О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ СЛАБОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

М. М. Фарзетдинов

(Стерлитамак)

В заметке доказана единственность решения некоторых задач о стационарной тепловой конвекции без порога.

1. Будем рассматривать в безразмерной форме уравнения слабой стационарной тепловой конвекции [1,2]:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p - \nabla\times\nabla\times\mathbf{v} - \lambda\gamma\theta, \qquad \sigma\,\mathbf{v}\cdot\nabla\theta = \Delta\theta,\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, θ — отклонение температуры в жидкости от среднего ее θ^*, давление p отсчитывается от значения $p^* = p(\theta^*)$ и при механическом равновесии жидкости, λ и σ — числа Грассхофа и Прандтля, γ — единичный вектор по направлению силы тяжести.

Допустим, что жидкость заполняет полость D ограниченной произвольной поверхностью S в бесконечно твердом массиве, в котором на бесконечно большом расстоянии от полости задан невертикальный градиент температуры (здесь предполагается, что за единицу длины принята некоторая характеристическая длина l области D). Тогда к уравнениям (1.1) добавляется [3] еще уравнение, описывающее распределение температуры θ° в массиве

$$\Delta\theta^\circ = 0 \tag{1.2}$$

где θ° также отсчитывается от значения θ^*.

В таком случае система уравнений (1.1), (1.2) должна быть решена при граничных условиях [3]

$$\mathbf{v} = 0, \text{ на } S \tag{1.3}$$

$$[\theta - \theta^\circ]_S = 0, \qquad \left[\frac{d\theta}{dn} - \alpha\,\frac{d\theta^\circ}{dn}\right]_S = 0 \tag{1.4}$$

$$\nabla\theta^\circ\,| = \mathbf{a} \qquad \text{при } \rho\to\infty \tag{1.5}$$

Здесь S — граница полости D, α — отношение коэффициента теплопроводности массива $\varkappa^\circ$ к коэффициенту теплопроводности жидкости $\varkappa$, $\mathbf{a}$ — единичный вектор по направлению градиента температуры на бесконечности, n — нормаль к поверхности S.

Ищем решение системы (1.1) — (1.2) в виде рядов [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda^2\mathbf{v}_2 + \cdots, & \theta &= \theta_0 + \lambda\theta_1 + \lambda^2\theta_2 + \cdots \\ p &= \lambda p_1 + \lambda^2 p_2 + \cdots, & \theta^\circ &= \vartheta_0 + \lambda\vartheta_1 + \lambda^2\vartheta_2 + \cdots \end{aligned} \tag{1.6}$$

Предположив, что эти ряды сходятся абсолютно и равномерно, подставим их в уравнения (1.1) — (1.2). Откуда получим системы уравнений для последовательного определения в (1.6) неизвестных функций:

$$\Delta\theta_0 = 0, \qquad \Delta\vartheta_0 = 0, \qquad \nabla p_n + \nabla\times\nabla\times\mathbf{v}_n = \mathbf{F}_n \tag{1.7}$$

$$\Delta\theta_n = f_n, \qquad \Delta\vartheta_n = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}_n = 0 \tag{1.8}$$

где

$$\mathbf{F}_n = -\gamma\theta_{n-1} - \sum_{j+k=n} (\mathbf{v}_j\nabla)\,\mathbf{v}_k \qquad (k,\ i=1,\ \ldots,\ n) \tag{1.9}$$

$$f_n = \sigma \sum_{j+k=n} \mathbf{v}_j\nabla\theta_k \qquad \begin{pmatrix} j=1,\ \ldots,\ n \\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \end{pmatrix} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.10}$$

Функцию ϑ_0 удобно представить в виде

$$\vartheta_0 = \mathbf{a}\cdot\rho + \vartheta_{01} \tag{1.11}$$

Тогда функции $\vartheta_{01}, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \ldots$ согласно (1.5) должны быть регулярными на бесконечности.

Исходя из (1.3) — (1.5) и принимая во внимание (1.11), получим следующие граничные условия для систем (1.7), (1.8):

$$[\theta_0 - \mathbf{a}\cdot\rho - \vartheta_{01}]_S = 0$$

$$\left[\frac{d\theta_0}{dn} - \alpha\,\frac{d}{dn}(\mathbf{a}\cdot\rho + \vartheta_{01})\right]_S = 0$$

$$\nabla\vartheta_{01} = 0 \quad \text{при } \rho\to\infty\,,\ \mathbf{v}_n|_S = 0 \quad \text{при } S \tag{1.12}$$

$$[\theta_n - \vartheta_n]_S = 0,\quad \left[\frac{d\theta_n}{dn} - \alpha\,\frac{d\vartheta_n}{dn}\right]_S = 0,\quad \nabla\vartheta_n = 0 \quad \text{при } \rho\to\infty \tag{1.13}$$

Таким образом, для нахождения каждого приближения ($\mathbf{v}_n$, p_n, θ_n, ϑ_n) ($n = 1, 2, \ldots$) требуется решить систему линейных дифференциальных уравнений при граничных условиях (1.13).

Вопросы, относящиеся к сходимости метода последовательных приближений, были рассмотрены в двумерном случае П. С. Линейкиным [4], в трехмерном случае автором [1].

Вопрос о единственности решений уравнений тепловой конвекции при задании условия подогревания непосредственно на границе полости, имеющей форму прямого параллелепипеда, был рассмотрен В. В. Вениаменовым [5].

Ниже докажем единственность разложения (1.6) для сформулированной выше задачи.

§ 2. **Единственность разложений** (1.6). Допустим, что найдены вплоть до ($n - 1$)-го порядка приближений ($\mathbf{v}_k$, ∇p_k, θ_k, ϑ_k) ($k = 1, 2, \ldots n - 1$), каждое из которых является единственным. Тогда докажем, что n-е приближение ($\mathbf{v}_n$, ∇p_n, θ_n, ϑ_n) также определяется единственно.

Допустим противное: система уравнений (1.7),(1.8) имеет два различных решения $\mathbf{v}_n$, ∇p_n, θ_n, ϑ_n и $\mathbf{v}_n'$, $\nabla p_n'$, θ_n', ϑ_n', удовлетворяющие условиям (1.13).

Введем обозначения

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n',\qquad \nabla\pi = \nabla p_n - \nabla p_n',\qquad t = \theta_n - \theta_n',\qquad \vartheta = \vartheta_n - \vartheta_n' \tag{2.1}$$

Эти функции удовлетворяют линейным уравнениям

$$\nabla\pi + \nabla\times\nabla\times\mathbf{u} = 0,\quad \triangle t = 0 \tag{2.2}$$

$$\triangle\vartheta = 0,\quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{2.3}$$

и граничным условиям

$$\mathbf{u} = 0,\qquad t - \vartheta = 0,\qquad \frac{dt}{dn} - \alpha\,\frac{d\vartheta}{dn} = 0 \qquad \text{на } S' \tag{2.4}$$

$$\nabla\vartheta = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho\to\infty \tag{2.5}$$

Умножим первое уравнение (2.2) на $\mathbf{u}$, а первое уравнение (2.3) на t и проинтегрируем по области D; будем иметь

$$\int\limits_D \mathbf{u}\nabla\pi\,dD + \int\limits_D (\mathbf{u}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{u})\,dD = 0,\qquad \int\limits_D t\Delta t\,dD = 0 \tag{2.6}$$

Пользуясь вторым уравнением (2.3) и первым условием (2.4) из первого уравнения (2.6), получим

$$\int\limits_D (\nabla\times\mathbf{u})^2\,dD = 0 \qquad \text{или} \qquad \nabla\times\mathbf{u} \equiv 0 \qquad \text{в обл. } D \tag{2.7}$$

В силу второго уравнения (2.3) и первого уравнения (2.4) следует, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n' \equiv 0 \qquad \text{в обл. } D \tag{2.8}$$

---

[1] Стационарная тепловая конвекция в трубах переменного сечения. Кандидатская диссертация. Госуниверситет в г. Пермь, 1954.

Далее, принимая во внимание (2.8), из первого уравнения (2.2) получаем

$$\nabla\pi = \nabla p_n - \nabla p_n' \equiv 0 \qquad \text{в обл. } D \tag{2.9}$$

При помощи формулы Грина представим второй интеграл (2.6) в виде

$$\int\limits_D (\nabla t)^2\, dD - \int\limits_S t\,\frac{dt}{dn}\, dS = 0 \tag{2.10}$$

Преобразуем теперь второй интеграл в (2.10), используя для этого условия второе и третье уравнения (2.4); получим

$$\int\limits_S t\,\frac{dt}{dn}\, dS = -\alpha \int\limits_S \vartheta\,\frac{d\vartheta}{d\nu}\, dS \qquad \left(\frac{d}{dn} = -\frac{d}{d\nu}\right) \tag{2.11}$$

Здесь ν — внутренняя нормаль к поверхности S, функция ϑ, удовлетворяющая первому условию (2.3), является гармонической во внешней по отношению к D области, согласно (2.5) регулярна на бесконечности. Поэтому левую часть (2.11) можно привести к виду

$$\int\limits_S t\,\frac{dt}{dn}\, dS = -\alpha \int\limits_{D^\circ} (\nabla\vartheta)^2 dD^\circ \tag{2.12}$$

где D° — внешняя область по отношению к области D.

Принимая во внимание (2.11) и (2.12), равенство (2.10) преобразуем к виду

$$\int\limits_D (\nabla t)^2\, dD = -\alpha \int\limits_{D^\circ} (\nabla\vartheta)^2 dD^\circ \tag{2.13}$$

Так как $\alpha > 0$, то из (2.13) будем иметь

$$\nabla t \equiv 0 \quad \text{в } D, \qquad \nabla\vartheta \equiv 0 \quad \text{в } D^c$$

Тогда в силу (2.4) и (2.5) получаем

$$t = \theta_n - \theta_n' \equiv 0 \quad \text{в обл. } D, \qquad \vartheta = \vartheta_n - \vartheta_n' = 0 \quad \text{в обл. } D^\circ \tag{2.14}$$

Соотношения (2.8), (2.14) показывают, что если все приближения вплоть до $(n-1)$-го порядка единственны, то n-е приближение также является единственным. Легко проверить, что нулевое приближение единственное. Тогда согласно доказанному выше все приближения $(\mathbf{v}_n, p_n, \theta_n, \vartheta_n)$ единственны. Откуда следует единственность разложения (1.6) решения системы (1.1) — (1.2) при граничных условиях (1.3) — (1.5) для тех значений числа Грассхофа λ, при которых ряды (1.6) сходятся абсолютно и равномерно. При этом согласно (2.9) давление p определяется с точностью до постоянного слагаемого, что обычно бывает достаточно в конвективных задачах.

Из доказанного выше также вытекает для задач без порога единственность разложения по числу Грассхофа решения системы уравнения конвекции в полости произвольной формы при задании температуры или теплового потока на границе полости.

Поступила 10 III 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1953.
2. Шапошников И. Г. К теории слабой конвекции. ЖТФ, т. XXII, стр. 826, 1952.
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ГИТТЛ, 1952.
4. Линейкин П. С. Об уравнениях тепловой конвекции. ПММ, т. XV, вып. 4, стр. 433, 1951.
5. Вениаменов В. В. Распространение тепла в сосуде с жидкостью. Журнал геофизики, т. III, вып. 1, стр. 42, 1933.