ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. П. Коробейников, Е. В. Рязанов

(Москва)

Для исследования свойств решений уравнений одномерного неустановившегося движения совершенного газа при наличии ударных волн и их приложений, большой интерес представляют точные разрывные решения.

В настоящее время точные разрывные решения получены в единичных случаях автомодельных задач [1]. Для получения новых точных решений можно воспользоваться частным решением уравнений газовой динамики, опубликованным Л. И. Седовым [1, 2],

$$v = -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}r, \qquad p = \mu^{\gamma\nu}\left\{C + \frac{\nu(\gamma-1)}{2(s+2)}BP(x)\right\}$$
$$\rho = \mu^{\nu}\xi^{s}P'(x), \qquad \frac{d\mu}{dt} = \pm\mu^2\left(A + B\mu^{\nu(\gamma-1)}\right)^{1/2} \tag{1}$$

Здесь v — скорость, ρ — плотность, p — давление, $P(x)$ — произвольная функция, r — расстояние от центра симметрии, t — время, $\mu = \mu(t)$ — функция от времени, A, B, C — произвольные постоянные, s — некоторая постоянная, $\nu = 1, 2, 3$ соответствует случаю плоских, цилиндрических и сферических волн, γ — показатель адиабаты, $\xi = r\mu$ — лагранжева координата, $x = \xi^{s+2}$.

Попытка использования решения Л. И. Седова для построения решений с ударными волнами была сделана Келлером [3]. Ниже рассматривается способ построения решения для случая, когда ударная волна распространяется по покоящемуся газу с переменной плотностью $\rho_1 = \rho_1(r)$ и постоянным давлением p_1. Если $r_2(t)$ — радиус ударной волны, то обозначим:

$$v_2 = v(t, r_2), \qquad \rho_2 = \rho(t, r_2), \qquad p_2 = p(t, r_2)$$

Для построения замкнутого решения следует определить закон движения ударной волны $r_2(t)$ и найти функцию $P(x)$.

Будем считать также, что функция $\rho_1(r)$ нам заранее неизвестна. Неизвестные функции $r_2(t)$, $P(x)$, $\rho_1(r)$ будем определять из требования удовлетворения решением (1) граничных условий на фронте ударной волны:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1}(1-q)c, \qquad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2q}\rho_1, \qquad p_2 = \frac{p_1}{\gamma+1}\,\frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{q} \tag{2}$$

где

$$c = \frac{dr_2}{dt}, \qquad q = \frac{\gamma p_1}{\rho_1 c^2}$$

Из первого уравнения (1) и первого условия (2) имеем:

$$q = 1 + \frac{\gamma+1}{2}\frac{r_2}{\mu}\frac{d\mu}{dr_2} \tag{3}$$

Используя второе и третье условия (2) и значения ρ_2 и p_2 из (1), мы можем исключить произвольную функцию $P(x)$. Получим уравнение:

$$q' = -q\left\{\frac{\nu}{2\mu}[2\gamma-(\gamma-1)q] + \frac{B\nu(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{8(\gamma-1+2q)}\,\frac{(r_2{}^2\mu^2)'\,\mu^{\nu(\gamma-1)-4}}{(r_2')^2\,[A+B\mu^{\nu(\gamma-1)}]}\right\} \tag{4}$$

Этот прием исключения произвольной функции $P(x)$ был указан авторам Л. И. Седовым.

Штрихи в уравнении (4) означают производную по μ. В дальнейшем за независимую переменную примем μ.

Исключая функцию $q(\mu)$ из (3) и (4) и делая замену переменных $y=(\ln r_2)'$, получаем для нахождения $y(\mu)$ дифференциальное уравнение первого порядка типа Рикатти:

$$\frac{dy}{d\mu}=\nu y^2+\frac{1}{\mu}\left[\nu-1+\frac{\nu(\gamma-1)}{2}\,\frac{\mu^{\nu(\gamma-1)}}{\varkappa+\mu^{\nu(\gamma-1)}}\right]y-$$
$$-\frac{\varkappa(\gamma^2-1)\nu}{4\mu^2[\varkappa+\mu^{\nu(\gamma-1)}]},\qquad \varkappa=\frac{A}{B} \tag{5}$$

Зная решение этого уравнения $y=y(\mu)$, мы можем, пользуясь формулой (3), найти функцию $q(\mu)$ или $q(r_2)$, а следовательно, и $\rho_1(r)$.

Определив $p_2(\xi_2)$ и $\rho_2(\xi_2)$ по формулам (2), можно, пользуясь (1), определить вид функции $P(x)$, т. е. полностью решить задачу о построении решения. Решение уравнения (5) при $\varkappa\neq0$ и любых γ не выражается в простом виде через элементарные функции.

Рассмотрим частные случаи.

1) $\varkappa=0$. В этом случае значение величины B несущественно и ее можно принять равной 1.

Уравнение (5) просто интегрируется и имеет решение:

$$y(\mu)=\mu^{{}^1/_2\nu(\gamma+1)-1}\left\{c_1\left[1-\frac{2}{\gamma+1}\,\frac{1}{c_1}\,\mu^{{}^1/_2\nu(\gamma+1)}\right]\right\}^{-1} \tag{6}$$

Отсюда легко находятся зависимости $r_2(\mu)$ и $q(\mu)$

$$r_2(\mu)=c_2\left[1-\frac{2}{\gamma+1}\,\frac{1}{c_1}\,\mu^{\frac{\nu}{2}(\gamma+1)}\right]^{-\frac{1}{\nu}},\qquad q(\mu)=\frac{\gamma+1}{2}\,c_1\mu^{-\frac{\nu}{2}(\gamma+1)} \tag{7}$$

Здесь c_1 и c_2 — постоянные интегрирования.

Из формулы $\rho_1=\gamma p_1/c^2q$ можно найти $\rho_1(\mu)$. Исключая μ из зависимостей $r_2(\mu)$ и $\rho_1(\mu)$, получим:

$$\rho_1(r_2)=\gamma p_1 c_2^{2\nu}\left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\beta+1}c_1^{\beta-1}r_2^{\omega}\,(r_2^{\nu}-c_2^{\nu})^{\beta}\right]^{-1} \tag{8}$$

где

$$\beta=\frac{3\gamma\nu+4-\nu}{\nu(\gamma+1)},\qquad \omega=\frac{\nu(3-\gamma)+2(\gamma-1)}{\gamma+1}$$

Зависимость $\mu(t)$ в этом случае имеет вид:

$$\mu(t)=[c_3\mp kt]^{-\frac{1}{k}},\qquad k=\frac{1}{2}\nu(\gamma-1)+1 \tag{9}$$

где c_3 — постоянная интегрирования. Используя (7) и (9), находим закон движения ударной волны:

$$r_2(t)=c_2\left[1-\frac{2}{\gamma+1}\,\frac{1}{c_1}\,(c_3\mp kt)^{-\frac{\nu(\gamma+1)}{2k}}\right]^{-\frac{1}{\nu}} \tag{10}$$

Используя формулы (1), (2), (7), можно легко определить все характеристики движения на фронте ударной волны:

$$p_2=p_1\left[1-\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{c_2}{r_2}\right)^{\nu}\right]$$

$$v_2=\mp r_2\left\{(\gamma+1)\,c_1\left[1-\left(\frac{c_2}{r_2}\right)^{\nu}\right]\right\}^{\chi}\qquad\left(\chi=\frac{\nu(\gamma-1)+2}{\nu(\gamma+1)}\right) \tag{11}$$

$$\rho_2=\frac{2\gamma p_1c_2^{2\nu}}{(\gamma+1)\,r_2^{2(\nu+1)}}\left[\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{c_2}{r_2}\right)^{\nu}\right]^{-1}\left\{\left(1-\left(\frac{c_2}{r_2}\right)^{\nu}\right)\frac{c_1(\gamma+1)}{2}\right\}^{-\chi}$$

Найдем произвольную функцию $P(x)$. Так как $\xi_2 = r_2\mu$, то из (7) получаем:

$$c_2^\nu\varphi + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{c_1}\varphi^{\frac{\gamma+1}{2}} x_2^{\frac{\nu}{s+2}} - x_2^{\frac{\nu}{s+2}} = 0 \quad (\varphi(x) = \mu^\nu(x))$$

Из уравнений (1), (2), (7) получаем

$$P(x_2) = \frac{2(s+2)}{\nu(\gamma-1)}\left[\frac{p_1}{\gamma+1}\left(\frac{1-\gamma}{\mu^{\nu\gamma}} + \frac{4\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{c_1}\mu^{\frac{\nu}{2}(1-\gamma)}\right) - C\right]$$

Таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям (2), нужно взять $P(x)$ в виде

$$P(x) = \frac{2(s+2)}{\nu(\gamma-1)}\left[\frac{p_1}{\gamma+1}\left(\frac{1-\gamma}{\varphi^\gamma} + \frac{4\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{c_1}\varphi^{\frac{1-\gamma}{2}}\right) - C\right] \tag{12}$$

где $\varphi(x)$ находится из уравнения

$$c_2^\nu\varphi + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{c_1}\varphi^{\frac{\gamma+1}{2}} x^{\frac{\nu}{s+2}} - x^{\frac{\nu}{s+2}} = 0 \tag{13}$$

2) $B = 0$. В этом случае из (4) находим:

$$q(\mu) = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{1+c_1\mu^{\gamma\nu}} \qquad \left(c_1 = \frac{C}{p_1}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)$$

Из (1) и (3) получим:

$$r_2(t) = \frac{1}{c_2}A^{\frac{\gamma+1}{4}}(t+t_0)^{\frac{\gamma+1}{2}}\left[1 + k_2A^{\frac{\gamma\nu}{2}}(t+t_0)^{\gamma\nu}\right]^{-\frac{1}{\nu}}$$

Как и в предыдущем случае, здесь легко найти $\rho_1(r_2)$, $v_2(r_2)$, $p_2(r_2)$, $\rho_2(r_2)$, а также определить вид произвольной функции $P'(x)$.

3) $\gamma = 1$. Уравнение (4) в этом случае интегрируется. Исследование этого решения мы приводить не будем. Общее решение уравнения (5) при $\varkappa \neq 0$ и любых γ можно получить, воспользовавшись каким-либо его частным решением

Перейдем к вычислению энергии. На основании закона сохранения энергии можно записать:

$$E + \frac{\sigma_\nu p_1}{\nu(\gamma-1)}(r''^\nu - r'^\nu) = \sigma_\nu\int_{r'}^{r''}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1}\right)r^{\nu-1}dr \tag{14}$$

где E — энергия, выделившаяся за некоторое время в объеме между радиусами r' и r'' и отличная от кинетической и тепловой энергии газа (например энергия, выделившаяся при взрыве)

$$\sigma_\nu = 2\pi(\nu-1) + (\nu-2)(\nu-3)$$

Второй член в левой части уравнения (14) определяет начальную внутреннюю энергию газа.

В правой части уравнения (14) записана энергия, которой обладает газ, приведенный в движение ударной волной.

Используя (1) и преобразуя интеграл, стоящий в правой части (14), получим простое выражение для подсчета баланса энергии:

$$\frac{E}{\sigma_\nu} = \frac{p_1}{\nu(\gamma-1)}(r'^\nu - r''^\nu) + \frac{p(r'',t)r''^\nu - p(r',t)r'^\nu}{\nu(\gamma-1)} + \tag{15}$$

$$+ \frac{A\mu^\nu}{2(s+2)}(r^\nu P)\Big|_{r'}^{r''} - \frac{A\nu\mu^\nu}{2(s+2)}\int_{r'}^{r''}Pr^{\nu-1}dr$$

Пользуясь полученными выше результатами, можно решить неавтомодельную задачу о точечном взрыве в газе, начальная плотность которого переменна.

Действительно, из (1) и (15), полагая $A=0$, $r'=0$, $r''=r_2$ и считая, что E есть энергия, мгновенно выделившаяся при взрыве, получаем

$$p_2 = p_1\left[1+\frac{\nu(\gamma-1)}{\sigma_\nu}\frac{E}{p_1}\frac{1}{r_2{}^\nu}\right] \tag{16}$$

Из (8), (11) и (16) получаем начальное распределение плотности:

$$\rho_1(r)=\frac{b(\gamma-1)^2}{\gamma r^\omega}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1-\beta}\left(r^\nu+\frac{r^{0\nu}(\gamma^2-1)\nu}{2\sigma_\nu\gamma}\right)^{-\beta}$$

$$b=\frac{\nu^2 r^{02\nu}p_1}{\sigma_\nu{}^2 c_1{}^{\beta-1}},\qquad r^0=\left(\frac{E}{p_1}\right)^{\frac{1}{\nu}} \tag{17}$$

где r^0 — динамическая длина.

Из (17) видно, что $\rho_1(r)$ параметрически зависит от величин γ и r^0. Замечая, что $r_2(0)=0$, получим $c_3=0$. Считая $v\geqslant 0$ и используя (1), (12), (13), находим, что решение этой задачи имеет вид:

$$v=\frac{r}{kt},\qquad p=\frac{p_1}{\gamma+1}\mu^{\gamma\nu}\left[\frac{4\gamma}{c_1(\gamma+1)}\varphi^{\frac{1-\gamma}{2}}-(\gamma-1)\varphi^{-\gamma}\right]$$

$$\rho=\frac{2p_1}{\nu(\gamma^2-1)}\frac{\mu^{\nu-1}}{r}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{4\gamma}{c_1(\gamma+1)}\varphi^{\frac{1-\gamma}{2}}-(\gamma-1)\varphi^{-\gamma}\right]$$

Причем, $\varphi(\xi)\geqslant 0$ находится из уравнения:

$$\left(\frac{\xi}{r^0}\right)^\nu+\frac{(\gamma^2-1)\nu}{2\sigma_\nu\gamma}\varphi-\frac{2}{c_1(\gamma+1)}\left(\frac{\xi}{r^0}\right)^\nu\varphi^{\frac{\gamma+1}{2}}=0$$

Согласно (16), изменение давления непосредственно за фронтом ударной волны дается формулой:

$$p_2=p_1\left[1+\frac{\nu(\gamma-1)}{\sigma_\nu}R_2{}^{-\nu}\right]\qquad\left(R_2=\frac{r_2}{r^0}\right)$$

В частном случае, когда $c_1=0$, $p_1=0$ получим известное решение [1] автомодельной задачи о точечном взрыве, когда начальная плотность газа распределена по закону $\rho_1=A_1r^{-\omega}$, где A_1 — некоторая постоянная.

Укажем также, что изученные нами решения можно использовать для решения задач о движении в газе плоского, цилиндрического или сферического поршня. Из условия равенства скорости движения поршня и скорости частиц газа, прилегающих к поршню, имеем:

$$\frac{1}{r_n}\frac{dr_n}{dt}=-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}$$

где r_n — радиус поршня.

Отсюда получаем $r_n=k_1/\mu$, где k_1 — постоянная интегрирования. Используя (1), для скорости движения поршня имеем зависимость

$$\frac{dr_n}{dt}=\mp k_1(A+B\mu^{\nu(\gamma-1)})^{\frac{1}{2}}$$

Если $\mu(t)$ известна и найдена произвольная функция $P(x)$, то задача о поршне решена.

Авторы выражают глубокую благодарность Л. И. Седову за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 22 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механизме, 4-е изд., М., 1957.
2. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа, ДАН СССР, т. XC, № 5, 1953.
3. Keller J. B. Spherical, cylindrical and one-dimensional gas flows. Quart. Appl. Math., v. XIV, № 2, 1956, p. 171—184.