Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ГРАНИЧНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕИДЕАЛЬНО УПРУГИХ СРЕДАХ

Е. И. Шемякин

(Ленинград)

В задачах математической физики приходится рассматривать вместо идеально упругой модели некоторые другие, учитывающие несовершенства реальных сред. При этом запросам практики удается удовлетворить, не выходя за рамки линейных задач. Такими, например, являются задачи теоретической сейсмологии о распространении колебаний от источника (взрыв), которые с большой степенью точности укладываются в рамки линейных процессов.

1. Соотношения между напряжениями и деформациями. Уравнения движения. В целях краткости примем символическую запись соотношений, смысл которой очевиден. Пусть соотношения между напряжениями σ и деформациями ε заданы следующим образом:

$$\sigma = k\varepsilon + K_t\varepsilon \tag{1.1}$$

где k — упругая постоянная, а K_t — некоторый линейный оператор (или дифференциальный по времени с постоянными коэффициентами, или интегральный по времени с разностным ядром — вольтерровского типа). Соотношения (1.1) в случае изотропного и однородного тела, которое мы и будем рассматривать, арактеризуются двумя упругими постоянными λ, μ (постоянные Лямэ) и одним оператором K_t, который будет входить в соотношения с разными постоянными коэффициентами λ', μ'. В дальнейшем предполагается также, что

$$\omega \equiv \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu} \tag{1.2}$$

— ограничение предлагаемого ниже метода.

Введение дополнительных членов в закон Гука согласно (1.1) в какой-то мере учитывает диссипацию энергии в реальных средах при колебаниях частиц.

Поэтому будем считать, что (1.1) описывает среду с диссипацией энергии; такую среду будем в дальнейшем называть D-средой.

Уравнения движения в смещениях можно записать в форме, аналогичной форме Ламэ для идеально упругой среды, если упругие постоянные λ, μ заменить на линейные (временные) операторы:

$$\Lambda = \lambda + \lambda' K_t, \qquad M = \mu + \mu' K_t \tag{1.3}$$

Итак, уравнения движения D-среды имеют вид:

$$(\Lambda + 2M)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - M\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \rho\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ — вектор смещения, записанный в декартовой системе координат (x, y, z).

Уравнения (1.4) можно записать в ином виде, учитывая перестановочность операций K_t и дифференцирование по координатам, и условие (1.2):

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,(1 + \omega K_t)\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(1 + \omega K_t)\,\mathbf{u} = \rho\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

Представим вектор смещения $\mathbf{u}$ обычным образом в виде суммы

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi} \tag{1.6}$$

где φ — скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ — векторный потенциалы поля смещений. Тогда (1.5) можно заменить эквивалентной[1] системой уравнений уже для неизвестных функций $\varphi(x, y, z, t)$ и $\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t)$:

$$\begin{aligned} (1 + \omega K_t)\,\Delta\varphi &= a^2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}\right) \\ (1 + \omega K_t)\,\Delta\boldsymbol{\psi} &= b^2\,\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} \qquad \left(b = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь a и b — величины, обратные скоростям распространения продольных и поперечных волн в упругой среде соответственно. Уравнения (1.7) по аналогии с классической теорией упругости и из соображений удобства называем ниже «волновыми».

Символическое соотношение (1.1) или, что то же самое, уравнения движения (1.5) характеризуют почти все предложенные до настоящего времени модели неидеальной теории упругости. В самом деле, последние могут быть разбиты на две группы:

a) первая характеризуется дифференциальным оператором K_t, линейным и с постоянными коэффициентами; к этой группе относятся вязко-упругая среда — модель Фойгта [1], упругая среда с диссипацией энергии — модель Ньюлапдса [2];

b) вторая группа характеризуется интегральным оператором K_t вольтерровского типа с разностным ядром; к ней относятся модель среды с упругим последействием — модель Больцмана [3] и модель среды с релаксацией (Максвелл [4]), содержащаяся фактически в модели Больцмана. Эти две группы целиком укладываются в общий класс задач, рассматриваемый в статье.

Не имея возможности в краткой статье дать обзор работ, посвященных исследованию упомянутых выше конкретных моделей (группы «a» и «b»), укажем только некоторые из работ. В статье Томпсона [5] излагается история вопроса и приводится общий вывод уравнений движения вязко-упругой среды и среды с упругим последействием (на основе термодинамических соображений). Исследования Н. Риккера [6] и С. С. Войта [7] посвящены изучению нестационарных процессов в безграничной вязко-упругой среде, описываемых одним волновым уравнением (1.7) в предположении, что оператор $K_t \equiv \partial / \partial t$.

Динамические задачи для среды с упругим последействием рассматривались В. Г. Гоголадзе [8] и Б. В. Дерягиным [9]. В этом случае оператор K_t определен следующим образом:

$$K_t f(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} h(t - \tau)\, f(\tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

Здесь $h(t)$ — функция последействия, а $f(x, y, z, t)$ — из класса функций, на которых определен оператор.

Второе замечание относится к упомянутым выше ограничениям (условия (1.2) и наличие в (1.1) одного лишь оператора K_t).

[1] Представление $\mathbf{u}$ в виде (1.6) справедливо с точностью до лапласова вектора, в этом же смысле понимается эквивалентность (1.5) и (1.7).

При рассмотрении динамических задач для D-сред, по-видимому, целесообразным представляется следующий путь исследований. Поскольку заранее не ясно, какие именно должны быть выбраны операторы K_t и параметры λ', μ', то необходимо прежде всего попытаться получить решение для широкого класса операторов и хотя бы для некоторых λ', μ' (например, подчиненных условию (1.2), что равносильно введению одного параметра ω). После этого качественные закономерности, характеризующие особенности распространения волн в D-средах при конкретных K_t [например, $K_t = \partial / \partial t$ или (1.8)], должны быть проверены экспериментально. И лишь после этого необходимо переходить к подробным исследованиям построенных решений. С этой точки зрения упомянутые ограничения носят не столь искусственный характер, как это кажется сначала.

§ 2. Постановка нестационарных задач для неидеально упругих сред. Рассмотрим следующую задачу. Пусть U — некоторый объем, заполненный D-средой и ограниченный поверхностью S. Рассмотрим колебания частиц этого тела под действием приложенных в момент $t = 0$ на его поверхности воздействий. Считаем, что среда покоится при $t < 0$, а воздействия реализуются заданием на поверхности S напряжений:

$$T_1 = L_1(\mathbf{u})|_S, \qquad T_2 = L_2(\mathbf{u})|_S, \qquad T_3 = L_3(\mathbf{u})|_S \tag{2.1}$$

Здесь L_1, L_2, L_3 — обычные линейные операторы в законе Гука, но λ, μ заменены на Λ и M по формулам (1.3) и функции T_1, T_2, T_3 имеют вид [1]:

$$T_i = f_i(x, y, z)|_S\, a_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Функции $a_i(t)$ характеризуют зависимость воздействий T_i от времени (в частности, в качестве $a_i(t)$ можно взять $\delta(t)$ — символическую функцию Дирака — или $\varepsilon(t)$ — единичную функцию Хевисайда); $f_i(x, y, z)|_S$ характеризуют пространственное распределение воздействия (в конкретных задачах, приводимых ниже, мы будем рассматривать в качестве f_i функцию $\delta(r)/r$).

Итак, требуется найти $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ из уравнений движения (1.4) при нулевых начальных условиях

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \qquad \partial\mathbf{u}/\partial t|_{t=0} = 0 \tag{2.3}$$

и граничных условиях (2.1).

Заметим, что в силу линейности задачи (и ради краткости) ниже рассматриваются по отдельности задачи при граничных условиях:

$$\begin{array}{lll} 1) & T_1 \neq 0, & T_2 = T_3 = 0 \\ 2) & T_2 \neq 0, & T_1 = T_3 = 0 \\ 3) & T_3 \neq 0, & T_1 = T_2 = 0 \end{array} \tag{2.4}$$

В дальнейшем будем рассматривать одну из этих задач, например первую. Все рассуждения можно просто перенести и на задачи 2 и 3 из (2.4).

Первой вспомогательной задачей назовем задачу (1.4) — (2.3) — (2.1) при $K_t \equiv 0$ и t, замененном на τ.

---

[1] Запись $f_i(x, y, z)|_S$ означает, что переменные x, y, z связаны уравнением $F(x, y, z) = 0$ поверхности S.

Таким образом, в качестве вспомогательного нам будет служить решение нестационарной задачи для упругой среды, причем граничные воздействия по-прежнему заданы в виде (2.2), но все $a_i(t)$ заменены на $\delta(\tau)$.

В качестве второй вспомогательной задачи рассмотрим следующую одномерную задачу:

$$(1+\omega K_t)\frac{\partial^2 R(t,\ \tau)}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^2 R(t,\ \tau)}{\partial t^2}$$

$$R\Big|_{t=0}=\frac{\partial R}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \qquad (1+\omega K_t)R(t,\ \tau)\,|_{\tau=0}=a(t) \tag{2.5}$$

Теорема. Решение задачи (1.4) — (2.3) — (2.1) дается формулой

$$\mathbf{u}(x,\ y,\ z,\ t)=\int_0^\infty \mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)R(t,\ \tau)\,d\tau \tag{2.6}$$

где $\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)$ — решение первой вспомогательной задачи, а $R(t,\ \tau)$ — решение задачи (2.5).

Доказательство. Подставляя $\mathbf{u}(x,\ y,\ z,\ t)$ в виде (2.6) в уравнение движения (1.5) и допуская возможность двукратного интегрирования по координатам под знаком интеграла, получим

$$\int_0^\infty (1+\omega K_t)R(t,\ \tau)\,[(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)\ -$$

$$-\ \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)]\,d\tau=\rho\int_0^\infty\frac{\partial^2 R(t,\ \tau)}{\partial t^2}\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)\,d\tau$$

Так как $\mathbf{u}_0$ является решением вспомогательной задачи (т. е. удовлетворяет уравнениям Ляме), то

$$\rho\int_0^\infty (1+\omega K_t)R(t,\ \tau)\frac{\partial^2\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)}{\partial\tau^2}\,d\tau=\rho\int_0^\infty\frac{\partial^2 R(t,\ \tau)}{\partial t^2}\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)\,d\tau$$

Воспользуемся равенством

$$\int_0^\infty R(t,\ \tau)\frac{\partial^2\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)}{\partial\tau^2}\,d\tau=\int_0^\infty\frac{\partial^2 R\ (t,\ \tau)}{\partial\tau^2}\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)\,d\tau \tag{2.7}$$

которое получается двукратным интегрированием по частям.

При этом нам дополнительно пришлось предположить выполнение условий (типа условия излучения)

$$R^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\mathbf{u}_0}{R}\right]\to 0 \qquad \text{при } \tau\to\infty \tag{2.8}$$

Последние условия обычно автоматически удовлетворены в наших задачах. Тогда $\mathbf{u}(x,\ y,\ z,\ t)$ удовлетворяет (1.5) в силу уравнения для $R(t,\ \tau)$.

Начальные условия для $\mathbf{u}(x,\ y,\ z,\ t)$, представленной в виде (2.6), удовлетворены в силу нулевых начальных условий для $R(t,\ \tau)$. При проверке граничных условий мы исходим из того, что основная задача разбита на три согласно (2.4), и проверяем решение только для первой из них. Подставим $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ в виде (2.6) в (2.1). Предполагая законность выполнения операции L_1 под знаком интеграла по τ, получим следующую запись первого из граничных условий:

$$f_1(x, y, z)|_S a(t) = \int_0^\infty L_1[\mathbf{u}_0(x, y, z, \tau)]\Big|_S (1 + \omega K_1) R(t, \tau)\, d\tau \tag{2.9}$$

Если учесть, что

$$L_1[\mathbf{u}_0(x, y, z, \tau)]|_S = f_1(x, y, z)|_S\, \delta(\tau)$$

(см. первую вспомогательную задачу), то выполнение (2.9) очевидно в силу граничного условия для $R(t, \tau)$ при $\tau = 0$ и для произвольной $f_1(x, y, z)|_S$. Аналогичным образом могут быть проверены граничные условия и в задачах 2 и 3 из (2.4). Основная теорема доказана.

Замечание 1. Решение $\mathbf{u}_0(x, y, z, \tau)$ для многих интересных задач динамической теории упругости может быть построено или методом функционально-инвариантных решений В. И. Смирнова, С. Л. Соболева [10], или методом неполного разделения переменных, предложенным В. И. Смирновым [11] и развитым Г. И. Петрашень [12, 13].

Так, например, построены решения для упругого полупространства при точечных нестационарных граничных воздействиях [13, 14], для слоисто-изотропных сред с плоско-параллельными границами раздела [15], для сред со сферическими или цилиндрическими границами раздела [16].

Замечание 2. Для того чтобы считать решение $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ в этих задачах построенным, нужно указать метод построения и исследования функций $R(t, \tau)$, что мы и выполним в следующем параграфе.

Тем самым основная формула (2.6) позволяет построить решение указанных в первом замечании граничных задач и для D-сред (при некоторых ограничениях на оператор K_t того же типа, что и прежде). В этом смысле основная формула содержит общий качественный результат о конструировании решений динамических задач для D-сред при помощи уже известных решений $\mathbf{u}_0(x, y, z, \tau)$ и некоторых специальных функций $R(t, \tau)$.

§ 3. Функции $R(t, \tau)$.

Рассмотрим задачу (2.5). В силу нулевых начальных условий задачи решение можно искать в виде

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} R_0(s, \tau)\, e^{st} ds \qquad (\operatorname{Re} s = \sigma > 0)$$

при этом применение оператора K_t к $R(t, \tau)$ приводит к формуле

$$K_t R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} R_0(s, \tau)\, K(s)\, e^{st} ds \quad \left(K(s) = \int_0^\infty e^{-st} K_t\, \delta(t)\, dt\right) \tag{3.1}$$

Не останавливаясь на элементарных выкладках, связанных с нахождением $R_0(s, \tau)$ из задачи (2.5), выпишем сразу окончательный результат:

$$R(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{A(s)}{1 + \omega K(s)} \exp\left(st - \frac{s\tau}{\sqrt{1 + \omega K(s)}}\, ds\right) \tag{3.2}$$

$$\left(A(s) = \int_0^\infty a(t)\, e^{-st} dt\right)$$

Здесь $K(s)$ из (3.1), а контуром интегрирования является прямая $\operatorname{Re} s = \tau > 0$, параллельная мнимой оси в плоскости комплексной переменной s; ветвь радикала $\sqrt{1+\omega K(s)}$ фиксирована условием

$$\arg\sqrt{1+\omega K(s)}=0 \qquad \text{при } s>0$$

Проверку решения можно выполнить непосредственной подстановкой (3.2) в (2.5), причем необходимо учесть соотношение (3.1). При этом не следует останавливаться на вопросах законности дифференцирования под знаком контурного интеграла и предельных переходов при проверке начальных и граничных условий, так как все эти операции законны с точки зрения теории обобщенных функций, с которыми мы имеем дело в наших задачах.

Если применить теорему Бореля к (3.2), то

$$R(t,\ \tau)=\int_0^t a(t_1)\,R_\delta(t-t_1,\ \tau)\,d\tau$$

Тогда и (2.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{u}(x,\ y,\ z,\ t)=\int_0^t a(t_1)\left[\int_0^\infty \mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)\,R_\delta(t-t_1,\ \tau)\,d\tau\right]dt_1 \tag{3.3}$$

Из последнего, очевидно, следует, что основной интерес представляет исследование функции $R_\delta(t,\ \tau)$:

$$R_\delta(t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{1+\omega K(s)}\exp\left(st-\frac{s\tau}{\sqrt{1+\omega K(s)}}\right)ds \tag{3.4}$$

Заметим, прежде всего, что $R_\delta(t,\ \tau)\to\delta(t-\tau)$ при $\omega\to 0$. Тогда в пределе $\omega=0$ формула (3.3) дает решение упругой задачи $\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ t)$ при воздействии, изменяющемся во времени по закону $a(t)$.

В частности, если в качестве $a(t)$ выбрать достаточно гладкие функции, то можно оправдать и классический смысл предельных решений и сам предельный переход $\omega\to 0$.

Отметим существенное свойство подынтегральной функции в $R_\delta(t,\ \tau)$. Выражение $1+\omega K(s)$ [а с ним и вся подынтегральная функция в (3.2)] не имеет особенностей в правой полуплоскости комплексной переменной s, включая мнимую ось. Для интегральных операторов K_t этот факт непосредственно следует из некоторых неравенств, полученных из энергетических соображений; для дифференциальных операторов K_t это, чаще всего, очевидный факт.

Используя эту особенность подынтегрального выражения в (3.4), интегралу $R_\delta(t,\ \tau)$ можно дать вещественное представление в виде интеграла Фурье. Для этого необходимо деформировать контур интегрирования $\operatorname{Re} s=\sigma>0$ в мнимую ось и сделать замену переменной интегрирования в (3.4): $s=i\lambda$. Тогда

$$R_\delta(t,\ \tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{\vartheta}\cos\left[\lambda\left(t-\frac{\theta}{\lambda}\right)-\varphi\right]\frac{d\lambda}{\rho} \tag{3.5}$$

где

$$1+\omega K(i\lambda)=u+iv=\rho e^{i\varphi},\qquad \vartheta=\exp\left(-\frac{\lambda\tau}{\sqrt{\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}\right),\qquad \theta=\frac{\lambda\tau}{\sqrt{\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}$$

Наличие в подынтегральной функции множителя e^{ϑ} и слагаемого θ под знаком косинуса указывает на затухание и дисперсию при распространении возмущений в D-средах.

§ 4. Решение нестационарной задачи для вязко-упругого полупространства. В этом случае оператор $K_t = \partial / \partial t$, соответственно с этим упрощаются уравнения (1.5) и граничные условия, а постановка нестационарной задачи принимает следующий вид.

Найти в полупространстве $z > 0$, заполненном вязко-упругой средой, решение $\mathbf{u}(r, \theta, z, t)$ уравнения (1.5) при нулевых начальных условиях (2.3) и сосредоточенных воздействиях на границе[1]. Последнее означает, что при $z = 0$ в точке $r = 0$ заданы функции

$$\text{a)}\quad T_{zz} = \frac{\delta(r)}{r} a(t), \qquad T_{rz} = 0 \, (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad \begin{pmatrix}\text{осесимметричное}\\ \text{воздействие}\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$\text{b)}\quad T_{xz} = \frac{\delta(r)}{r} a(t), \qquad T_{zz} = T_{yz} = 0 \quad \begin{pmatrix}\text{несимметричное}\\ \text{касательное воздействие}\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

В случае вязко-упругой среды вторая вспомогательная функция имеет вид[2]:

$$R_\delta(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{1 + \omega s} \exp\left(st - \frac{s\tau}{\sqrt{1 + \omega s}}\right) ds, \qquad \operatorname{Re} s = \sigma > 0 \tag{4.3}$$

Для получения решения поставленной задачи согласно основной формуле (2.6) необходимо знать $\mathbf{u}_0(r, \theta, z, \tau)$. Последнее можно получить, например, формальным дифференцированием по t решений динамических задач для упругого полупространства [13, 14].

В случае осесимметричного воздействия (4.1) $\mathbf{u}_0(r, \theta, z, \tau)$ имеет вид:

$$\mathbf{u}_0 = u_{0r}\mathbf{r}_0 + u_{0z}\mathbf{k}$$

$$u_{0r} = \frac{1}{2\pi\mu b} \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left[\frac{2 + \zeta^2}{R(\zeta)} g(\gamma, \zeta) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2\sqrt{1 + \zeta^2}\sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}}{R(\zeta)} g(1, \zeta) \right] d\zeta \right\} kJ_1(kr)\, dk$$

$$u_{0z} = \frac{1}{2\pi\mu b} \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left[\frac{(2 + \zeta^2)\sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}}{R(\zeta)} g(\gamma, \zeta) - \right.\right. \tag{4.4}$$
$$\left.\left. - \frac{2\sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}}{R(\zeta)} g(1, \zeta) \right] d\zeta \right\} kJ_0(kr)\, dk$$

$$g(\gamma, \zeta) = \exp\left[k\left(\zeta \frac{\tau}{b} - z\sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}\right)\right]$$

где

$$\gamma = \frac{a}{b}, \qquad M_a = \sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}, \qquad M_b = \sqrt{1 + \zeta^2}$$
$$R(\zeta) = (2 + \zeta^2)^2 - 4M_aM_b, \qquad \operatorname{Re}\zeta = \sigma > 0 \tag{4.5}$$
$$\arg M_a = \arg M_b = 0 \qquad \text{при } s > 0$$

---

[1] Из соображений удобства мы избрали цилиндрическую систему координат (r, θ, z), связанную с декартовой системой координат (x, y, z) обычными формулами перехода.

[2] Аналогичный интеграл изучался численными методами в работе Н. Н. Зверева [19].

Аналогичное представление имеет решение задачи с граничным условием (4.2) [14].

Коротко остановимся на некоторых физических следствиях из полученных решений. Для этой цели проведем в отдельности исследование $\mathbf{u}_0(r, \theta, z, \tau)$ и $R(t, \tau)$ и проинтегрируем произведение этих функций. В результате согласно основной формуле (2.6) получим представление о поведении решения $\mathbf{u}(r, \theta, z, t)$ нашей задачи. При этом в целях краткости рассмотрим лишь отдельные типичные выражения, участвующие в описании поля смещений.

Рассмотрим прежде $\mathbf{u}_0(r, \theta, z, \tau)$. Если воспользоваться асимптотическими методами исследования (при больших τ) решения упругой задачи, разработанными в [12, 13], то можно дать следующее представление главных частей поля возмущений, характеризующих объемные волны.

Слагаемое

$$-\frac{1}{2\pi\mu b}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{R(\zeta)}g(1, \zeta)\,d\zeta\right\}kJ_0(kr)\,dk \tag{4.6}$$

взятое из (4.4) (u_{0z} — составляющая), характеризует особенность решения в окрестности поверхности $\tau^2 = b^2(r^2 + z^2)$ и имеет следующую главную часть там:

$$-\frac{z}{2\pi\mu\sqrt{r}}\left[\frac{b}{(\tau^2-b^2z^2)^{3/2}}\right]^{1/2}\frac{\sqrt{|1+\gamma^2\zeta_b^2|}}{R(\zeta_b)}\,\delta\left(\frac{1}{b}\sqrt{\tau^2-b^2z^2}-r\right)$$

$$\left(\zeta_b = \frac{i\tau}{\sqrt{\tau^2-b^2z^2}}\right) \tag{4.7}$$

Аналогичным образом могут быть исследованы все остальные слагаемые из (4.4). Кроме того, можно провести обычным способом исследование поверхностных и конических волн, но последнее затем потребует численного интегрирования. В первую же очередь нас интересуют объемные (продольные и поперечные) волны, описываемые при помощи (4.7). Для полного описания объемных волн необходимо выполнить интегрирование по τ с функцией $R_\delta(t, \tau)$ согласно основной формуле результатов (4.7). Если учесть, что для $\delta(\xi)$ можно указать простую формулу интегрирования

$$\int_\alpha^\beta f(\tau, r, \theta, z)\,\delta[\xi(\tau)]\,d\tau = \frac{f(\tau_0, r, \theta, z)}{\xi'(\tau_0)} \qquad \begin{pmatrix}\xi(\tau_0)=0\\ \alpha<\tau_0<\beta\end{pmatrix} \tag{4.8}$$

то окончательный результат для приведенного слагаемого поля смещений можно представить в следующем виде: составляющая (осесимметричное воздействие)

$$u_z = \frac{z}{2\pi\mu r^2}\,\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\left[\frac{\sqrt{|1+\gamma^2\zeta_b^2|}}{R(\zeta_b)}R_\delta(t, \tau)\right]_{\tau=\tau_0} \tag{4.9}$$

$$\zeta_b = \frac{i\sqrt{r^2+z^2}}{r}, \qquad \tau_0 = b\sqrt{r^2+z^2}$$

Таким образом, все сводится к изучению функции $R(t, \tau)$ [или $R_\delta(t, \tau)$] согласно (3.3), где $\tau = a\sqrt{r^2+z^2}$ в случае продольных волн и $\tau = b\sqrt{r^2+z^2}$ в случае поперечных волн.

Как было указано в конце § 3, интегралу $R_\delta(t, \tau)$ можно дать представление в виде интеграла Фурье

$$R_\delta(t, \tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda\tau}{\sqrt{\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left[\lambda\left(t-\frac{\tau}{\sqrt{\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)-\varphi\right]\frac{d\lambda}{\rho} \tag{4.10}$$

$$\rho = \sqrt{1+\omega^2\lambda^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\omega\lambda$$

Затухание и дисперсия волн в стационарном режиме характеризуются функциями

$$\exp\left(-\frac{\lambda\tau}{\sqrt{\rho}}\sin\frac{\varphi}{2}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{\rho}}\cos\frac{\varphi}{2} \tag{4.11}$$

соответственно. Если подставить значения τ (для продольных и поперечных волн по отдельности) в (4.11), то можно сравнить затухание и дисперсию для продольных и поперечных волн.

Рассмотрим приближенные выражения функций (4.11). При $\omega\lambda < 1$ будем иметь в первом приближении $\exp(-{}^1/_2\lambda^2\omega\tau)$ — затухание и отсутствие дисперсии (последнее указывает на то, что при частотах $\lambda < \omega^{-1}$ дисперсия является эффектом более высокого порядка по сравнению с затуханием). При $\omega\lambda > 1$ затухание и дисперсия имеют одинаковый порядок. Экспериментальное определение величины ω, как указанной качественной границы на шкале частот, может служить проверкой пригодности рассматриваемой модели для описания динамических процессов в реальных средах.

Функции $R_\delta(t, \tau)$ можно дать и приближенное выражение

$$R_\delta(t, \tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\omega\tau}}\exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2\omega\tau}\right) \tag{4.12}$$

Последнее представление удобно при изучении нестационарных явлений. В самом деле, (4.12) указывает[1] на следующие эффекты: 1) в фиксированной точке пространства максимум возмущения достигается при $t=\tau$, т. е. возмущения распространяются в вязко-упругой среде со скоростями $1/a$ и $1/b$ соответственно; 2) для импульсных воздействий форма волны имеет куполообразный вид, тем более резко очерченный (при фиксированном τ), чем меньше параметр ω; 3) форма волны приобретает все более «размытый» характер с расстоянием («расползание» пропорционально корню квадратному из расстояния, пройденного максимумом возмущения); 4) дополнительное затухание волн вследствие диссипации энергии, на что указывает наличие множителя $(\omega\tau)^{-1/2}$ в (4.12).

---

[1] Следует помнить, что в (4.12) τ нужно заменять на $a\sqrt{r^2+z^2}$ для продольных волн и на $b\sqrt{r^2+z^2}$ для поперечных.

Экспериментальное изучение последовательного изменения формы однотипной волны может дать способ определения величины ω для реальных сред.

Наконец, заметим, что если снять условие (1.2) и ввести дополнительное обозначение

$$\omega_1 = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu}$$

то формулы для главных частей (4.9) должны быть изменены только для продолных волн с заменой $R_\delta(t, \tau)$ на

$$R_{\delta p}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{1 + \omega s} \exp\left(st - \frac{s\tau}{\sqrt{1 + \omega_1 s}}\right) ds \tag{4.13}$$

Заметим еще, что из физических соображений $\omega_1 \leqslant \omega$ (это согласуется и с экспериментальными данными).

§ 5. Решение нестационарной задачи для полупространства, заполненного средой с упругим последействием. В этом случае оператор K_t определен, как указано в § 1, соотношением (1.9). Функция $h(t-\tau)$ неизвестна, ее необходимо определить из опытных данных о физических особенностях распространения волн в реальных средах. При этом можно идти двумя путями. Можно заранее предположить конкретный вид $h(t-\tau)$, строить решение задачи и сравнением с экспериментальными данными выбрать подходящие $h(t-\tau)$. Мы же изберем другой путь. А именно, оставляя $h(t-\tau)$ неизвестной, налагаем на нее следующие простые условия:

(a) $h(t, \tau) \equiv h(t-\tau)$ (В. Вольтерра)

(b) $h(t)$ — положительная и убывающая при $t \to \infty$ функция (5.1)

(c) $\omega \int_0^\infty h(t)\, dt < 1$

(последнее неравенство получено В. Г. Гоголадзе [8] из условия положительности потенциальной энергии деформации в рассматриваемой среде).

В этом параграфе указывается на принципиальную возможность определения $h(t)$ из экспериментальных данных о распростанении волн.

Единственное отличие решения задачи для полупространства, заполненного средой с упругим последействием, от задачи § 4 заключается только в том, что в основной формуле (2.6), дающей решение нашей задачи, нужно взять $\mathbf{u}_0(r, \theta, z, \tau)$ из (4.4), а в качестве $R_1(t, \tau)$

$$R_1(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{A(s)}{1 - \omega H(s)} \exp\left(st - \frac{s\tau}{\sqrt{1 - \omega H(s)}}\right) ds \tag{5.2}$$

Здесь $A(s)$ из (3.2),

$$\operatorname{Re} s = \sigma > 0, \qquad \arg \sqrt{1 - \omega H(s)} = 0 \qquad \text{при } s > 0$$

$$H(s) = \int_0^\infty h(t)\, e^{-st}\, dt$$

Рассмотрим подробнее функцию

$$R_{1\delta}(t,\ \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{1-\omega H(s)}\exp\left(st - \frac{s\tau}{\sqrt{1-\omega H(s)}}\right)ds \tag{5.3}$$

Подынтегральная функция в (5.3) регулярна в правой полуплоскости комплексного переменного s, включая мнимую ось. Последнее справедливо в силу неравенства

$$\omega\,|H(s)| < 1 \tag{5.4}$$

вытекающего из условий (b) и (c) на $h(t)$ (5.1). Тогда к (5.3) можно применить прежний метод исследования сведением к интегралу Фурье; в результате простых преобразований получим

$$R_{1\delta}(t,\ \tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda\tau}{\sqrt{\rho_1}}\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left[\lambda\left(t - \frac{\tau}{\sqrt{\rho_1}}\cos\frac{\varphi_1}{2}\right) - \varphi_1\right]\frac{d\lambda}{\rho_1} \tag{5.5}$$

$$\rho_1 e^{i\varphi_1} = 1 - \omega H(i\lambda) = 1 - \omega u_1 + \omega v_1 \qquad (H(i\lambda) = u_1 - iv_1)$$

В силу неравенства (5.4) интегралу в (5.5) можно дать следующее приближенное представление:

$$R_{1\delta}(t,\ \tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\lambda\omega\tau}{2}v_1\right)\cos\lambda\left(t-\tau-\frac{\omega\tau}{2}u_1\right)d\lambda$$

Величины $\exp(-{}^1/_2\lambda\omega\tau v_1)$ и ${}^1/_2\,\omega\tau u_1$ могут быть определены экспериментально, тем самым будут известны $u_1(\lambda)$ и $v_1(\lambda)$, после чего для отыскания $h(t)$ можно использовать соотношение

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(i\lambda)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda$$

Последнее получено из формулы обращения Меллина для $H(s)$ переходом к интегралу Фурье [что справедливо в силу неравенства (5.4)].

Заключение. Первоначально для построения решений конкретных задач § 4 и 5 был применен метод неполного разделения переменных, причем в качестве исходной была взята система «волновых» уравнений (1.7). Последующее применение преобразования А. М. Эфроса [18] позволило указать для полученных решений основную формулу (2.6). Дальнейшие обобщения как на указанный выше класс задач для D-сред, так и на другие граничные нестационарные задачи (для слоисто-изотропных D-сред с плоскопараллельными границами раздела; для областей, заполненных D-средой и имеющих сферические или цилиндрические границы раздела) получены при помощи основной формулы. Некоторые ограничения на оператор K_t, характеризующий D-среды, того же типа, что и в основном тексте статьи, и привлечение в качестве вспомогательного материала для построения $\mathbf{u}_0(x,\ y,\ z,\ \tau)$ в соответствующих задачах результатов из [15,16] — все, чего потребовало это обобщение.

Заметим также, что если снять упомянутые ограничения, то можно построить решение методом неполного разделения переменных для перечисленных задач в случае D-сред, но непосредственное исследование кажется нам затруднительным. В некоторых простых задачах (например, для полупространства, заполненного D-средой) исследование может быть произведено при помощи обобщения преобразования Эфроса и асимптотических методов исследования полей возмущений. В частности, формула (4.13) получена именно этим путем.

Поступила 5 VI 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Voigt W. Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Kristalle. Abhanld. d. Math. Klasse d. Königl. Ges. d. Wis., Göttingen, Bd. 36, 1892.
2. Newlands M. Lamb's problem with internal dissipation. The Journ. Acoust Soc. Amer., vol. 26, No 3, 434, 1954.
3. Bolzmann L. Pogg. Ann. Egr., Bd. 7, S. 624, 1876.
4. Maxwell C. Encycl. Brit., vol. 9, 1877.
5. Thompson J. On the theory of visco-elasticity. Phil. Trans. Roy. Soc., London, vol. 231, ser. A, p. 339, 1933.
6. Ricker N. The Form and the Laws of propagation of seismic wavelets. Geophysics, vol. XVIII, № 1, 1953.
7. Войт С. С. Распределение начальных уплотнений в вязком газе. ДАН СССР, т. 88, № 2, стр. 221, 1953.
8. Гоголадзе В. Г. Упругие колебания в среде с упругим последействием (с наследственностью). Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 109, 1941.
9. Дерягин Б. В. О затухании и дисперсии сейсмических волн. Журн. геофизики, № 1—2, 1931.
10. Смирнов В. И., Соболев С. Л. Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations elastiques. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, № 20, 1932.
11. Смирнов В. И. Предельная задача для волнового уравнения в случае сферы. ДАН СССР, т. 14, № 1, 1937.
12. Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И. О задаче Лэмба в случае полупространства. Уч. зап. ЛГУ, вып. 21, № 135, 1950.
13. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, вып. 24, № 148, 1951.
14. Шемякин Е. И., Файншмидт В. Л. Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой. Уч. зап. ЛГУ, сер. мат., вып. 28, № 177, 1954.
15. Петрашень Г. И. Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями. Уч. зап. ЛГУ, вып. 25, № 162, 1952.
16. Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Гельчинский Б. Я. Некоторые задачи динамической теории упругости для сред, содержащих цилиндрические или сферические границы раздела. Уч. зап. ЛГУ, вып. 27, № 170, 1953.
17. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes, 1913.
18. Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, 1937.
19. Зверев Н. Н. Распространение возмущений в вязко-упругом и вязко-пластическом стержнях. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.