АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА

А. Ш. Дорфман, Н. И. Польский, П. Н. Романенко

(Киев)

Для получения эффективных решений различных задач теории пограничного слоя предпринимались попытки свести уравнения в частных производных к обыкновенным. При этом получались так называемые подобные или автомодельные решения.

Для случая течения несжимаемой жидкости без теплообмена до конца исследован вопрос об описании всех автомодельных решений [1,2].

В случае сжимаемой жидкости результаты различных работ по отысканию автомодельных решений (в смысле определения, приведенного ниже) при обтекании пластины описаны в [3].

Некоторые автомодельные решения сжимаемого пограничного слоя без теплообмена найдены в работе [4], а при наличии теплообмена — в работе [5]. Однако в работе [5] не исчерпаны все автомодельные в указанном смысле решения.

В настоящей работе для случая сжимаемой жидкости при наличии теплообмена перечисляются все автомодельные решения уравнений пограничного слоя. Показано, что других автомодельных решений не существует.

Движение сжимаемой жидкости в пограничном слое определяется следующей системой уравнений [3]:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$
$$\rho\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)+\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Ec_p}u\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

Здесь

$$\theta=T+\frac{u^2}{2Ec_p},\qquad \sigma=\frac{\mu c_p}{\varkappa}$$

При этом p, ρ, T, μ — давление, плотность, температура и коэффициент вязкости, u, v — проекции скорости на оси x и y, θ — температура торможения потока, E — механический эквивалент тепла, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, σ — число Прандтля.

Кроме того, через p_0, ρ_0, T_0 обозначаем давление, плотность и температуру торможения внешнего потока (т. е. при $y\to\infty$), U — скорость внешнего потока, μ_0 — значение коэффициента вязкости при $T=T_0$. Всюду ниже предполагается, что $\mu/\mu_0=T/T_0$.

Значение температуры на стенке обозначаем через $\tau(x)$. Тогда граничные условия, при которых следует решать систему (1), будут иметь вид:

$$u=v=0,\quad \theta=\tau(x)\quad \text{при } y=0;\qquad u=U(x),\quad \theta=T_0\quad \text{при } y=\infty$$

Подобно тому как это сделано в работе [4], введем новые переменные, аналогичные переменным Дородницына [6]:

$$\xi=\int_0^x\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha}dx,\qquad \eta=\int_0^y\frac{\rho}{\rho_0}\,dy$$

где α — некоторая постоянная, о выборе которой будет сказано ниже. Введем обозначения

$$U_{\max}=\frac{2k}{k-1}gRT_0,\qquad V=u\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial x}+v\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\alpha-1}\frac{T_0}{T}$$

и безразмерные величины по формулам

$$U=\bar{U}U_{\max},\qquad u=\bar{u}U_{\max},\qquad V=\bar{V}\frac{\nu_0}{L},\qquad \xi=\bar{\xi}\,\frac{U_{\max}L^2}{\nu_0}$$
$$\eta=\bar{\eta}L,\qquad \theta=(\bar{\theta}+1)\,T_0,\qquad \tau=(\bar{\tau}_0+1)\,T_0$$

где L — некоторая характерная длина, k — показатель адиабаты, R — газовая постоянная. Преобразуем систему уравнений (1) к виду

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + V\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\theta - u^2)\frac{UU'}{1-U^2} + (1-U^2)^{-\delta}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \qquad \delta = \frac{k(\alpha - 1)}{k-1} \qquad (3)$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = (1-U^2)^{-\delta}\left\{\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2\theta}{\partial \eta^2} + 2\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right\} \qquad (4)$$

Здесь черточки над всеми величинами опущены.

Все рассматриваемые ниже величины безразмерны.

Из этой системы надлежит определить три величины при следующих граничных условиях:

$$u = V = 0, \quad \theta = \tau(\xi) \quad \text{при } \eta = 0, \; u = U(\xi), \quad \theta = 0 \quad \text{при } \eta = \infty$$

Пусть ξ и ξ^* — две произвольные фиксированные точки на обтекаемом профиле в плоскости ξ, η. При этом $u(\xi, \eta)$, $\theta(\xi, \eta)$ и $u(\xi^*, \eta)$, $\theta(\xi^*, \eta)$ — соответствующие профили величин u, θ в указанных точках. Возникает вопрос о том, можно ли совершить такие преобразования подобия вдоль осей η, u, θ (с различными, вообще говоря, коэффициентами растяжения или сжатия), чтобы профили $u(\xi, \eta)$ и $\theta(\xi, \eta)$ стали в точности конгруэнтными профилями $u(\xi^*, \eta)$ и $\theta(\xi^*, \eta)$.

Если это возможно, то

$$u(\xi, \eta) = Au(\xi^*, B\eta), \qquad \theta(\xi, \eta) = C\theta(\xi^* B\eta)$$

Множители A, B, C зависят, разумеется, от ξ при фиксированном ξ^*.

Определение. Если указанное преобразование возможно при любом ξ, то будем говорить, что задача имеет подобное или автомодельное решение.

Так как ξ^* фиксировано, то, полагая $X = B(\xi)\eta$ и вводя вместо $f(X)$ функцию

$$\varphi(X) = \int f(X)\, dX$$

получаем

$$u(\xi, \eta) = A(\xi) f(X), \qquad \theta(\xi, \eta) = C(\xi) g(X) \qquad (5)$$

Далее изучается вопрос о том, при каких распределениях скоростей $U(\xi)$ и температур стенки $\tau(\xi)$ система (2) — (4) допускает решения вида (5).

Если $\eta = 0$, то $X = 0$; если $\eta \to \infty$, то $X \to \infty$. Поэтому из граничных условий и первого соотношения (5) найдем $\varphi'(0) = 0$. Кроме того, $U(\xi) = A(\xi)\varphi'(\infty)$. Не ограничивая общности, пронормируем $\varphi'(X)$ так, чтобы $\varphi'(\infty) = 1$. Тогда $A(\xi) = U(\xi)$.

Аналогично из второго соотношения (5) и граничных условий получим $g(\infty) = 0$. Кроме того, $\tau(\xi) = C(\xi) g(0)$. Нормируя $g(X)$ так, чтобы $g(0) = 1$, получим $C(\xi) = \tau(\xi)$.

Теперь соотношения (5) примут вид:

$$u(\xi, \eta) = U(\xi)\varphi'(X), \qquad \theta(\xi, \eta) = \tau(\xi) g(X) \qquad (6)$$

Из первого соотношения (6) и уравнения (3) получим

$$V(\xi, \eta) = \left\{\frac{UB'}{B^2} - \frac{U'}{B}\right\}\varphi(X) - \frac{UB'}{B^2}X\varphi'(X) \qquad (7)$$

Так как $V(\xi, 0) = 0$, то сразу заключаем, что $\varphi(0) = 0$.

Подставляя соотношения (6), (7) в уравнения (2), (4), получим после несложных преобразований

$$(1-U^2)\left(\frac{UB'}{B} - U'\right)\varphi\varphi'' + U'\varphi'^2 = \tau U'g + \frac{B^2(1-U^2)}{(1-U^2)^{\delta}}\varphi'''$$

$$\left(\frac{UB'}{B} - U'\right)\varphi g' + U\frac{\tau'}{\tau}g\varphi' = (1-U^2)^{-\delta}\left\{\frac{1}{\sigma}B^2 g'' + \left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\frac{B^2U^2}{\tau}(\varphi'^2)''\right\} \qquad (8)$$

В этих уравнениях φ и g являются искомыми функциями от X, удовлетворяющими граничным условиям

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \qquad \varphi'(\infty) = 1, \qquad g(0) = 1, \qquad g(\infty) = 0$$

а U, B, τ — функциями от ξ. Если существует подобное решение, то это значит, что при подходящем выборе функции $B(\xi)$ уравнения (8) будут обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящей работе находятся все функции U и τ, при которых такой выбор $B(\xi)$ возможен. Рассматриваются отдельно случаи, когда $\sigma \neq 1$ и $\sigma = 1$. В первом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если $\sigma \neq 1$, то уравнения (8) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями только тогда, когда одновременно $U = \mathrm{const}$ и $\tau = \mathrm{const}$. При этом функция $B(\xi)$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя.

Доказательство. Положим в наших уравнениях $\alpha = 1$, т. е. $\delta = 0$. Если $U = \mathrm{const}$, то уравнения (8) принимают вид:

$$\begin{gathered} \varphi''' - U\frac{B'}{B^3}\varphi\varphi'' = 0 \\ U\frac{B'}{B^3}\varphi g' + \frac{U}{B^2}\frac{\tau'}{\tau}g\varphi' = \frac{1}{\sigma}g'' + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\frac{U^2}{\tau}(\varphi'^2)'' \end{gathered} \tag{9}$$

Для того чтобы первое уравнение было обыкновенным, необходимо, чтобы выражение UB'/B^3 не зависело от ξ, т. е. $UB'/B^3 = \mathrm{const}$. Кроме того, все коэффициенты во втором уравнении должны быть постоянными. Значит, $U^2/\tau = \mathrm{const}$ и, следовательно, $\tau = \mathrm{const}$ и $\tau' = 0$. Покажем теперь, как найти функцию $B(\xi)$. Путем умножения ее на постоянный множитель можно менять величину UB'/B^3. Поэтому будем выбирать $B(\xi)$ так, чтобы $UB'/B^3 = -2$. Отсюда легко получается, что

$$B = \frac{1}{\sqrt{a\xi + b}} \qquad \left(a = \frac{4}{U}\right)$$

Рассматриваемая система уравнений принимает вид:

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' = 0, \quad g'' + 2\sigma\varphi g' = (1 - \sigma)\frac{U^2}{\tau}(\varphi'^2)''$$

Эта система подробно рассмотрена в [3].

Осталось показать, что уравнения (8) не сводятся к обыкновенным, если $U \neq \mathrm{const}$. В самом деле, разделив в этом случае первое уравнение (8) на U', получим

$$(1 - U^2)\left(\frac{UB'}{U'B} - 1\right)\varphi\varphi'' + \varphi'^2 = \tau g + \frac{B^2(1 - U^2)}{U'}\varphi''' \tag{9}$$

Это уравнение будет обыкновенным, если

$$\tau = \mathrm{const}, \qquad (1 - U^2)\left(\frac{UB'}{U'B} - 1\right) = \mathrm{const}, \qquad \frac{B^2(1 - U^2)}{U'} = \mathrm{const} \tag{10}$$

После умножения второго уравнения (8) на $\frac{1 - U^2}{U'}$ найдем

$$(1 - U^2)\left(\frac{UB'}{U'B} - 1\right)\varphi g' = \frac{B^2(1 - U^2)}{U'}\frac{1}{\sigma}g'' + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\frac{B^2U^2(1 - U^2)}{U'}(\varphi'^2)''$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{B^2U^2(1 - U^2)}{U'} = \mathrm{const} \tag{10}$$

Сравнивая с (10), получаем $U^2 = \mathrm{const}$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда $\sigma = 1$.

В доказательстве теоремы 1 было показано, что при условии $U \neq \mathrm{const}$ для сводимости первого уравнения (8) и затем (9) к обыкновенному необходимо, чтобы $\tau = \mathrm{const}$.

1°. Значит, для того чтобы система (8) была системой обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимо, чтобы выполнялось одно из условий: $U = \text{const}$, $\tau = \text{const}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $U = \text{const}$. Полагая снова $\alpha = 1$, $\delta = 0$, $\sigma = 1$, запишем систему (8) так:

$$\varphi''' - 2\varphi\varphi'' = 0$$

$$2\varphi g' - \frac{U}{B^2}\frac{\tau'}{\tau} g\varphi' = g'' \qquad \left(B^2 = \frac{1}{a\xi + b}, \quad a = \frac{4}{U}\right)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{U}{B^2}\frac{\tau'}{\tau} = (4\xi + Ub)\frac{\tau'}{\tau} = \text{const}$$

Полагая ${}^1/_4 Ub = c$ и $(4\xi + Ub)\tau' / \tau = 4n$, найдем, что с точностью до постоянного множителя $\tau = (\xi + c)^n$ система уравнений примет вид:

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' = 0, \qquad g'' + 2\varphi g' + 4n\varphi' g = 0 \tag{11}$$

Первое уравнение здесь есть известное уравнение Блазиуса, его решение табулировано; второе — линейное относительно g и может быть легко решено с достаточной точностью, например, методом Галеркина.

Нами доказано предложение.

2°. Если $\sigma = 1$, $U = \text{const}$, то уравнения (8) сводятся к обыкновенным только тогда, когда $\tau = (\xi + c)^n$. При этом система принимает вид (11).

Замечание. Если $\sigma = 1$, $U = \text{const}$, уравнения (8) сводятся к обыкновенным и при $\tau = Ae^{b\xi}$. Однако при этом необходимо должно быть $B = \text{const}$ и первое уравнение (8) принимает вид: $\varphi''' = 0$. Решения же этого уравнения не удовлетворяют граничным условиям задачи.

Теперь рассмотрим последний случай: $\sigma = 1$, $\tau = \text{const}$. При этом система (8) принимает вид:

$$(1 - U^2)\left(\frac{UB'}{U'B} - 1\right)\varphi\varphi'' + \varphi'^2 = \tau g + \frac{B^2(1 - U^2)}{U'(1 - U^2)^\delta}\varphi'''$$

$$(1 - U^2)\left(\frac{UB'}{U'B} - 1\right)\varphi g' = \frac{B^2(1 - U^2)}{U'(1 - U^2)^\delta}g'' \tag{12}$$

Отыщем, при каких $U(\xi)$ эти уравнения становятся обыкновенными.

Это, очевидно, будет только тогда, когда одновременно

$$(1 - U^2)\left(\frac{UB'}{U'B} - 1\right) = \text{const}, \qquad \frac{B^2(1 - U^2)}{U'(1 - U^2)^\delta} = \text{const} \tag{13}$$

Дифференцируя второе равенство, легко найдем

$$\frac{B'}{B} = \frac{1}{2}\left\{\frac{U''}{U'} - \frac{2(\delta - 1)UU'}{1 - U^2}\right\}$$

Подставим это выражение в первое равенство (13), обозначив при этом постоянную в правой части через — β^{-1}. Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{UU''}{U'^2} = 1 - \frac{\beta^{-1} - (\delta - 1)U^2}{1 - U^2} \tag{14}$$

Напомним, что $\delta = k(\alpha - 1)/(k - 1)$ и α может быть выбрано произвольно.

Выберем сначала α так, чтобы $\delta - 1 = \beta^{-1}$. В этом случае уравнение приобретает вид: $UU'' = 2(1 - \beta^{-1})U'^2$. Нетрудно убедиться, что все решения этого уравнения исчерпываются степенными и показательными функциями:

$$U = (a\xi + b)^n \quad \text{при } \beta \neq 2, \qquad U = ae^{b\xi} \quad \text{при } \beta = 2 \tag{15}$$

Здесь, кроме того, в первом случае $\beta = 2n/(n + 1)$. Теперь $B(\xi)$ можно найти из второго равенства (13). Не ограничивая общности, пронормируем B так, чтобы

$$\left|\frac{B^2(1 - U^2)}{U'(1 - U^2)^\delta}\right| = \left|\frac{1}{\beta}\right| \qquad \text{или} \qquad \frac{B^2(1 - U^2)}{U'(1 - U^2)^\delta} = \pm\frac{1}{\beta}$$

Здесь знак в правой части совпадает с соответствующим знаком в равенстве $\operatorname{sign} U' = \pm \operatorname{sign}\beta$. В случае знака плюс система (12) примет вид:

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = \beta(\varphi'^2 - \tau g), \qquad g'' + \varphi g' = 0 \qquad \left(B = \sqrt{\frac{U'}{\beta}(1-U^2)^{1/\beta}}\right)$$

а в случае знака минус

$$-\varphi''' + \varphi\varphi'' = \beta(\varphi'^2 - \tau g), \qquad g'' - \varphi g' = 0 \qquad \left(B = \sqrt{-\frac{U'}{\beta}(1-U^2)^{1/\beta}}\right)$$

Итак, если α выбрано таким образом, что $\delta - 1 = \beta^{-1}$, то в плоскости ξ, η (переменная ξ зависит от α) уравнения (8) приводятся к обыкновенным только тогда, когда $U(\xi)$ выражается в виде (15). Если же α выбирать иначе, то для отыскания тех $U(\xi)$, при которых уравнения (8) становятся обыкновенными, надо решать уравнение (14). Понижая его порядок, получим

$$\frac{dU}{d\xi} = K \frac{U^\gamma}{(1-U^2)^{\frac{\gamma}{2}+\delta-2}} \qquad \left(2 - \frac{2}{\beta} = \gamma\right) \tag{16}$$

где K — некоторая постоянная. Отсюда уже квадратурой можно найти связь между U и ξ.

Заметим, между прочим, что при $\delta - 1 = \beta^{-1}$ это уравнение принимает вид: $dU/d\xi = KU^\gamma$, все решения которого даны формулами (15).

Если α выбрано так, что $\delta - 1 = \beta^{-1}$, то закон изменения $U(\xi)$, при котором возможно автомодельное решение, выражается в соответствующей плоскости ξ, η наиболее просто. Если же α выбрать иначе, то переменная ξ будет иной, и закон $U(\xi)$ будет другим. Однако каким бы ни было α, возвращаясь к переменным x, y, мы получим один и тот же закон для $U(x)$.

Указанное выше позволяет сформулировать предложение.

3°. Если $\sigma = 1$, $\tau = \text{const}$, то уравнения (8) сводятся к обыкновенным только тогда, когда закон распределения скоростей $U(\xi)$ при подходящем выборе α выражается в форме (15).

Замечание. Исследуя систему (12), мы положили

$$(1-U^2)\left(\frac{UB'}{U'B} - 1\right) = \frac{1}{\beta}$$

предположив, что эта величина отлична от нуля. Если же положить ее равной нулю, то второе уравнение (12) немедленно даст $g'' = 0$. Решения этого уравнения есть линейные функции, они не могут удовлетворять граничным условиям для $g(X)$. Так что в этом случае автомодельное решение заведомо не существует. Отметим, что при отсутствии теплообмена предположение $UB'/U'B - 1 = 0$ соответствует конфузору в плоскости ξ, η и приводит к автомодельному решению [4].

Доказанные утверждения 1°, 2°, 3° можно объединить в следующую теорему.

Теорема 2. Для того, чтобы при $\sigma = 1$ уравнения (8) были обыкновенными дифференциальными уравнениями, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

$$1.\ U = \text{const}, \quad \tau = A(\xi + c)^n \qquad 2.\ \tau = \text{const}, \quad U = (a\xi + b)^n$$

$$3.\ \tau = \text{const}, \quad U = ae^{b\xi}$$

При этом функция $B(\xi)$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя.

Для этих систем каждый раз следует решать уже одномерную краевую задачу на полуоси. В этой работе не рассматривается вопрос о существовании и единственности решения указанных краевых задач. Этот вопрос весьма сложен и далеко не исследован. В работе [7], например, показано, что в случае несжимаемой жидкости без теплообмена (т. е. $\tau g = 1$) уравнение $\varphi''' + \varphi\varphi'' = \beta(\varphi'^2 - 1)$ при $\beta < 0$ имеет бесконечно много решений, удовлетворяющих всем граничным условиям. В этом случае из всех решений выделяется некоторое решение, имеющее определенный порядок роста на бесконечности.

Выше решен вопрос о разыскании всех автомодельных решений системы (2) — (4) в плоскости ξ, η в смысле принятого определения. Как нетрудно понять, автомодельные в этом смысле решения не будут, вообще говоря, автомодельными решениями системы (1) в плоскости x, y в аналогичном смысле.

Поступила 12 I 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldstein S. A note on the boundary layer equations, Proc. Cambr. Phil. Soc., 35, 1939.
2. Mangler W. Die «ähnlichen» Lösungen der Prandtlischen Grenzschlichtgleichungen. Z. angew. Math. und Mech., 23, 1943.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2, Гостехиздат, 1948.
4. Дорфман А. Ш., Швец И. Т. Некоторые частные случаи решения уравнений пограничного слоя в сжимаемой жидкости. ПММ, т. 19, вып. 4, 1955.
5. Levy S. Effect of large temperature changes (including viscous heating) upon laminar boundary layers with veriable freestreem velocity. JAS, 21, No. 7, 1954.
6. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, т. VI, вып. 6, 1942.
7. Hartree D. R. On an equation occuring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Cambr. Phil. Soc., 33, 1937.

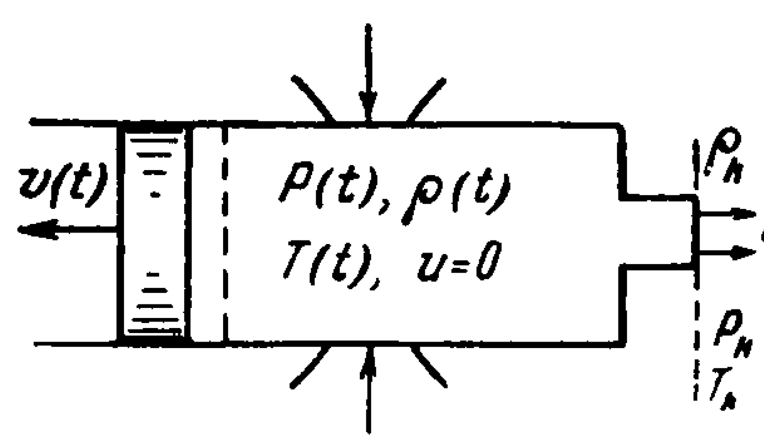
КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА ПЕРЕМЕННОГО ОБЪЕМА

И. М. Беленький

(Москва)

Рассматривается задача истечения газа из цилиндрического сосуда с подвижной задней стенкой через малое отверстие, сделанное в передней стенке сосуда. Одновременно с истечением происходит подвод газа в сосуд. Эта задача представляет интерес в теории газовых двигателей, в задачах внутренней баллистики и др.

1. Постановка задачи. В цилиндрический сосуд, задняя стенка которого представляет собой массивный поршень, который может перемещаться под действием расширяющихся газов, подводится без начальной скорости газ при температуре T_1 (эта температура может быть температурой горения топлива). Из сосуда газ вытекает через малое отверстие, сделанное в передней стенке, в среду без противодавления так что в самом отверстии устанавливается критический режим истечения, и, следовательно, скорость газа на выходе равна местной скорости звука (см. фигуру).



Наибольшую трудность в рассматриваемой нестационарной задаче — задаче истечения — представляет вопрос о собственном движении газа в сосуде, поскольку взаимодействие отраженных волн, идущих от поршня и от передней стенки и распространяющихся по движущемуся газу, представляет весьма сложную физическую картину.

Так, в решении задачи Лагранжа, предложенном Лявом и Пиддуком [1], уже после рассмотрения второй волны формулы принимают довольно громоздкий вид, так что их практическое использование становится довольно затруднительным.

Мы здесь примем следующую приближенную постановку задачи. Будем полагать, что после распространения первых волн в газе устанавливается режим, при котором основные параметры, определяющие состояние газа, а именно давление p, плотность ρ и абсолютная температура T, будут мало меняться для данного момента времени при переходе от одной точки к другой и будут лишь функциями времени t, т. е. $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$ и $T = T(t)$.

Если диаметр сосуда велик по сравнению с выходным отверстием, а масса поршня достаточно велика по сравнению с массой газа, находящегося в сосуде, то собственным движением газа в сосуде можно пренебречь, полагая скорость газа $u = 0$.

Слой газа, находящийся непосредственно у поршня, будет иметь, очевидно, скорость, равную скорости поршня $v(t)$. Это обстоятельство при составлении уравнения движения и уравнения энергии можно учесть, если вместо массы поршня m рассматривать его приведенную массу M.