которое при $v_n = \text{const}$, как видно из (15), определяется более простым выражением. Функция $C(\nu, d/l, \beta)$ учитывает нестационарные эффекты, имеющие место при колебаниях решетки, и имеет вид:

$$C\left(\nu, \frac{d}{l}, \beta\right) = \frac{1 + j\mu K_1}{1 + j\mu\,(K_1 + (\pi / l)\,\Gamma_0 K_0)} \tag{26}$$

Определим еще величину гидродинамической силы, действующей на профиль в решетке. Воспользуемся для этого формулой [1]

$$Y = -\rho v_0 e^{j\sigma t}\,\mathrm{Re}\int\limits_{L_1}\left(\frac{dw_0}{dz} + j\mu_0 w_0 + f\right)dz \tag{27}$$

где L_1 — контур, охватывающий профиль и обходимый против хода часовой стрелки.

Выражение (27) можно расчленить на две части:

$$Y = Y_0 + Y_1, \qquad Y_0 = -\rho v_0 e^{j\sigma t}\,\mathrm{Re}\int\limits_{L_1}\left(\frac{dw_0}{dz} + j\mu_0 w_0\right)dz, \qquad Y_1 = -\rho v_0 e^{j\sigma t}\,\mathrm{Re}\int\limits_{L_1} f\,dz \tag{28}$$

Пользуясь формулами (12) и (24), находим следующее выражение:

$$Y_1 = \rho v_0 \Gamma_s C\left(\nu, \frac{d}{l}, \beta\right) e^{j\sigma t} \tag{29}$$

Сила же Y_0 обусловлена бесциркуляционным движением жидкости и связана с эффектом присоединенных масс. При чисто поступательных колебаниях имеем

$$Y_0 = -\mu_{yy}\frac{dV_n}{dt} \qquad \left(\mu_{yy} = \frac{2\rho l^2}{\pi}\ln \mathrm{ch}\,a,\; V_n = v_n e^{j\sigma t}\right) \tag{30}$$

Из проведенных вычислений [3] следует, что в значительном диапазоне значений густоты решетки d/l коэффициент присоединенной массы μ_{yy} слабо зависит от угла выноса β.

Поступила 9 I 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Колебания тонкого полиплана тандем в плоском несжимаемом потоке. ПММ (в печати).
2. Söhngen Heinz. Luftrkäfte an einem Schwingenden Schaufelkranz kleiner Teilung. Zeitschrift angew. Math. und Phis., Bd. 4, No. 4, 1953.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.

НЕКОТОРЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ОКОЛОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматриваются околозвуковые движения идеального газа, изображаемые в области годографа скорости кривой или поверхностью. Во второй части заметки определяется класс автомодельных решений плоских и осесимметрических течений.

§ 1. Пространственные течения с вырожденным годографом. 1°. Уравнения пространственных околозвуковых движений газа в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{gathered} uu_x - v_y - w_z = 0, \qquad u_y - v_x = 0, \qquad u_z - w_x = 0, \qquad v_z - w_y = 0 \\ u = (\varkappa + 1)\frac{U}{a_*}, \qquad v = (\varkappa + 1)\frac{V}{a_*}, \qquad w = (\varkappa + 1)\frac{W}{a_*} \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\varkappa$ — показатель адиабаты, U, V, W — добавки вдоль осей x, y, z к скорости, равной критической скорости a_* и направленной вдоль x.

Рассмотрим двойные волны, т. е. такие течения, у которых только два параметра v и w являются независимыми, в то время как

$$u = u(v, w) \tag{1.2}$$

Пользуясь равенством (1.2), из уравнений (1.1) имеем

$$(uu_v^2 - 1) v_y + 2uu_v u_w v_z + (uu_w^2 - 1) w_z = 0 \tag{1.3}$$

Поскольку каждая плоскость физического пространства $x = \mathrm{const}$ отображается в пространстве годографа скорости на одну и ту же рассматриваемую нами поверхность Σ, в уравнении (1.3) можно выбрать в качестве независимых переменных v и w, а y и z рассматривать как их функции. Тогда

$$v_y = z_w \Delta, \qquad v_z = -y_w \Delta, \qquad w_z = y_v \Delta, \qquad \Delta = v_y w_z - v_z^2$$

и из уравнения (1.3) следует

$$(uu_v^2 - 1) z_w - 2uu_v u_w y_w + (uu_w^2 - 1) y_v = 0 \tag{1.4}$$

Введем теперь функцию размещения χ, определяемую равенством [1]

$$\chi = ux + vy + wz - \varphi \qquad (u = \varphi_x, \; v = \varphi_y, \; w = \varphi_z) \tag{1.5}$$

Вычисляя ее дифференциал, находим $d\chi = (y + xu_v)\, dv + (z + xu_w)\, dw$. Отсюда

$$\chi_v = y + xu_v, \qquad \chi_w = z + xu_w \tag{1.6}$$

Дифференцируя формулы (1.6) при $x = \mathrm{const}$, имеем

$$y_v = \chi_{vv} - xu_{vv}, \qquad y_w = \chi_{vw} - xu_{vw}, \qquad z_w = \chi_{ww} - xu_{ww} \tag{1.7}$$

Подставляя соотношения (1.7) в уравнение (1.4) и приравнивая нулю члены при z в нулевой степени и члены при z в первой степени, получим два уравнения, определяющие функции w и χ

$$\begin{gathered}(uu_w^2 - 1) u_{vv} - 2uu_v u_w u_{vw} + (uu_v^2 - 1) u_{ww} = 0 \\ (uu_w^2 - 1) \chi_{vv} - 2uu_v u_w \chi_{vw} + (uu_v^2 - 1) \chi_{ww} = 0\end{gathered} \tag{1.8}$$

После решения уравнений (1.8) переход к физическому пространству осуществляется по формулам (1.6) [1]. В случае конических течений $\chi = 0$ и $y / x = -u_v$, $z / x = -u_w$.

2°. Отметим одно частное решение первого уравнения (1.8). Легко видеть, что оно допускает группу преобразований $U(v, w) = \alpha_1^{-2/3} u(\alpha_1 v, \alpha_1 w)$, где α_1 — произвольная не равная нулю постоянная, не изменяющую вида уравнения. Поэтому у уравнений (1.8) существует решение вида

$$u = v^{2/3} f_1(\xi_1), \qquad \xi_1 = w / v \tag{1.9}$$

причем функция f_1 удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\xi_1^2 - 2\xi_1^2 f_1 f_1'^2 + \frac{4}{9} f_1^3\right) f_1'' + \frac{2}{9} f_1^2 f_1'^2 - \frac{2}{3} \xi_1 f_1' + \frac{2}{9} f_1 = 0 \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) инвариантно в свою очередь по отношению к аналогичной группе преобразований $\Phi_1(\xi_1) = \alpha_2^{-2/3} f(\alpha_2 \xi_1)$, поэтому оно допускает понижение порядка. Действительно, полагая переменной $f_1 = \xi_1^{2/3} F_1(\eta_1)$, $\eta_1 = \ln|\xi_1|$, приведем уравнение (1.10) к виду, не содержащему независимой переменной. Обозначив далее $dF_1 / d\eta_1 = \Psi_1$ и считая F_1 независимой переменной, получаем уравнение первого порядка

$$\frac{d\Psi_1}{dF_1} = \frac{{}^4/_9 F_1 + {}^1/_3 \Psi_1 + {}^2/_3 F_1 \Psi_1^3 + {}^2/_9 F_1^2 \Psi_1^2 - {}^4/_9 F_1^3 \Psi_1 - {}^{16}/_{81} F_1^4}{\Psi_1 (1 - {}^4/_9 F_1^3 - {}^8/_3 F_1^2 \Psi_1 - 2F_1 \Psi_1^2)} \tag{1.11}$$

После решения уравнения (1.11) и выполнения второго интегрирования

$$\eta_1 - \eta_0 = \int \frac{dF_1}{\Psi_1(F_1)}$$

где η_0 — произвольная постоянная, переход к физическому пространству осуществляется по формулам

$$\frac{y}{x} = \frac{w^{2/3}}{v} \frac{dF_1}{d\eta_1}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{1}{w^{1/3}} \left(\frac{2}{3} F_1 + \frac{dF_1}{d\eta_1}\right) \tag{1.12}$$

3°. Рассмотрим осесимметрические течения исследуемого класса. В этом случае

$$u = u(\omega), \qquad \omega = \sqrt{v^2 + w^2} \tag{1.13}$$

и из первого уравнения (1.8) следует

$$\omega u'' - uu'^3 + u' = 0 \tag{1.14}$$

Обращая роль зависимой и независимой переменных, получаем известное уравнение, решение которого дал Буземан [2]:

$$\omega\omega'' = \omega'^2 - u \tag{1.15}$$

4°. Напишем дифференциальное уравнение характеристик первого уравнения (1.8):

$$(uu_w^2 - 1)\, dw^2 + 2uu_v u_w dv dw + (uu_v^2 - 1)\, dv^2 = 0 \tag{1.16}$$

Учитывая, что вдоль рассматриваемой поверхности Σ выполняется равенство $du = u_v dv + u_w dw$, из уравнения (1.16) имеем

$$u du^2 = dv^2 + dw^2 \tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) определяет характеристические кривые S_+ и S_- на поверхности Σ. Можно показать, что подобным уравнением описываются течения газа, представляющие собой простые волны. В этом случае все течение отображается в пространстве годографа скорости на одну S-кривую.

Решение уравнения (1.17) дается формулами

$$u = \left(\frac{3}{2}\tau\right)^{2/3}, \qquad v = \int \cos f_2(\tau)\, d\tau, \qquad w = \int \sin f_2(\tau)\, d\tau \tag{1.18}$$

Течение в физическом пространстве xyz, соответствующее решению (1.18), определяется соотношением

$$({}^3/{}_2\,\tau)^{-1/3} x + \cos f_2(\tau)\, y + \sin f_2(\tau)\, z + F_2(\tau) = 0 \tag{1.19}$$

где $f_2(\tau)$ и $F_2(\tau)$ — произвольные функции τ. Полученное решение может использоваться при расчете некоторых типов крыльев.

§ 2. **Автомодельные плоские и осесимметрические течения.** 1°. Рассмотрим плоские и осесимметрические течения. В этом случае из уравнений (1.1) следует

$$-uu_x + \omega_r + \delta\omega/r = 0, \qquad u_r = \omega_x \tag{2.1}$$

Здесь ω — проекция добавочной скорости (см. § 1) на направление радиуса r, $\delta = 0$ для случая плоских движений газа и $\delta = 1$ для случая движений с осевой симметрией.

Система уравнений (2.1) допускает непрерывную группу преобразований:

$$U(x, r) = \alpha_3^{2(1-\beta)} u(\alpha_3^\beta x, \alpha_3 r), \qquad \Omega(x, r) = \alpha_3^{3(1-\beta)} \omega(\alpha_3^\beta x, \alpha_3 r) \tag{2.2}$$

где α_3 и β — произвольные постоянные, которая не изменяет вида уравнений. Поэтому у системы (2.1) должны существовать автомодельные решения, имеющие вид [3,7]

$$u = x^{2(\beta+1)} f_3(\xi_2), \qquad \omega = x^{3(\beta+1)} f_4(\xi_2), \qquad \xi_2 = r x^\beta \tag{2.3}$$

Действительно, подставляя формулы (2.3) в уравнения (2.1), получим

$$f_3' = 3(\beta + 1) f_4 + \beta\xi_2 f_4', \qquad -2(\beta + 1) f_3^2 - \beta\xi_2 f_3 f_3' + f_4' + \delta f_4 / \xi_2 = 0 \tag{2.4}$$

Исключая из системы уравнений (2.4) функцию f_4, получим одно уравнение второго порядка относительно функции f_3:

$$(\beta^2\xi_2^2 f_3 - 1) f_3'' + (9\beta + 7)\beta\xi_2 f_3 f_3' + \beta^2\xi_2^2 f_3'^2 + 2(4\beta^2 + 7\beta + 3) f_3^2 - \delta f_3' / \xi_2 = 0 \tag{2.5}$$

Легко видеть, что уравнение (2.5) допускает в свою очередь группу преобразований $\Phi_3(\xi_2) = \alpha_4^2 f_3(\alpha_4\xi_2)$ (где α_4 — любая постоянная), не изменяющую вида уравнения. Полагая поэтому $f_3 = \xi_2^{-2} F_3(\eta_2)$, $\eta_2 = \ln|\xi_2|$, приведем уравнение (2.5) к виду, не содержащему независимой переменной. Обозначив далее $dF_3/d\eta_2 = \Psi_3$ и считая F_3 независимой переменной, получаем уравнение первого порядка

$$\frac{d\Psi_3}{dF_3} = \frac{(\delta - 5)\Psi_3 + 2(3 - \delta) F_3 - \beta^2\Psi_3^2 - 7\beta\Psi_3 F_3 - 6F_3^2}{\Psi_3(\beta^2 F_3 - 1)} \tag{2.6}$$

Функция f_4 выражается через функцию F_3 следующим образом:

$$f_4 = \frac{\xi_2^{-3}}{3\beta + 3 - \delta\beta} (F_3' - 2F_3 - 2\beta F_3^2 - \beta^2 F_3 F_3') = \xi_2^{-3} R(\eta_2) \tag{2.7}$$

Для проекций скоростей имеем

$$u = \left(\frac{x}{r}\right)^2 F_3(\eta_2), \qquad \omega = \left(\frac{x}{r}\right)^3 R(\eta_2) \tag{2.8}$$

2°. Рассмотрим случай $\beta = 0$. При этом $u = x^2 f_3(r)$, $\omega = x^3 f_4(r)$, т. е. переменные x и r разделяются, и мы получаем течения, которые изучались в работе [4]. Положим

$$f_3 = \zeta_2^{-2(\beta+1)} f_5(\zeta_2), \qquad f_4 = \zeta_2^{-3(\beta+1)} f_6(\zeta_2), \qquad \zeta_2 = \xi_2^{1/\beta}, \quad 1/\beta = \gamma \tag{2.9}$$

Используя (2.4), получим для функций $f_5(\zeta_2)$ и $f_6(\zeta_2)$ систему уравнений

$$-2(\gamma + 1) f_5 + \gamma\zeta_2 f_5' = f_6', \qquad -f_5 f_5' + (\delta - 3 - 3\gamma) f_6 + \gamma\zeta_2 f_6' = 0 \tag{2.10}$$

Рассмотрим особо случай $\gamma = 0$. Тогда $u = r^{-2} f_5(x)$, $\omega = r^{-3} f_6(x)$, т. е. переменные x и r разделяются, и мы имеем еще один случай течений, исследованных в работе [4].

3°. Пусть теперь $\beta = -{}^1/_2$. Легко установить, что в этом случае уравнение (2.6) допускает решение вида

$$\Psi_3 = 2(1 + \delta)\left(1 + \frac{2}{1 + \delta} F_3 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{1 + \delta} F_3}\right) \tag{2.11}$$

Используя равенство (2.11), легко получить выражение для функции f_3

$$f_3 = A + \frac{A^2}{2(1 + \delta)} \xi_2^2 \tag{2.12}$$

Проекции скоростей даются теперь формулами

$$u = Ax + \frac{A^2}{2(1 + \delta)} r^2, \qquad \omega = \frac{A^2}{1 + \delta} xr + \frac{A^3}{2(1 + \delta)(3 + \delta)} r^3 \tag{2.13}$$

Если поток газа плоский и $\delta = 0$, то равенства (2.13) представляют собой интеграл С. В. Фальковича [5], который описывает течение в безударном сопле вблизи линии перехода. Если $\delta = 1$, то равенства (2.13) дают течения с осевой симметрией в круглых соплах. Напишем уравнение линии перехода полученных течений:

$$x = -\frac{A}{2(1 + \delta)} r^2 \tag{2.14}$$

Из равенства (2.14) следует, что в круглых соплах линия перехода ближе к вертикальной прямой, нежели в плоских, если у обоих течений постоянная A (т. е. производная u_x в центре сопла) одинакова.

§ 3. **Плоские и осесимметрические течения, предельные к автомодельным.** 1°. Рассмотрим сначала плоские околозвуковые течения. В этом случае в уравнениях (2.1) $\delta = 0$ и указанные уравнения становятся инвариантными по отношению к преобразованию вида $r = r_0 + r'$. Поскольку преобразование подобия для этих уравнений содержит произвольную степень β (или γ), то, как показано в работе [6], путем предельного перехода, неограниченно увеличивая показатель γ, из автомодельных решений степенного типа, в каком они даны в § 2, п. 2, можно получить новый класс решений, предельных к автомодельным. Произведя необходимые вычисления, имеем

$$u = e^{-2mr} f_7(\xi_3), \qquad \omega = e^{-3mr} f_8(\xi_3), \qquad \xi_3 = xe^{mr} \tag{3.1}$$

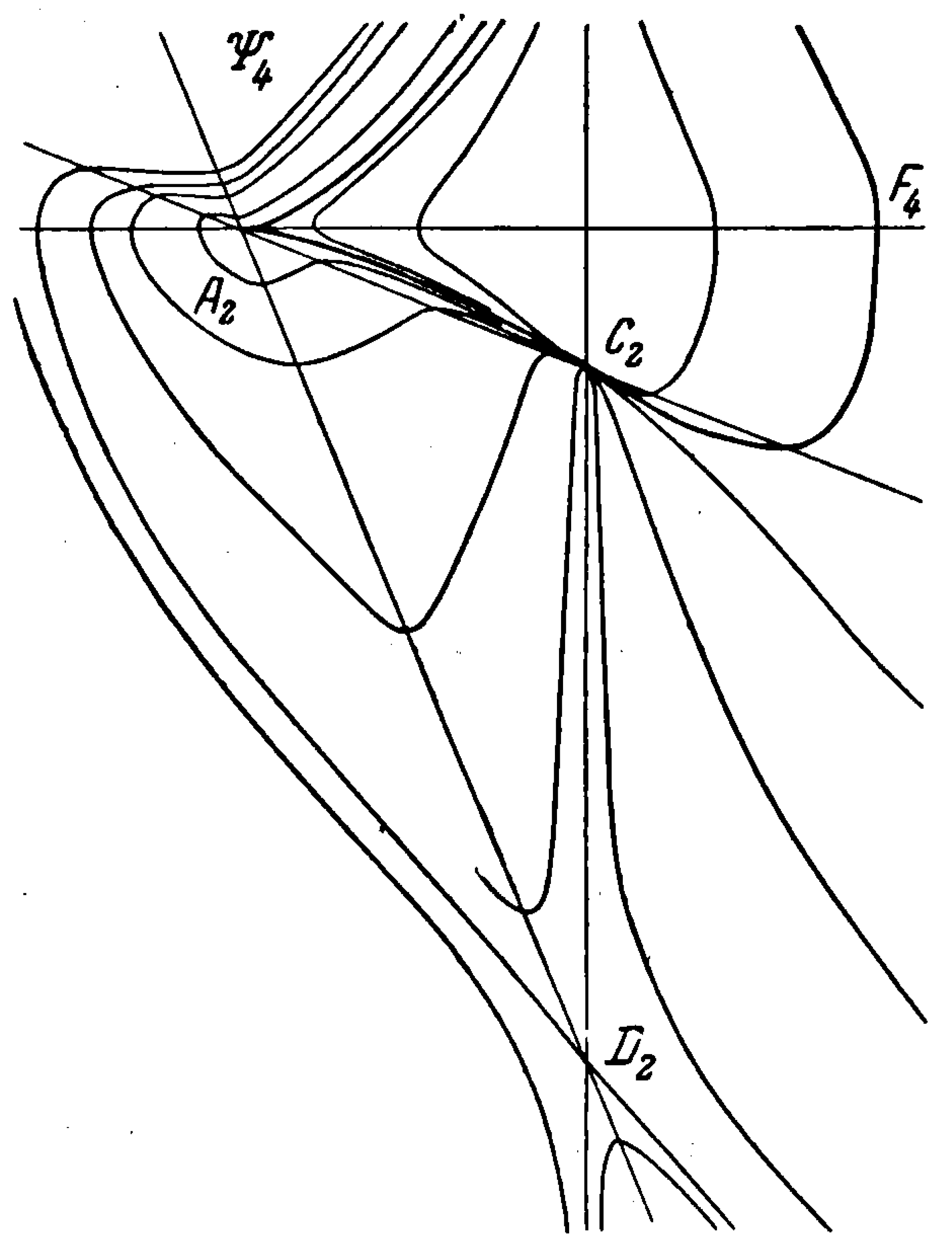
где функции f_7 и f_8 удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся предельными для уравнений § 2, п. 2:

$$-f_7 f_7' - 3mf_8 + m\xi_3 f_8' = 0, \qquad -2mf_7 + m\xi_3 f_7' = f_8' \tag{3.2}$$

Исключая из уравнений (3.2) функцию f_8, получим одно дифференциальное уравнение второго порядка для определения функции f_7:

$$(m^2\xi_3^2 - f_7) f_7'' - f_7'^2 - 3m'\xi_3 f_7' + 4m^2 f_7 = 0 \tag{3.3}$$

Используя инвариантность уравнения (3.3) по отношению к группе преобразований $\Phi_4(\xi_3) = \alpha_5^{-2} f_7(\alpha_5 \xi_3)$, его можно привести к уравнению первого порядка



$$\frac{d\Psi_4}{dF_4} = \frac{6F_4^2 + 7F_4\Psi_4 + \Psi_4^2}{\Psi_4(m^2 - F_4)} \qquad (3.4)$$

Мы положили при этом (3.5)

$$\eta_3 = \ln |\xi_3|, \qquad f_7 = \xi_3^2 F_4(\eta_3), \qquad \Psi_4 = \frac{dF_4}{d\eta_3}$$

Проекции скоростей выражаются через функцию F_4 следующим образом:

$$u = x^2 F_4$$

$$\omega = \frac{x^3}{3m}(m^2 F_4' - F_4 F_4' - 2F_4^2) \qquad (3.6)$$

Если $m = 0$, то функции f_7 и f_8 равны постоянным величинам и мы имеем однородный поток. Пусть теперь $m \neq 0$. Общая картина поля интегральных кривых уравнения (3.4) в этом случае дана на фиг. 1. Существенной чертой течений настоящего пункта является их несимметричность относительно оси $r = 0$.

2°. Рассмотрим теперь плоские и осесимметрические течения одновременно. Пользуясь инвариантностью уравнений (2.1) по отношению к преобразованию $x = x_0 + x'$, можно получить из формул (2.3), заставляя неограниченно возрастать показатель β, еще один класс решений, имеющий вид [6]:

$$u = e^{2nx} f_9(\xi_4), \qquad \omega = e^{3nx} f_{10}(\xi_4), \qquad \xi_4 = re^{nx} \qquad (3.7)$$

Функции f_9 и f_{10} определяются из уравнений

$$-2nf_9^2 - n\xi_4 f_9 f_9' + f_{10}' + \delta f_{10} / \xi_4 = 0, \qquad f_9' = 3nf_{10} + n\xi_4 f_{10}' \qquad (3.8)$$

являющихся предельными для уравнений (2.3). Для функции f_9 верно уравнение

$$(n^2\xi_4^2 f_9 - 1) f_9'' + 9n^2\xi_4 f_9 f_9' + n^2\xi_4^2 f_9'^2 + 8n^2 f_9^2 - \delta f_9' / \xi_4 = 0 \qquad (3.9)$$

Вводя, как и прежде, новые переменные по формулам

$$\eta_4 = \ln \xi_4, \qquad f_9 = \xi_4^{-2} F_5(\eta_4), \qquad \Psi_5 = \frac{dF_5}{d\eta_4} \qquad (3.10)$$

имеем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Psi_5}{dF_5} = \frac{(\delta - 5)\Psi_5 + 2(3 - \delta)F_5 - n^2\Psi_5^2}{\Psi_5(n^2 F_5 - 1)}$$

Поступила 6 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. А. О классе адиабатических течений газа, которые в пространстве годографа скорости изображаются поверхностями. Труды ЦАГИ, 1949.
2. Busemann A. Die achsesymmetrische kegelige Überschallströmung. Luftfahrtforschung, Bd. XIX, 1942.
3. Morgan A. J. A. On a Class of Two-Dimensional channel Flows with a Straight Sonic Line. Journ. Aer. Sci., vol. 22, No. 8, 1955.
4. Жигулев В. Н. Об одном классе плоских и осесимметрических околозвуковых течений. ПММ, т. XX, вып. 5, 1956.
5. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
6. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
7. Guderley G., Joshihara H. An axial — symmetric transonic flow pattern. Quarterly of Appl. mathematics, vol. VIII, № 4, 1951