

**О СВЕРХЗВУКОВЫХ ПРОФИЛЯХ, ИМЕЮЩИХ
МИНИМАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ**

Ю. Д. Шмыглевский
(Москва)

1. **Интегральные формулы.** Рассмотрим задачу отыскания профиля, обладающего минимальным волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке газа. Пусть заданы равномерный поток газа, набегающий со скоростью w_∞ , параллельной оси x , и точки A и B , через которые должен проходить искомый профиль (фиг. 1).

Из точки A выходит ударная волна AC , которая может в частных случаях вырождаться в характеристику набегающего потока.

Проведем из точки B характеристику второго семейства до пересечения с ударной волной в точке C . Из точки C проведем характеристику первого семейства до пересечения с профилем AB в точке D .

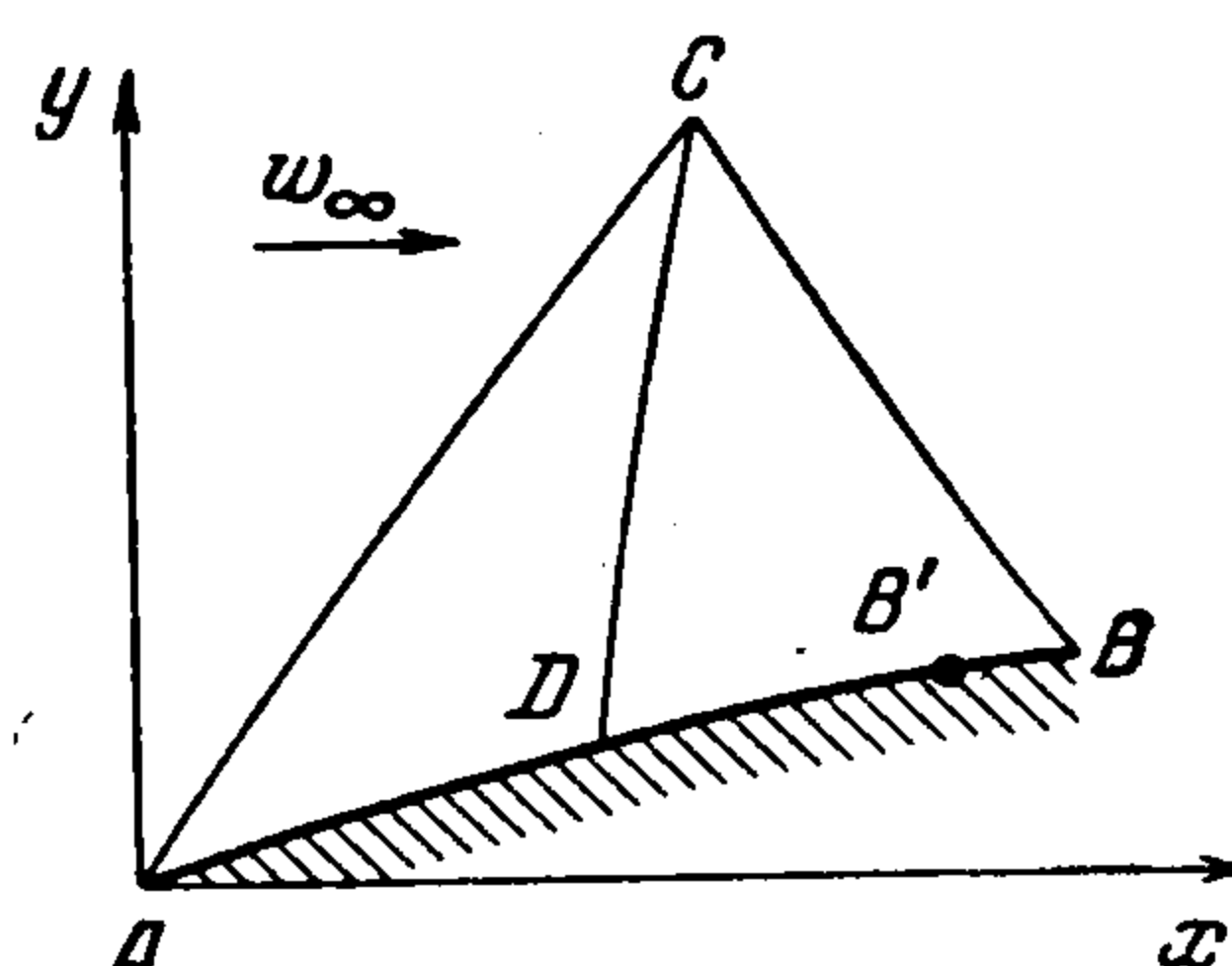
Течение определяется уравнениями неразрывности и движения, интегралом Бернулли и уравнением адиабатичности

$$\frac{\partial \rho w \cos \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \rho w \sin \vartheta}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$w \cos \vartheta \frac{\partial w \cos \vartheta}{\partial x} + w \sin \vartheta \frac{\partial w \cos \vartheta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{w^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \tag{1.3}$$

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = f(\psi) \tag{1.4}$$



Фиг. 1

где x, y — декартовы координаты, w — скорость, отнесенная к критической скорости течения a_* ; ϑ — угол наклона скорости к оси x , ρ — плотность газа, отнесенная к плотности набегающего потока ρ_∞ , p — давление, отнесенное к $\rho_\infty a_*^2$, κ — показатель адиабаты, ψ — функция тока.

Введем угол Маха α по формуле $\sin^2 \alpha = \kappa p / \rho w^2$.

Если линия CD является характеристикой, то часть профиля BD не влияет на течение слева от CD . Отсюда следует, что участок BD должен давать минимальное сопротивление. Возникает вспомогательная задача определения формы контура BD при заданной характеристике CD . Эта задача совершенно аналогична задаче для осесимметричных течений, рассмотренной в [1,2], решается тем же методом и приводит к следующим результатам.

На характеристике BC величины α и ϑ определяются из формул

$$\mu \sin 2\alpha + \kappa [\mu \sin 2\vartheta + \lambda (1 - \cos 2\vartheta)] = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{S(\sigma) A(\alpha)}{V \kappa} - \frac{\sin^2 \vartheta}{\mu \cos \alpha} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - \cos 2\alpha}} = 0 \tag{1.6}$$

где

$$A(\alpha) = \left(\frac{\kappa + 1}{2\kappa} \frac{1 - \cos 2\alpha}{\kappa - \cos 2\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$$

Величина $\sigma(\psi)$ имеет следующий смысл. Для дальнейшего неудобно вводить энтропийную функцию. Удобнее считать, что газ прошел через ударную волну AC , угол наклона которой к оси x для каждого ψ равен $\sigma(\psi)$. Величина $S(\sigma)$ равна

$$S(\sigma) = \left[\frac{2w_\infty^2 \sin^2 \sigma}{\kappa + 1} - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} (1 - W) \right]^K \left[\frac{1 - W \cos^2 \sigma}{w_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right]^\kappa$$

где

$$W = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w_\infty^2, \quad K = \frac{1}{\kappa - 1}$$

Входящие в (1.5) и (1.6) величины λ и μ представляют собой постоянные множители Лагранжа.

Рассмотрим теперь полную задачу.

Контур, состоящий из линии ударной волны AC , характеристики BC и профиля AB , обозначим через L , а область, ограниченную этим контуром, — через Σ .

Из уравнений (1.1) и (1.2) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta) + \frac{\partial}{\partial y} \rho w^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

Интегрируя обе части этого уравнения по области Σ и переходя по формуле Грина к контурному интегралу, получим

$$\oint_L -\rho w^2 \sin \vartheta \cos \vartheta dx + (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta) dy = 0 \quad (1.7)$$

Составляющая χ этого интеграла по линии тока AB ($dy = \operatorname{tg} \vartheta dx$) с точностью до постоянного множителя совпадает с величиной сопротивления профиля:

$$\chi = \int_{y=y_A}^{y_B} p dy$$

Выразим величину χ через интегралы по AC и BC , используя (1.7). Вдоль ударной волны

$$dx = \frac{\operatorname{ctg} \sigma}{w_\infty} d\psi, \quad dy = \frac{1}{w_\infty} d\psi \quad (1.8)$$

Кроме того, слева от ударной волны

$$\rho = 1, \quad w = w_\infty, \quad \vartheta = 0, \quad p = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - w_\infty^2 \right)$$

Вдоль характеристики второго семейства

$$dx = -S(\sigma) A(\alpha) \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{\sqrt{\kappa}} d\psi, \quad dy = -S(\sigma) A(\alpha) \frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sqrt{\kappa}} d\psi \quad (1.9)$$

Используя эти равенства, выражение для α и уравнение (1.3), получим

$$\begin{aligned} \chi = \int_{\psi=0}^{\psi_c} \left\{ \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left(w_\infty + \frac{1}{w_\infty} \right) - \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - \cos 2\alpha}} \left[\cos \vartheta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\kappa} \sin \alpha \sin(\vartheta - \alpha) \right] \right\} d\psi \end{aligned} \quad (1.10)$$

причем, $\chi = \rho_0 \sqrt{(\kappa + 1)/2} \bar{\chi}$ (ρ_0 — плотность торможения).

Заданные величины $X = x_B - x_A$ и $Y = y_B - y_A$ при помощи (1.8) и (1.9) также можно выразить в виде интегралов по AC и BC :

$$\begin{aligned} X &= \int_{\psi=0}^{\psi_c} \left[\frac{\operatorname{ctg} \sigma}{w_\infty} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} S(\sigma) A(\alpha) \cos(\vartheta - \alpha) \right] d\psi \\ Y &= \int_{\psi=0}^{\psi_c} \left[\frac{1}{w_\infty} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} S(\sigma) A(\alpha) \sin(\vartheta - \alpha) \right] d\psi \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Вариационная задача. Возникает следующая вариационная задача. При заданных w_∞ , X и Y найти функцию $\sigma(\psi)$, реализующую минимум функционала (1.10) при изопериметрических условиях (1.11), если $\alpha(\sigma)$ и $\vartheta(\sigma)$ определены системой уравнений (1.5) — (1.6). Последнее условие может не выполняться, когда имеет место крае-

вой экстремум. Из допустимости ударных волн в ABC следует допустимость кусочно-непрерывных функций $\alpha(\sigma)$ и $\vartheta(\sigma)$, удовлетворяющих в точках разрыва известным соотношениям на ударных волнах. Допустимыми функциями $\sigma(\psi)$ являются непрерывные функции.

Для решения задачи применим метод множителей Лагранжа. Составим функционал

$$I = \int_{\psi=0}^{\psi_c} \Phi(\sigma) d\psi \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) = & \frac{\kappa+1}{2\kappa} \left(w_\infty + \frac{1}{w_\infty} \right) - \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa - \cos 2\alpha}} \left[\cos \vartheta - \frac{1}{\kappa} \sin \alpha \sin(\vartheta - \alpha) \right] + \\ & + \frac{\lambda + \mu \operatorname{ctg} \sigma}{w_\infty} + \frac{1}{V\kappa} S(\sigma) A(\alpha) [\lambda \sin(\vartheta - \alpha) + \mu \cos(\vartheta - \alpha)] \end{aligned}$$

λ, μ — множители Лагранжа, подлежащие определению. Их значения определяются из условий (1.11). Равенства (1.5) и (1.6) при этом, конечно, сохраняют смысл и определяют зависимость $\alpha(\sigma)$ и $\vartheta(\sigma)$.

Первая вариация функционала (2.1) имеет вид:

$$\delta I = \Phi|_{\psi=\psi_c} \delta\psi_c + \int_{\psi=0}^{\psi_c} \Phi_\sigma \delta\sigma d\psi$$

Для получения экстремума приравняем нулю выражение, стоящее перед интегралом:

$$\Phi|_{\psi=\psi_c} = 0 \quad (2.2)$$

Поскольку допустимые вариации δX и δY равны нулю, получаем

$$\delta \bar{\chi} = \int_{\psi=0}^{\psi_c} \Phi_\sigma \delta\sigma d\psi \quad (2.3)$$

Для получения экстремума необходимо приравнять нулю выражение, стоящее под знаком интеграла в (2.3). Это дает $\Phi_\sigma = 0$ или

$$w_\infty \sin^2 \sigma \cos \sigma S(\sigma) s(\sigma) A(\alpha) [\lambda \sin(\vartheta - \alpha) + \mu \cos(\vartheta - \alpha)] - V\kappa \mu = 0 \quad (2.4)$$

где

$$s(\sigma) = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left[\frac{4w_\infty^2 \sin \sigma}{4\kappa w_\infty^2 \sin^2 \sigma - (\kappa^2 - 1)(1 - W)} - \frac{1 - W}{(1 - W \cos^2 \sigma) \sin \sigma} \right]$$

Уравнения (1.5), (1.6) и (2.4), кроме α, ϑ и σ , содержат лишь постоянные величины. Следовательно, при выполнении уравнения Эйлера (2.4) получим $\alpha = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$.

Казалось бы, решение задачи получается в простой форме: линия ударной волны прямолинейна, за ударной волной имеет место равномерный поток и искомый профиль прямолинейен. Однако это не так.

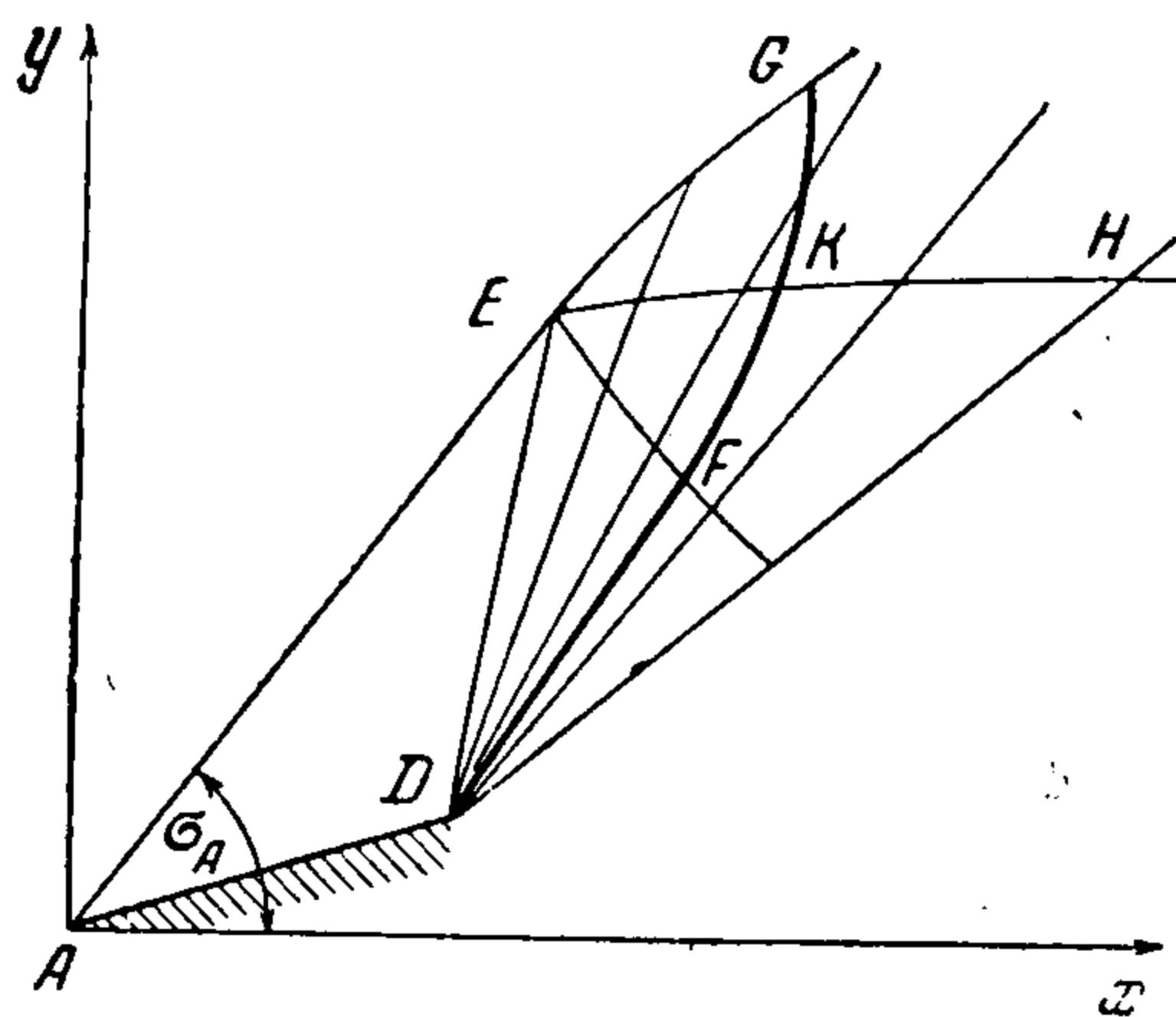
Исключим λ и μ из уравнений (1.5) и (2.4). Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon = & s(\sigma) A(\alpha) (\sin 2\alpha + \kappa \sin 2\vartheta) + \\ & + \frac{2\kappa \sin^2 \vartheta}{\sin(\vartheta - \alpha)} \left[\frac{V\kappa}{w_\infty S(\sigma) \sin^2 \sigma \cos \sigma} - s(\sigma) A(\alpha) \cos(\vartheta - \alpha) \right] = 0 \quad (2.5) \end{aligned}$$

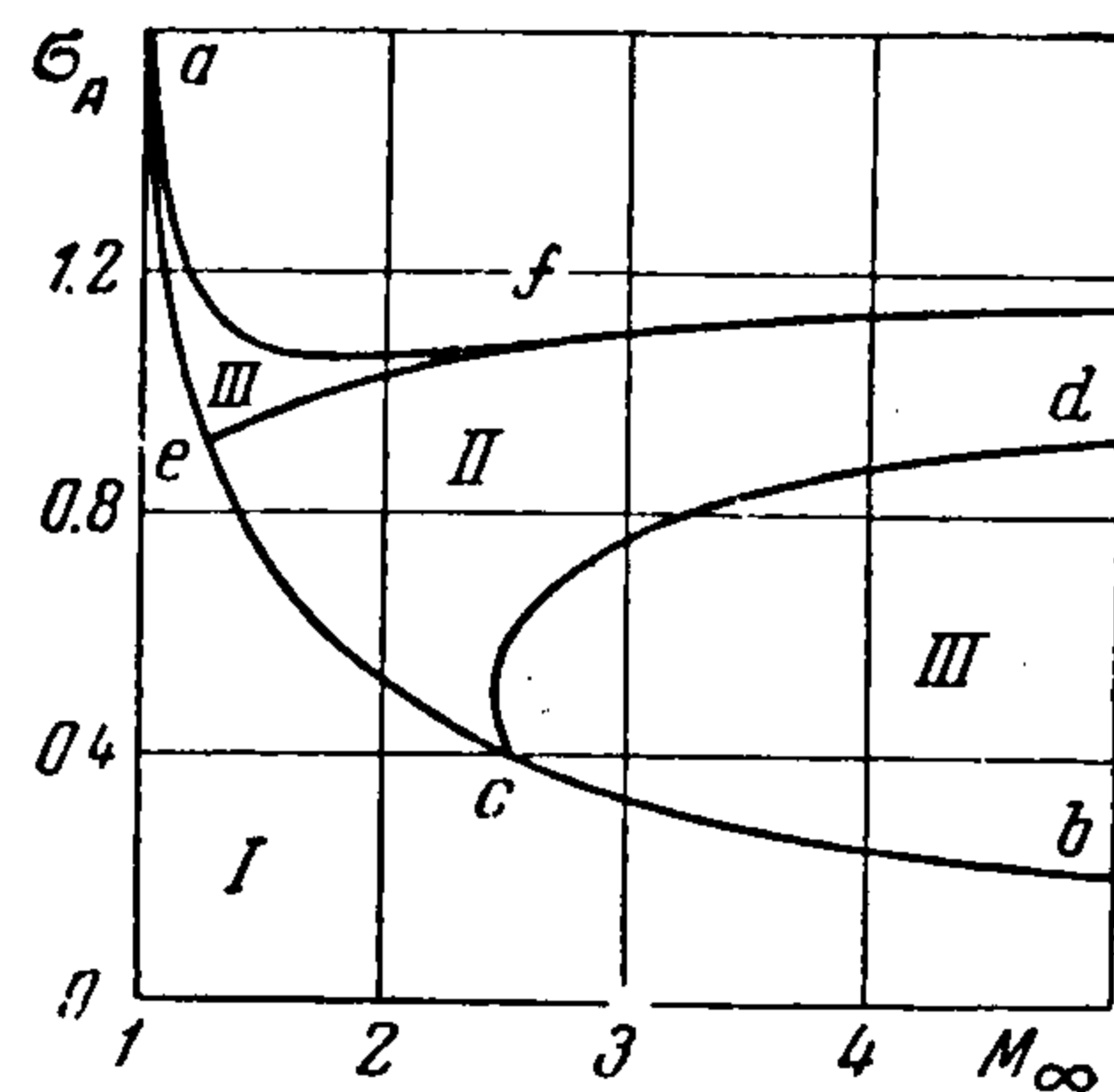
Если теперь подставить в (2.5) известные из соотношений на ударной волне $\alpha(\sigma, w_\infty)$, $\vartheta(\sigma, w_\infty)$, то нетрудно убедиться в том, что полученное равенство не удовлетворяется тождественно.

Одним из корней уравнения $\varepsilon = 0$ является $\sigma = \arcsin M_\infty^{-1}$, где M_∞ — число Маха набегающего потока. Этот корень соответствует тому случаю, когда линия AC является характеристикой набегающего потока.

Для любого удлинения $l = X:Y$ решение, удовлетворяющее уравнению (2.4) и соотношениям на ударной волне, вообще говоря, невозможно. Для нахождения решения необходимо рассмотреть предельные физически достижимые течения. Задача состоит в том, чтобы соединить прямолинейный участок ударной волны с прямолинейной характеристикой, линиями ударной волны и характеристики второго семейства, дающими крайний экстремум. Таковыми в случае течения разряжения являются линии, определяемые изломом контура AB .



Фиг. 2



Фиг. 3

Возможны следующие случаи.

а) Величина $\varepsilon = 0$ достигается в некоторой точке характеристики BC в случае течения расширения (выпуклый профиль).

б) Величина $\varepsilon = 0$ достигается на BC в случае течения сжатия (вогнутый профиль).

Рассмотрим первый случай. Построим все возможные течения, удовлетворяющие поставленным выше условиям и соответствующие различным значениям удлинения l . При этом какой-либо линейный размер можно фиксировать. Пусть точка D (фиг. 2) является точкой излома профиля, обеспечивающей расширение потока, AE — прямолинейный участок ударной волны, DE — прямолинейная характеристика. Из точки D выходит пучок характеристик первого семейства. EF является характеристикой второго семейства, проходящей через точку E . EKH — линия тока, проходящая через E . Такое течение определяется одним параметром, например σ_A .

В поле течения отметим линию $DFKG$, являющуюся геометрическим местом точек, обладающих следующими свойствами. На линии DFK выполняется равенство $\varepsilon = 0$. Точки участка KG таковы, что если из них выпустить характеристики второго семейства, удовлетворяющие равенствам (1.5) и (1.6), то в точках пересечения этих характеристик с линией тока EH , а следовательно, и при меньших ψ выполняется

Таблица 1

l	8.8590	5.0514	3.3197	2.5066
σ_A	0.42522	0.50039	0.60074	0.70141
x_B	0.99369	0.98096	0.95750	0.92881
y_B	0,11217	0.19420	0.28844	0.37055
x_D	0.10892	0.17266	0.23290	0.28030
y_D	0.01245	0.03478	0.07143	0.11323
$c_{x \min}$	0.09697	0,19401	0.33882	0.49994
$c_{x \text{ клина}}$	0.09698	0.19403	0.33888	0.49999

то же равенство $\epsilon = 0$. Эти характеристики и характеристики первого семейства, выходящие из FKG , определяют искомый профиль (задача Гурса).

Для такого течения нельзя найти явного выражения условия трансверсальности, аналогичного (2.2). Поэтому прибегнем к численному нахождению минимума по граничным условиям, а именно для каждого σ_A выделим получающийся профиль заданного удлинения и численно найдем минимум $\chi: Y$ по σ_A .

Замечание. В рассматриваемой задаче реализуется краевой экстремум и первая вариация $\delta\bar{\chi}$ в решении не равна нулю. Распространенное утверждение о том, что $\delta\bar{\chi} \neq 0$ не может дать решения задачи, является неверным.

3. Примеры. На фиг. 3 изображена зависимость $\sigma_A(M_\infty)$, удовлетворяющая равенству $\epsilon = 0$. Линия ab определяется равенством

$$\sigma = \arcsin \frac{1}{M_\infty}$$

линия cd дает второй корень уравнения $\epsilon = 0$, а линия ef — третий корень. Линия af соответствует звуковой скорости за ударной волной. Область I физически недостижима (скачок разряжения), области II соответствуют вогнутые профили, а областям III — выпуклые.

Таблица 2

σ_A	c_x	σ_A	c_x
		0.7010	0.499936
0.6980	0.499993	0.7012	0.499935
0.6990	0.499979	0.7014	0.499935
0.7000	0.499954	0.7016	0.499935
0.7002	0.499949	0.7018	0.499936
0.7004	0.499945	0.7020	0.499938
0.7006	0.499941	0.7040	0.499980
0.7008	0.499938	0.7080	0.500109

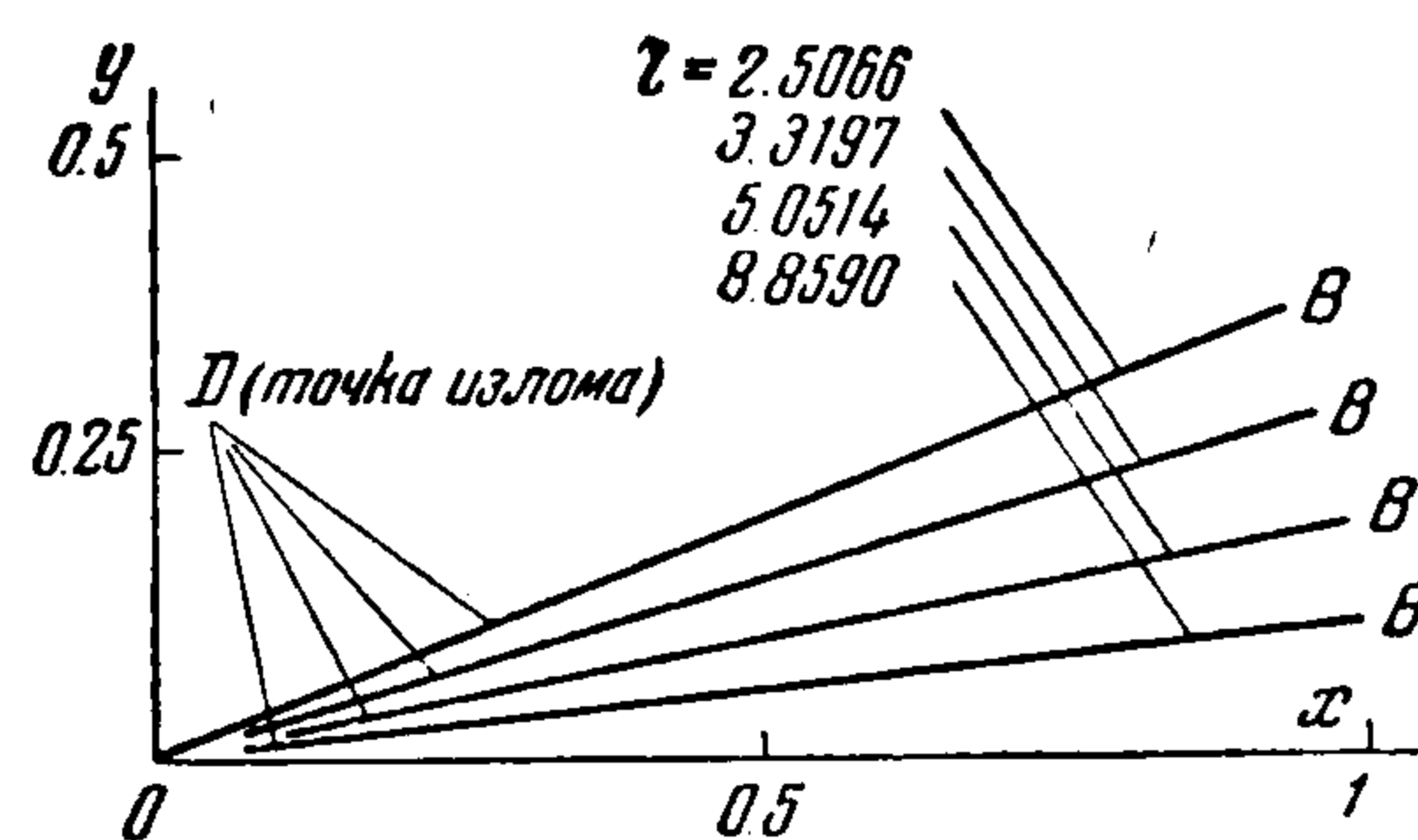
участков AD и DB' . Криволинейная часть профиля $B'B$ чрезвычайно мала. Для профиля с удлинением $l = 2.5066$, например, при нахождении $c_{x\min}$, были получены величины $c_x(\sigma_A)$, приведенные в табл. 2.

Значение $\sigma_A = 0.7000$ соответствует тому случаю, когда характеристика BC проходит через точку F (фиг. 2).

Поступила 23 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, т. XXI, вып. 2, 1957.
2. Шмыглевский Ю. Д. Вариационная задача газодинамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ДАН СССР, т. 113, № 3, 1957.



Фиг. 4

Примеры расчетов были проведены для области III. Полученные для $M_\infty = 3$ результаты расчетов сведены в табл. 1, а профили изображены на фиг. 4.

Через c_x обозначен коэффициент волнового сопротивления. Из табл. 1 и фиг. 4 видно, что профили, имеющие минимальное сопротивление, для рассчитанных случаев, практически совпадают с клином, а выигрыш в величине c_x оказывается ничтожным. Пучок характеристик занимает малый угол; профиль состоит из двух прямолинейных