ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstein S. A note on the boundary layer equations, Proc. Cambr. Phil. Soc., 35, 1939.
2. Mangler W. Die «ähnlichen» Lösungen der Prandtlischen Grenzschlichtgleichungen. Z. angew. Math. und Mech., 23, 1943.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2, Гостехиздат, 1948.
4. Дорфман А. Ш., Швец И. Т. Некоторые частные случаи решения уравнений пограничного слоя в сжимаемой жидкости. ПММ, т. 19, вып. 4, 1955.
5. Levy S. Effect of large temperature changes (including viscous heating) upon laminar boundary layers with veriable freestreem velocity. JAS, 21, No. 7, 1954.
6. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, т. VI, вып. 6, 1942.
7. Hartree D. R. On an equation occuring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambr. Phil. Soc., 33, 1937.

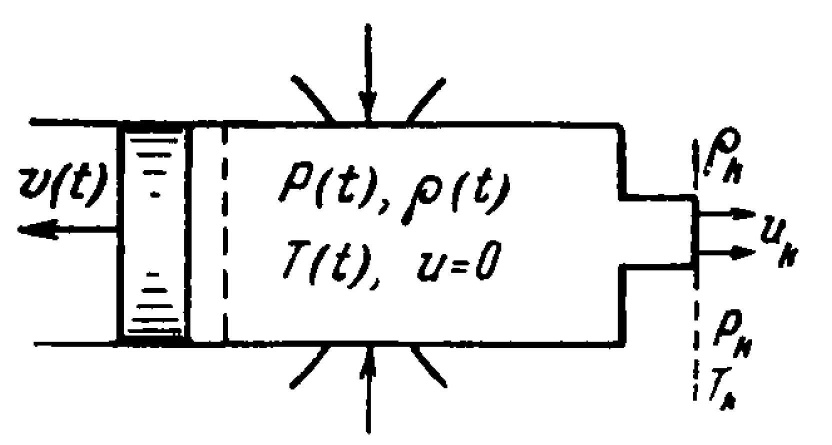
КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА ПЕРЕМЕННОГО ОБЪЕМА

И. М. Беленький

(Москва)

Рассматривается задача истечения газа из цилиндрического сосуда с подвижной задней стенкой через малое отверстие, сделанное в передней стенке сосуда. Одновременно с истечением происходит подвод газа в сосуд. Эта задача представляет интерес в теории газовых двигателей, в задачах внутренней баллистики и др.

1. Постановка задачи. В цилиндрический сосуд, задняя стенка которого представляет собой массивный поршень, который может перемещаться под действием расширяющихся газов, подводится без начальной скорости газ при температуре T_1 (эта температура может быть температурой горения топлива). Из сосуда газ вытекает через малое отверстие, сделанное в передней стенке, в среду без противодавления так что в самом отверстии устанавливается критический режим истечения, и, следовательно, скорость газа на выходе равна местной скорости звука (см. фигуру).



Наибольшую трудность в рассматриваемой нестационарной задаче — задаче истечения — представляет вопрос о собственном движении газа в сосуде, поскольку взаимодействие отраженных волн, идущих от поршня и от передней стенки и распространяющихся по движущемуся газу, представляет весьма сложную физическую картину.

Так, в решении задачи Лагранжа, предложенном Лявом и Пиддуком [1], уже после рассмотрения второй волны формулы принимают довольно громоздкий вид, так что их практическое использование становится довольно затруднительным.

Мы здесь примем следующую приближенную постановку задачи. Будем полагать, что после распространения первых волн в газе устанавливается режим, при котором основные параметры, определяющие состояние газа, а именно давление p, плотность ρ и абсолютная температура T, будут мало меняться для данного момента времени при переходе от одной точки к другой и будут лишь функциями времени t, т. е. $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$ и $T = T(t)$.

Если диаметр сосуда велик по сравнению с выходным отверстием, а масса поршня достаточно велика по сравнению с массой газа, находящегося в сосуде, то собственным движением газа в сосуде можно пренебречь, полагая скорость газа $u = 0$.

Слой газа, находящийся непосредственно у поршня, будет иметь, очевидно, скорость, равную скорости поршня $v(t)$. Это обстоятельство при составлении уравнения движения и уравнения энергии можно учесть, если вместо массы поршня m рассматривать его приведенную массу M.

2. Уравнение энергии. Если за время dt в сосуд поступает при температуре T_1 $G_0 d\psi$ *кг* газа, то количество энергии, которое при этом вместе с газами поступает в сосуд, будет равно

$$dE = c_v T_1 G_0 d\psi = \frac{RT_1}{k-1} G_0 d\psi \qquad \left(k = \frac{c_p}{c_v}\right)$$

где R — газовая постоянная, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, c_v — теплоемкость при постоянном объеме, ψ — относительная величина, равная отношению количества газа, поступившего в сосуд к моменту времени t, к общему количеству G_0 *кг* газа, подводимого в сосуд.

Поступившая таким образом в сосуд энергия dE расходуется на изменение внутренней энергии dE_1 газов, находящихся в сосуде к моменту времени t, на энергию dE_2, переносимую вместе с вытекающими через отверстие газами, и на сообщение кинетической энергии dE_3 поршню и прилегающим к нему слоям газа. Подсчитаем все эти виды энергии. Если через $G(t)$ обозначить секундный расход газов, вытекающих через отверстие, а через $\eta(t)$ — относительный расход газов, равный

$$\eta(t) = \frac{1}{G_0} \int_0^t G(t)\, dt \tag{2.1}$$

то к моменту времени t в сосуде будет находиться $G_0(\psi - \eta)$ *кг* газа при некоторой температуре $T < T_1$ и, следовательно,

$$dE_1 = d\left[c_v T G_0 (\psi - \eta)\right] = d\left[\frac{RT_1}{k-1} G_0 (\psi - \eta)\right]$$

Для нахождения количества энергии dE_2, переносимого вместе с вытекающими через отверстие газами за время dt, воспользуемся формулой для плотности потока энергии $\mathbf{j}$ через какую-либо поверхность [2]:

$$\mathbf{j} = \left(\frac{u^2}{2} + i\right) \rho \mathbf{u}$$

где u — скорость газа, ρ — плотность, i — тепловая функция.

Так как абсолютное значение вектора $\mathbf{j}$ есть количество энергии, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно к направлению скорости $\mathbf{u}$, то, следовательно,

$$dE_2 = \left(\frac{u_k^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT_k\right) G dt$$

где u_k и T_k — соответственно скорость и температура газов в выходном отверстии. Если истечение газа происходит в среду без противодавления (или же достаточно малого), а давление в сосуде достаточное, чтобы скорость газа при его соответствующем расширении (как это, скажем, имеет место в сопле Лаваля) стала сверхзвуковой, то, как известно[3], в отверстии, через которое происходит истечение, устанавливается критический режим истечения.

Рассматривая истечение газа как квазистационарное, т. е. как непрерывную во времени смену стационарных состояний, для нахождения критической скорости истечения u_k и температуры T_k воспользуемся формулами, даваемыми стационарной теорией истечения [3]:

$$u_k^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{2k}{k-1} RT, \qquad T_k = \frac{2}{k+1} T$$

где $p(t)$, $\rho(t)$ и $T(t)$ — соответственно давление, плотность и температура газов в сосуде, из которого происходит истечение. Подставляя найденные таким образом значения u_k и T_k в формулу для dE_2 и замечая, что $Gdt = G_0 d\eta$, получим

$$dE_2 = \frac{k}{k-1} RG_0 T d\eta$$

Изменение кинетической энергии поршня вместе с прилегающими к нему слоями газа равно

$$dE_3 = d\left(\frac{Mv^2}{2}\right)$$

Здесь M — приведенная масса поршня, а $v(t)$ — скорость поршня.

Написав равенство прихода и расхода энергии

$$dE = dE_1 + dE_2 + dE_3$$

и вводя относительные переменные: относительную температуру $\tau = T / T_1$ и относительную скорость поршня $\nu = v / v_*$, где v_* — некоторая характерная скорость, равная

$$v_* = \sqrt{\frac{2G_0RT_1}{M(k-1)}} = c\sqrt{\frac{2}{k(k-1)}\,\frac{G_0}{M}} \tag{2.2}$$

а $c = \sqrt{kRT_1}$ — скорость звука в газе при его адиабатическом расширении и при температуре T_1, получим основное уравнение энергии

$$d\psi = d\,[\tau(\psi - \eta)] + k\tau d\eta + d(\nu^2) \tag{2.3}$$

которое может быть приведено к такому виду:

$$(1-\tau)\,d\psi = (\psi - \eta)\,d\tau + (k-1)\,\tau d\eta + d(\nu^2) \tag{2.4}$$

3. Основные зависимости. Напишем уравнение движения поршня

$$M\frac{dv}{dt} = Sp(t) \tag{3.1}$$

где S — площадь поперечного сечения сосуда, а $p(t)$ — давление газов в сосуде.

Количество газа, подводимого в сосуд, зависит от многих факторов. Мы здесь рассмотрим простейший и в то же время весьма важный случай, когда элементарное количество $G_0 d\psi$ *кг* газа, подводимого в сосуд за время dt, пропорционально элементарному импульсу давления газов pdt, т. е. $G_0 d\psi = Bpdt$, где B — некоторая постоянная. Следовательно,

$$G_0\frac{d\psi}{dt} = Bp(t) \tag{3.2}$$

Исключая из уравнений (3.1) и (3.2) элементарный импульс pdt, после интегрирования получим скорость поршня:

$$v = \frac{SG_0}{MB}(\psi - \psi_0) \tag{3.3}$$

где ψ_0 — относительная доля газов, поступивших в сосуд к моменту начала движения поршня. Секундный расход газа $G(t)$, соответствующий критическому режиму истечения, на основании стационарной теории истечения [3] может быть представлен в такой форме:

$$G(t) = D\frac{p(t)}{\sqrt{\tau(t)}} \tag{3.4}$$

где постоянная D имеет следующее значение:

$$D = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} S_k\sqrt{\frac{k}{RT_1}} \tag{3.5}$$

а S_k — площадь выходного отверстия.

Пользуясь указанным значением для $G(t)$ из формулы (2.1) и (3.4), найдем

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{D}{G_0}\,\frac{p(t)}{\sqrt{\tau(t)}} \tag{3.6}$$

а из совокупности (3.2) и (3.6) после исключения элементарного импульса $p\,dt$ получим

$$\frac{d\eta}{d\psi}=\frac{D}{B}\frac{1}{\sqrt{\tau}}, \text{ или } \tau=\left(\frac{D}{B}\right)^2\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)^2 \tag{3.7}$$

Подставляя найденное выражение для τ в уравнение энергии (2.4) и пользуясь соотношением (3.3), после некоторых упрощений и сокращения всех членов на не равный нулю множитель $d\psi\,/\,d\eta\neq 0$ получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$(\psi-\eta)\frac{d^2\psi}{d\eta^2}+A_1\frac{d\psi}{d\eta}+A_2\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)^2+A_0+A\,(\psi-\psi_0)=0 \tag{3.8}$$

Здесь

$$A_0=-\frac{1}{2}\left(\frac{B}{D}\right)^2,\qquad A_1=\frac{k-1}{2},\qquad A_2=\frac{1}{2} \tag{3.9}$$

$$A=\frac{k-1}{2k}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{G_0}{M}\left(\frac{S}{S_k}\right)^2 \tag{3.10}$$

Начальные условия будем определять, исходя из того, что начало истечения газа из сосуда будет совпадать с моментом начала движения поршня и температура газа при этом $T=T_1$, т. е. при $\eta=0$ имеем $\psi=\psi_0$ и $\tau=1$. Следовательно, на основании (3.7)

$$\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{B}{D}$$

Переменные ψ и η будут меняться в пределах $\psi_0\leqslant\psi\leqslant 1$ ($\psi=1$ соответствует концу подачи газа в сосуд) и $0\leqslant\eta\leqslant\eta_1$ (значение η_1 соответствует моменту, когда $\psi=1$).

Рассмотрим различные случаи интегрирования уравнения (3.8).

4. Истечение газа из сосуда постоянного объема. Этот случай получается, если поршень, который является задней стенкой сосуда, будет неподвижным. Этого, очевидно, можно достичь, если принять, что масса поршня бесконечно велика, т. е. положить $G_0\,/\,M=0$. В этом случае параметр A (3.10) принимает значение, равное нулю, и основное уравнение (3.8) принимает следующий вид:

$$(\psi-\eta)\frac{dx}{d\eta}+A_2x^2+A_1x+A_0=0\qquad\left(x=\frac{d\psi}{d\eta}\right) \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) можно проинтегрировать при помощи подстановки:

$$(\psi-\eta)\,\varphi(x)=c \tag{4.2}$$

Дифференцируя это равенство по η, получим

$$(x-1)\,\varphi(x)+(\psi-\eta)\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{d\eta}=0$$

Заменяя теперь $(\psi-\eta)\,dx\,/\,d\eta$ при помощи уравнения (4.1), получим после разделения переменных уравнение для нахождения функции $\varphi(x)$:

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{(x-1)\,dx}{A_0+A_1x+A_2x^2}=\frac{2\,(x-1)\,dx}{(x-x_1)(x-x_2)} \tag{4.3}$$

где обозначено

$$x_{1,2}=-\frac{k-1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{k-1}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{D}\right)^2}$$

Произведя интегрирование (4.3) и подставляя найденное значение для $\varphi(x)$ в (4.2), получим

$$(\psi-\eta)(x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}=c\qquad\left(\alpha=\frac{2\,(x_1-1)}{x_1-x_2},\ \beta=\frac{2\,(x_2-1)}{x_2-x_1}\right) \tag{4.4}$$

Постоянная c определится из условия, что в начальный момент истечения $\psi=\psi_0$, $\eta=0$ и $x=x_0$, где

$$x_0=\left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)_{\eta=0}=\frac{B}{D} \tag{4.5}$$

Для определения давления $p(t)$ газов воспользуемся уравнением состояния $pw = RT$. Так как $T = T_1\tau$, а удельный объем $w = W_0 / G_0(\psi - \eta)$, где W_0 — объем сосуда, из которого происходит истечение, то

$$p(t) = \frac{RT_1}{W_0} G_0 \tau (\psi - \eta)$$

Пользуясь выражением $(\psi - \eta)$, определенным из (4.4), и замечая, что относительная температура на основании (3.7) и (4.5)

$$\tau = \left(\frac{D}{B}\right)^2 \left(\frac{d\psi}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \tag{4.6}$$

из уравнения состояния $pw = RT$ получим

$$p(x) = c_1 x^2 (x - x_1)^{-\alpha} (x - x_2)^{-\beta} \left(c_1 = c \frac{RT_1}{W_0} \frac{G_0}{x_0^2}\right) \tag{4.7}$$

Выясним условие экстремального значения давления газов в сосуде. Взяв логарифмическую производную от $p(x)$ и пользуясь значениями α, β, x_1, x_2 и x_0, получим

$$\frac{dp}{dx} = 2kp(x) \frac{x - k^{-1}x_0^2}{x(x - x_1)(x - x_2)}$$

откуда следует, что при значении $x = k^{-1}x_0^2$ давление газов в сосуде будет иметь экстремум, так как можно показать, что вторая производная d^2p / dx^2 при $x = k^{-1}x_0^2$ в нуль не обращается. Анализируя выражение для d^2p / dx^2 при $x = k^{-1}x_0^2$, можно показать, что ее знак будет зависеть от знака выражения $\lambda = (k^{-1}x_0^2 - 1)$; следовательно: 1) при $\lambda > 0$, что соответствует значению $x_0 > \sqrt{k}$, давление газов имеет минимум, а 2) при $\lambda < 0$, что соответствует значению $x_0 < \sqrt{k}$, давления газов имеет максимум. Если же $\lambda = 0$, что соответствует $x_0 = \sqrt{k}$, то вопрос требует дополнительного исследования. Как будет показано дальше, в этом случае имеет место стационарный процесс истечения при постоянной относительной температуре $\tau = k^{-1}$; давление газов в этом случае будет сохранять постоянное значение.

5. Стационарное истечение газа из сосуда. Пусть, начиная с некоторого момента, относительный приход газа $d\psi$ будет равен относительному расходу $d\eta$ и, следовательно,

$$x = \frac{d\psi}{d\eta} = 1$$

Из соотношений (3.7) и (4.5) будет

$$\tau = \left(\frac{D}{B}\right)^2 = \frac{1}{x_0^2} \tag{5.1}$$

и, следовательно, расширение газа в сосуде будет изотермическим. Если теперь обратиться к уравнению (3.8) и заметить, что $d\psi / d\eta = 1$ и $d^2\psi / d\eta^2 = 0$, то получим

$$A_0 + A_1 + A_2 + A(\psi - \psi_0) = 0$$

Отсюда следует, что постоянная A (3.10) должна быть равна нулю, а потому

$$A_0 + A_1 + A_2 = 0 \tag{5.2}$$

Обращение параметра A (3.10) в нуль приводит к условию $G_0 / M = 0$, а это будет соответствовать неподвижной задней стенке сосуда (так как масса M поршня становится при этом бесконечно большой). Полученный результат означает, что рассматриваемый стационарный процесс истечения может происходить лишь из сосуда постоянного объема.

Подставляя в равенство (5.2) значения коэффициентов A_i (3.9) и пользуясь соотношением (5.1), получим, что $\tau = k^{-1}$, т. е. отношение температуры T газов в сосуде к температуре T_1 газов, поступающих в сосуд, сохраняет постоянное значение, равное отношению теплоемкостей c_v / c_p. Этот результат известен под названием теоремы Ланжевена [4,5].

Следует отметить, что формулу Ланжевена $\tau = k^{-1}$ можно получить, исходя из уравнения энергии (2.4), если принять, что $d(\nu^2) = 0$, $d\tau = 0$ и $d\psi = d\eta$. Это дает $(1 - k\tau)\, d\psi = 0$, откуда сразу получаем формулу Ланжевена.

6. Истечение газа из сосуда с подвижной стенкой. Истечение газа из сосуда с подвижной стенкой будем рассматривать с момента, когда подача газа в сосуд прекращена, что соответствует значению относительной переменной $\psi = 1$. Соответствующее уравнение энергии получим, если в уравнении (2.4) положим $\psi = 1$ и $d\psi = 0$. Это дает

$$(1 - \eta)\, d\tau + (k - 1)\, \tau\, d\eta + d(\nu^2) = 0 \tag{6.1}$$

Из совокупности уравнений (3.1) и (3.6) путем исключения элементарного импульса pdt получим

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{C_0 S}{MD} \sqrt{\tau}$$

Переходя к относительной скорости $\nu = v / v_*$ и определив затем относительную температуру τ, получим

$$\tau = \frac{1}{A} \left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2 \tag{6.2}$$

где постоянная A по-прежнему определяется формулой (3.10). Подставляя выражение (6.2) для τ в уравнение энергии (6.1), найдем

$$\frac{2}{A} \frac{d\nu}{d\eta} \left\{(1 - \eta) \frac{d^2\nu}{d\eta^2} + \frac{k-1}{2} \frac{d\nu}{d\eta} + A\nu\right\} = 0$$

Сокращая на не равный нулю множитель $d\nu / d\eta$ и вводя новую переменную $y = 1 - \eta$, получим

$$y \frac{d^2\nu}{dy^2} - \frac{k-1}{2} \frac{d\nu}{dy} + A\nu = 0 \tag{6.3}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что это уравнение при помощи следующей замены переменных:

$$y = \frac{1}{4A} Z^2, \qquad \nu(y) = Z^n W(Z) \tag{6.4}$$

где постоянная $n = {}^1/_2\,(k + 1)$, приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 W}{dZ^2} + \frac{1}{Z} \frac{dW}{dZ} + \left(1 - \frac{n^2}{Z^2}\right) W = 0 \tag{6.5}$$

Известно [6], что если n не есть целое число, а это как раз имеет место в рассматриваемой нами задаче, то общий интеграл уравнения (6.5) может быть представлен через функции Бесселя первого рода $J_n(Z)$ и $J_{-n}(Z)$:

$$W(Z) = C_1 J_n(Z) + C_2 J_{-n}(Z)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые из начальных условий.

Перейдем теперь от переменных Z и W к переменным y и ν, для чего воспользуемся формулами (6.4). Включая постоянные множители в постоянные C_1 и C_2, получим следующее выражение для относительной скорости ν поршня:

$$\nu(y) = y^{1/2 n} \{C_1 J_n(2\sqrt{Ay}) + C_2 J_{-n}(2\sqrt{Ay})\} \tag{6.6}$$

Относительную температуру τ найдем, если воспользуемся формулой (6.2):

$$\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d\nu}{d\eta} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d\nu}{dy}$$

Если теперь при помощи (6.6) определить производную $d\nu/dy$ и воспользоваться далее хорошо известными соотношениями [6]

$$2J_n'(Z) = J_{n-1}(Z) - J_{n+1}(Z), \qquad \frac{2n}{Z} J_n(Z) = J_{n-1}(Z) + J_{n+1}(Z)$$

то после некоторых упрощений получим следующее выражение для $\sqrt{\tau}$:

$$\sqrt{\tau} = y^{\frac{n-1}{2}} \{- C_1 J_{n-1} (2\sqrt{Ay}) + C_2 J_{-n+1} (2\sqrt{Ay})\} \qquad (6.7)$$

Уравнения (6.6) и (6.7) полностью решают задачу. Для определения постоянных C_1 и C_2 следует воспользоваться начальными условиями: когда $\eta = \eta_1$, то $\tau = \tau_1$ и $\nu = \nu_1$.

Полученные формулы могут быть преобразованы, если воспользоваться разложениями для бесселевых функций [6]:

$$J_n(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (^1/_2 Z)^{n+2m}}{m!\, \Gamma(-n+m+1)}$$

Подставляя это разложение в (6.6) и (6.7) и замечая, что $Z = 2\sqrt{Ay}$, после некоторых упрощений получим

$$\nu(y) = C_1{}^* \Phi_1(A, n, y) + C_2{}^* \Phi_2(A, n, y) \qquad (6.8)$$

$$\sqrt{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \{C_1{}^* R_1(A, n, y) + C_2{}^* R_2(A, n, y)\} \qquad (6.9)$$

где

$$C_1{}^* = C_1 \frac{A^{^1/_2 n}}{\Gamma(n+1)}, \qquad C_2{}^* = C_2 \frac{A^{-^1/_2 n}}{\Gamma(-n+1)}$$

а функции $\Phi_1(A, n, y)$, $\Phi_2(A, n, y)$, $R_1(A, n, y)$ и $R_2(A, n, y)$ имеют следующие разложения:

$$\Phi_1(A, n, y) = y^n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,-n} y^m\right), \qquad \Phi_2(A, n, y) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n} y^m$$

$$R_1(A, n, y) = y^{n-1} \left\{n + \sum_{m=1}^{\infty} (n+m) A_{m,-n} y^m\right\}, \qquad R_2(A, n, y) = \sum_{m=1}^{\infty} m A_{m,n} y^{m-1}$$

Входящие в эти разложения коэффициенты $A_{m,n}$ и $A_{m,-n}$ определяются при помощи следующих рекуррентных соотношений:

$$A_{m+1,n} = \frac{-A}{(m+1)(m-n+1)} A_{m,n}, \qquad A_{1n} = \frac{A}{n-1}$$

Коэффициенты же $A_{m,-n}$ получаются из $A_{m,n}$ путем замены n на $-n$.

Давление газов $p(t)$, а также путь поршня могут быть найдены, если полагать расширение газа адиабатическим и воспользоваться уравнением адиабаты Пуассона $pw^k = p_1 w_1{}^k$, где p_1 и w_1 — соответственно давление и удельный объем газов в сосуде, к началу рассматриваемого периода истечения.

Поступила 4 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Love A. E. and Pidduck G. B. Lagrange's ballistic problem, Transactions of the Royal Society of London, 222, 1922.
2. Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М. Механика сплошных сред, 1954.
3. Прандтль Л. Гидроаэромеханика, ИЛ, 1949.
4. Langevin P., Note sur les effets Balistiques de la Détente des Gas. Mémorial de l'Artillerie Française, 1923.
5. Беленький И. М. Об одной теореме Ланжевена, Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1957.
6. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.