соотношениях на ударной волне приводит к формулам

$$V_2 - 1 = (V_1 - 1) \left[1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{Z_1 - (V_1 - 1)^2}{(V_1 - 1)^2} \right], \quad R_2 = R_1 \frac{V_1 - 1}{V_2 - 1} \quad (5.7)$$

$$Z_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{1}{(V_1 - 1)^2} \left[(V_1 - 1)^2 + \frac{2Z_1}{\gamma - 1} \right] \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} (V_1 - 1)^2 - Z_1 \right]$$

Характерными параболоми, соответствующими (2.2), (2.3), здесь являются

$$Z = (V - 1)^2, \quad Z = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} (V - 1)^2 \quad (5.8)$$

Картина, описывающая возможные переходы на плоскости V , Z по соотношениям (5.7), тождественна с фиг. 1, если на последней вместо n поставить 1.

Для построения решения задачи рассмотрим поле интегральных кривых уравнения (5.4). Оно изображено на фиг. 5. Стрелки указывают направление возрастания параметра λ вдоль интегральных кривых.

Очевидно, что решение задачи должно быть разрывным — по покоящемуся газу от движения поршня пойдет сильная ударная волна, приводящая газ в движение. Покою, т. е. состоянию впереди ударной волны, соответствует точка $Z = V = 0$ на плоскости V , Z . Состоянию газа за

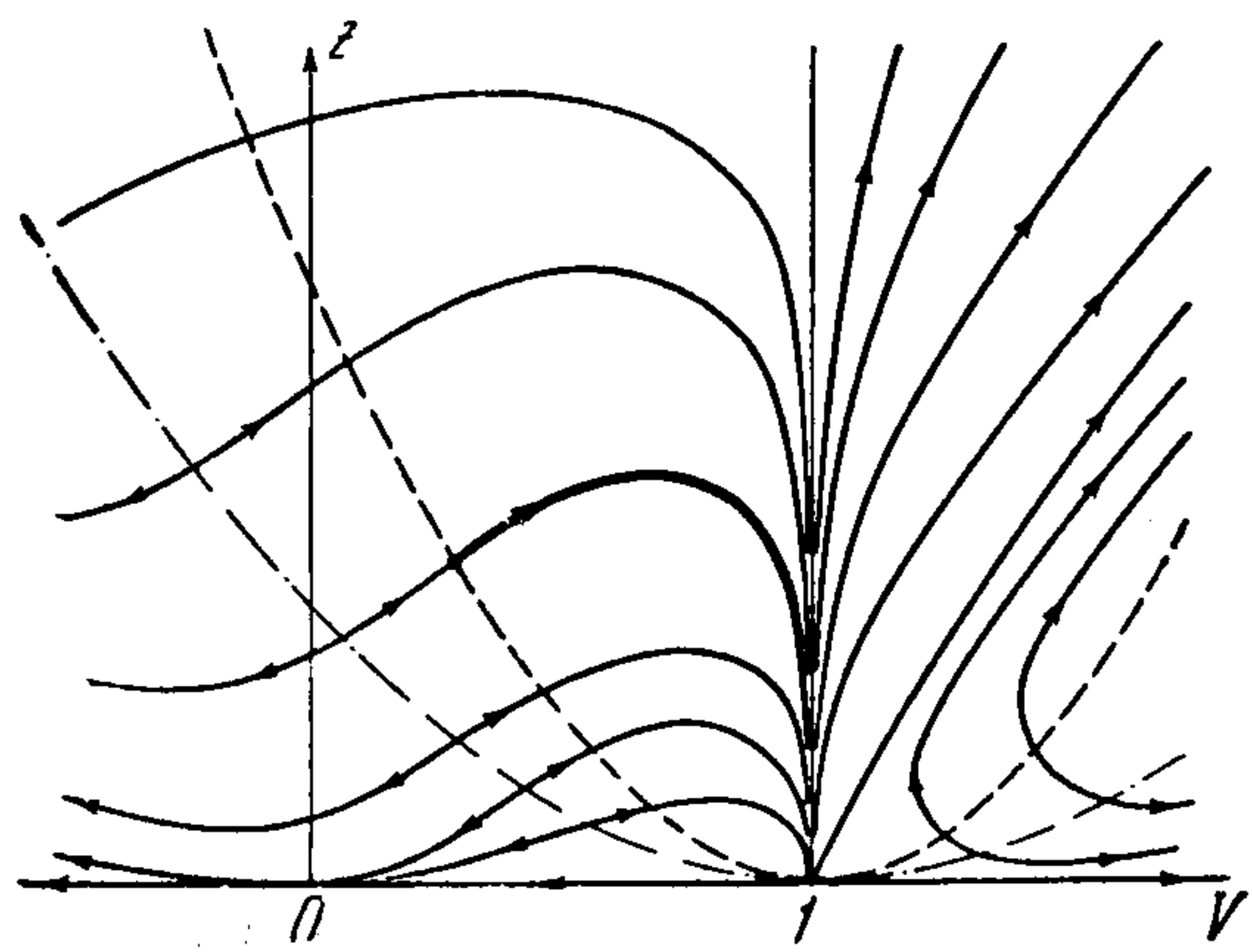
ударной волной соответствует образ этой точки на второй из парабол (5.8), т. е. точка

$$V_2 = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad Z_1 = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \quad (5.9)$$

Решение задачи дается интегральной кривой, идущей из точки (5.9) в точку $Z = 0, V = 1$.

Вблизи последней имеют место асимптотические представления

$$Z \approx C_1 (1 - V)^{\frac{2}{2+\nu\gamma}}, \quad \lambda \approx C_2 \left(V + \frac{2}{\nu\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$



Фиг. 5

$$R \approx C_3 \left(\frac{V + 2/\nu\gamma}{1 - V}\right)^{\frac{2}{2+\nu\gamma}} \quad (5.10)$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям на поршне, устанавливаем, что на поршне $\lambda = 1$. Это дает $C_2 = [\nu\gamma / (2 + \nu\gamma)]^{1/\nu}$. Фактическое вычисление решения задачи можно произвести путем, указанным в работе^[5]. Именно, исходя из точки (5.9), численным интегрированием строится интегральная кривая, которая вблизи точки $Z = 0, V = 1$ сопрягается с первой из асимптотических формул (5.10) и таким образом находится постоянная C_1 . Далее вычисляется распределение λ вдоль построенной интегральной кривой при помощи второй из формул (5.10) и уравнения (5.5). Наконец, при помощи уравнения (5.6) и условия на сильной ударной волне $R_2 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ вычисляется распределение R вдоль интегральной кривой. В результате сопряжения этого распределения с третьей из асимптотических формул (5.10) находится постоянная C_3 . Из этой формулы видно, что плотность на поршне равна бесконечности, чего следовало ожидать, ибо построенное здесь решение является предельным для обычных автомодельных решений при $n \rightarrow \infty$, а в работе^[5] показано, что при $n > 0$ плотность на поршне всегда равна бесконечности. В построенном решении, так же как и в решениях работы^[5] при $n > 0$, давление на поршне конечно [см. формулы (5.10)], и температура там равна нулю.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Л. И. Седову за обсуждение этой работы.

Поступила 27 VIII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехтеоретиздат, М., 1955.
3. Седов Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, т. IX, вып. 4, 1945.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, М., 1954.
5. Крашенинникова Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1955.
6. Черный Г. Г. Одномерные неустановившиеся движения совершенного газа с сильными ударными волнами. ДАН СССР, т. 107, № 5.
7. Григорян С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения), ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.