

## КОЛЕБАНИЯ РЕШЕТКИ ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ

М. Д. Хаскинд

(Одесса)

Метод решения, изложенный в статье [1], применяется для анализа возмущенного движения жидкости и гидродинамических сил при колебаниях тонких решеток. Для определенности рассматривается решетка тонких профилей, представляющая собой косоугольный ряд пластин ширины  $d$  с периодом  $l \exp i\beta$  (фиг.) ( $i = \sqrt{V-1}$ ). Изучение возмущенного движения жидкости вокруг таких решеток находится в непосредственной связи с исследованием течений, создаваемых в турбомашинах. Приближенное решение задачи о малых колебаниях решетки, основанное на замене действия колеблющейся решетки периодической системой сосредоточенных вихрей, дано в статье [2].

Во всем дальнейшем полагаем, что нормальная скорость  $v_n$  и потенциал скоростей движения жидкости зависят от времени через экспоненциально-временной множитель  $\exp j\omega t$ , где мнимая единица  $j = \sqrt{V-1}$  не взаимодействует с мнимой единицей  $i$ , входящей в комплексную переменную  $z = x + iy$ . Комплексный потенциал  $w(z)$ , расчленим на две части:  $w_0(z)$  и  $w_1(z)$ , где  $w_0(z)$  определяет бесциркуляционное обтекание решетки, а  $w_1(z)$  является решением однородной задачи (см. [1]). В рассматриваемом случае  $w(z)$  является периодической функцией с периодом  $l \exp i\beta$  и функции  $w_0$  и  $w_1$  на пластинках удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} \frac{dw_0}{dz} = -v_n, \quad \operatorname{Im} w_1 = A \quad (1)$$

где  $A$  — постоянная, подлежащая определению.

Поступательный поток со скоростью  $v_0$  набегаёт на решетку со стороны  $x < 0$ , и поэтому функция  $f(z) = r + is$  связана с  $w_1$  соотношением [1]

$$f(z) = \frac{dw_1}{dz} + j\mu_0 w_1 \quad \left( \mu_0 = \frac{\sigma}{v_0} \right) \quad (2)$$

причем на основании (1) на пластинках имеем условие

$$\operatorname{Im} f = j\mu_0 A \quad (3)$$

Кроме условий (1) и (3), справедливы равенства

$$\lim \frac{dw_0}{dz} = 0, \quad \lim f = 0 \quad \text{при } z_1 \rightarrow \infty \quad \left( z_1 = z \exp \left[ -i \left( \frac{1}{2} \pi + \beta \right) \right] \right) \quad (4)$$

которые выражают, что перед решеткой поток жидкости не возмущен.

Известно, что функция

$$z = \frac{l}{\pi} \left( u \sin \beta - i \cos \beta \frac{\operatorname{ch} u + (\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}}{\operatorname{ch} a} \right) \quad (5)$$

осуществляет конформное отображение рассматриваемой решетчатой области в плоскости  $z$  на область в плоскости  $u$  с вертикальной решеткой пластин ширины  $2a$  и периода  $\pi i$ . Кромкам пластины в плоскости  $z$  соответствуют точки пластины в плоскости  $u$ , для которых

$$\frac{dz}{du} = \frac{l}{\pi} \left( \sin \beta - i \cos \beta \frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}} \right) = 0 \quad (6)$$

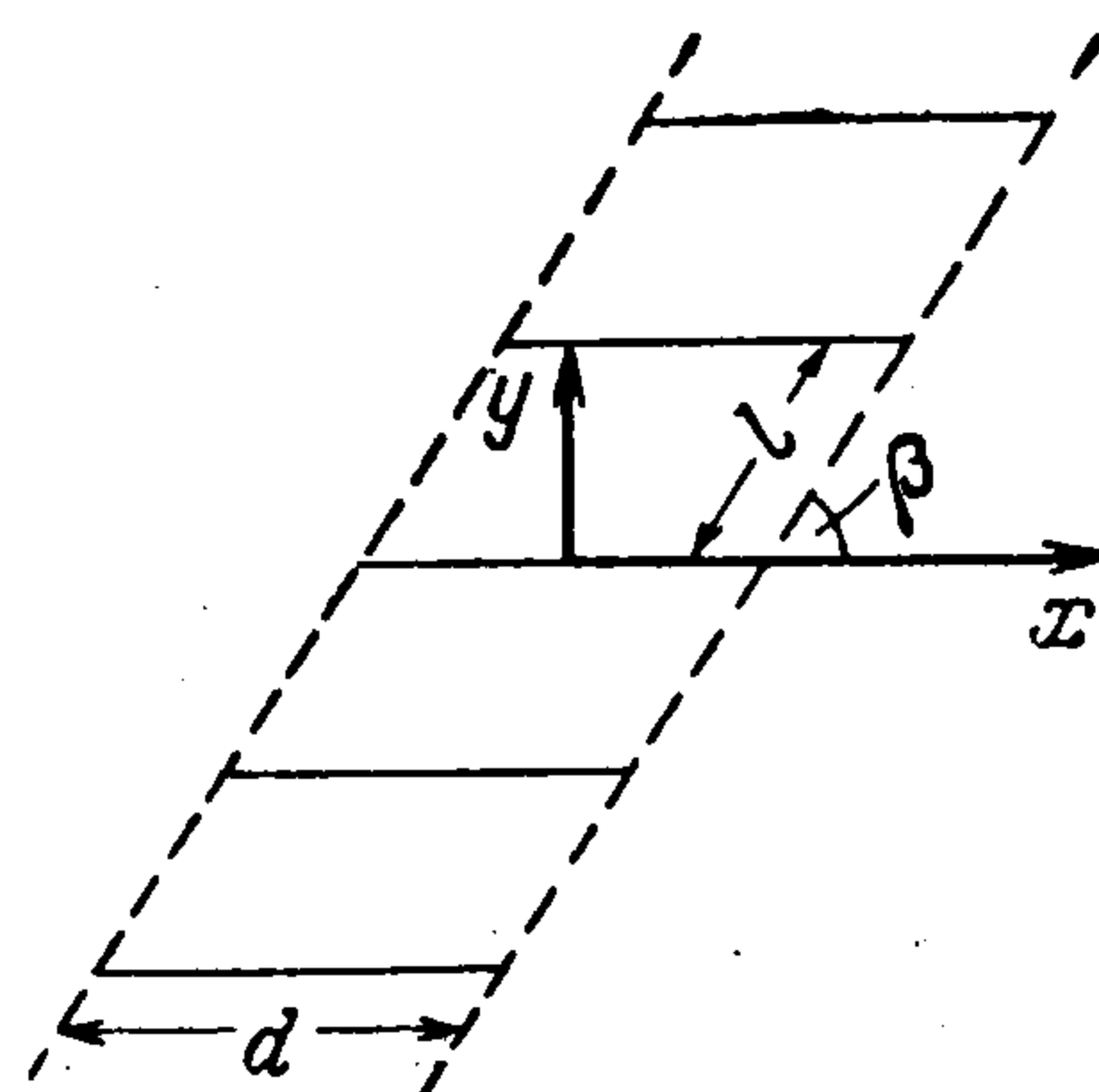
Из соотношений (5) и (6) имеем

$$u = \pm u_0, \quad u_0 = ar \operatorname{sh} (\operatorname{sh} a \sin \beta) \quad (7)$$

$$d = \frac{2l}{\pi} [\sin \beta ar \operatorname{sh} (\operatorname{sh} a \sin \beta) + \cos \beta ar \sin (\operatorname{th} a \cos \beta)]$$

В плоскости  $u$  условие (1) для функции  $w_0$  переходит в условие на отрезках  $(-a, a)$  следующего вида:

$$\operatorname{Im} \frac{dw_0}{du} = -v_n \frac{dz}{du} \quad (8)$$



Функцию  $dw_0/du$  представим в виде суммы  $F_1 + F_2$ ; тогда из (8) следует, что функции  $F_1$  и  $F_2$  на отрезках  $(-a, a)$  удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} F_1 = \pm v_n \frac{l}{\pi} \frac{\cos \beta \operatorname{sh} u}{(\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 u)^{1/2}}, \quad \operatorname{Im} F_2 = -v_n \frac{l}{\pi} \sin \beta \quad (9)$$

причем знак плюс отвечает подходу сверху к отрезку  $(-a, a)$ , а знак минус — подходу снизу к этому же отрезку.

Очевидно, что  $F_1(u)$  представляет собой функцию скоростей движения жидкости, создаваемого распределением источников на отрезках  $(-a, a)$ , а  $F_2(u)$  — функцию скоростей движения жидкости, которое создается в результате действия распределения вихрей на этих же отрезках. Отсюда следует, что для бесциркуляционного движения, помимо условия (4), необходимо потребовать выполнения предельного равенства  $\operatorname{Im} F_2(u) = 0$  при  $u \rightarrow \infty$ . Применяя приемы теории решеток [3], получаем следующее выражение для функции  $w_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dw_0}{du} = & \frac{l}{\pi^2} \cos \beta \int_{-a}^a \frac{v_n \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 \xi)^{1/2}} [\operatorname{cth}(\xi - u) - 1] d\xi + \\ & + \frac{l \sin \beta}{\pi^2 i (\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{v_n (\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 \xi)^{1/2}}{\operatorname{sh}(\xi - u)} d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, для чисто поступательных колебаний из формулы (10) получаем

$$\frac{dw_0}{du} = \frac{l}{\pi} v_n e^{-i\beta} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}} \right) \quad (11)$$

Аналогичным путем определяется функция  $f$  по условиям (3) и (4). Имеем

$$f = \left\{ -\frac{l}{\pi} j\mu_0 A e^{-i\beta} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}} \right] - \frac{\Gamma e^u}{2\pi i (\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}} \right\} \frac{du}{dz} \quad (12)$$

где  $\Gamma$  — действительная относительно  $i$  постоянная, которая, как будет видно из дальнейшего, представляет собой комплексную амплитуду циркуляции вокруг профиля.

Для определения постоянных  $\Gamma$  и  $A$  имеем условие конечности скорости в задних кромках решетки и условие (1) для функции  $w_1$ . Удовлетворяя условию конечности скорости в задней кромке, т. е. при  $z = d/2$  ( $u = u_0$ ), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Gamma = \Gamma_0 \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v_n \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 \xi)^{1/2}} [\operatorname{cth}(\xi - u_0) - 1] d\xi - \right. \\ \left. - \frac{\sin \beta}{\pi \operatorname{sh} a} \int_{-a}^a \frac{v_n (\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 \xi)^{1/2}}{\operatorname{sh}(\xi - u_0)} d\xi - j\mu_0 A \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Gamma_0 = 2l \operatorname{sh} a (\operatorname{sh} a \sin n\beta - (1 + \operatorname{sh}^2 a \sin^2 \beta)^{1/2}) \quad (14)$$

При чисто поступательных колебаниях (13) принимает более простой вид:

$$\Gamma = \Gamma_0 (v_n - j\mu_0 A) = 2l \operatorname{sh} a (\operatorname{sh} a \sin \beta - (1 + \operatorname{sh}^2 a \sin^2 \beta)^{1/2}) (v_n - j\mu_0 A) \quad (15)$$

Удовлетворим теперь условию (1) для функции  $w_1$ . Так как далеко перед решеткой в направлении, перпендикулярном к ее оси, поток не возмущен, то из (2) имеем

$$w_1 = e^{-j\mu_0 z} \int_{(L)}^z e^{j\mu_0 z} f(z) dz \quad (16)$$

где интегрирование в (16) производится по некоторой линии, соединяющей точку  $z$  и бесконечно удаленную точку перед решеткой с направлением, перпендикулярным к ее оси.

Принимая во внимание условие (1), из (16) находим

$$A = e^{j\nu} D_y \quad \left( \nu = \frac{\mu_0 d}{2} \right), \quad D_x + iD_y = \int_{(L)}^{-d/2} e^{j\mu_0 z} f(z) dz \quad (17)$$

Для дальнейшего вычисления рассмотрим контур, состоящий из двух полубесконечных прямых, перпендикулярных к оси решетки и соединенных своими концами отрезком  $(-d/2, -d/2 + l \exp i\beta)$ . Очевидно, что интеграл от функции  $f(z) \exp j\mu_0 z$  по этому контуру равен нулю. Поэтому, используя периодичность функции  $f(z)$ , а также соотношение (12), будем иметь

$$D_x + iD_y = -\frac{1}{1 + e^{j\mu_0 \tau}} \int_{-u_0}^{-u_0 + \pi i} e^{j\mu_0 z(u)} F(u) du \quad (\tau = l e^{i\beta}) \quad (18)$$

$$F(u) = -\frac{l}{\pi} j\mu_0 A e^{-i\beta} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}} \right) - \frac{\Gamma e^u}{2\pi i (\operatorname{sh}^2 u - \operatorname{sh}^2 a)^{1/2}} \quad (19)$$

Произведя замену переменных  $u = -u_0 + i\xi$  и воспользовавшись тождеством

$$D_y = \frac{1}{2j} [(D_x + iD_y) - (D_x - iD_y)] \quad (19)$$

получаем следующее соотношение:

$$A = \Gamma K_0 - j\mu A K_1 \quad \left( \mu = \mu_0 \frac{l}{\pi} \right) \quad (20)$$

Здесь  $K_0$  и  $K_1$  представляют собой функции параметров  $\nu$ ,  $d/l$  и  $\beta$  и определяются интегральными выражениями (черта над буквой означает переход к комплексно сопряженным величинам относительно  $j$ )

$$K_0 = -\frac{1}{4\pi} e^{j\nu} \left[ \frac{1}{1 - e^{j\mu\delta}} \int_0^\pi \exp(-u_0 + j\xi - j\theta + j\mu\zeta(\xi)) \frac{d\xi}{p(\xi)} + \frac{1}{1 - e^{j\mu\bar{\delta}}} \int_0^\pi \exp(-u_0 - j\xi + j\theta + j\mu\bar{\zeta}(\xi)) \frac{d\xi}{p(\xi)} \right] \quad (21)$$

$$K_1 = -\frac{1}{2} e^{j\nu} \left[ \frac{e^{-j\beta}}{1 - e^{j\mu\delta}} \int_0^\pi \left( 1 - j \frac{\operatorname{sh}(u_0 - j\xi) - j\theta}{p(\xi)} e^{-j\theta} \right) e^{j\mu\zeta(\xi)} d\xi + \frac{e^{j\beta}}{1 - e^{j\mu\bar{\delta}}} \int_0^\pi \left( 1 + j \frac{\operatorname{sh}(u_0 + j\xi) e^{j\theta}}{p(\xi)} \right) e^{j\mu\bar{\zeta}(\xi)} d\xi \right] \quad (22)$$

$$\delta = \pi e^{j\beta}, \quad \zeta(\xi) = (j\xi - u_0) \sin \beta - j \cos \beta \ln \frac{\operatorname{ch}(u_0 - j\xi) + jp(\xi) e^{j\theta}}{\operatorname{ch} a} \quad (23)$$

$$p^4(\xi) = \operatorname{sh}^4 a \cos^4 \beta + \sin^4 \xi + 2 \operatorname{sh}^2 a \sin^2 \xi (\cos^2 \beta + 2 \sin^2 \beta \operatorname{ch}^2 a)$$

$$\sin 2\theta = \frac{\operatorname{sh} a \sin \beta \sin 2\xi}{p^2(\xi)} (1 + \operatorname{sh}^2 a \sin^2 \beta)^{1/2}$$

В представленном виде функции  $K_0$  и  $K_1$  могут быть сравнительно просто рассчитаны при помощи обычных способов численного интегрирования.

Из соотношений (14) и (20) находим окончательные выражения:

$$\Gamma = \Gamma_s C\left(\nu, \frac{d}{l}, \beta\right), \quad j\mu_0 A = \frac{\Gamma_s}{\Gamma_0} \left[ 1 - C\left(\nu, \frac{d}{l}, \beta\right) \right] \quad (24)$$

Здесь  $\Gamma_s$  представляет собой значение циркуляции при  $\nu = 0$ , т. е. значение циркуляции, определяемое по гипотезе стационарности

$$\Gamma_s = \Gamma_0 \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v_n \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 \xi)^{1/2}} \left[ \operatorname{cth}(\xi - u_0) - 1 \right] d\xi - \frac{\sin \beta}{\pi \operatorname{sh} a} \int_{-a}^a \frac{v_n (\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 \xi)^{1/2}}{\operatorname{sh}(\xi - u_0)} d\xi \right\} \quad (25)$$

которое при  $v_n = \text{const}$ , как видно из (15), определяется более простым выражением. Функция  $C(v, d/l, \beta)$  учитывает нестационарные эффекты, имеющие место при колебаниях решетки, и имеет вид:

$$C\left(v, \frac{d}{l}, \beta\right) = \frac{1 + j\mu K_1}{1 + j\mu(K_1 + (\pi/l)\Gamma_0 K_0)} \quad (26)$$

Определим еще величину гидродинамической силы, действующей на профиль в решетке. Воспользуемся для этого формулой [1]

$$Y = -\rho v_0 e^{j\sigma t} \operatorname{Re} \int_{L_1} \left( \frac{dw_0}{dz} + j\mu_0 w_0 + f \right) dz \quad (27)$$

где  $L_1$  — контур, охватывающий профиль и обходимый против хода часовой стрелки. Выражение (27) можно расчленить на две части:

$$Y = Y_0 + Y_1, \quad Y_0 = -\rho v_0 e^{j\sigma t} \operatorname{Re} \int_{L_1} \left( \frac{dw_0}{dz} + j\mu_0 w_0 \right) dz, \quad Y_1 = -\rho v_0 e^{j\sigma t} \operatorname{Re} \int_{L_1} f dz \quad (28)$$

Пользуясь формулами (12) и (24), находим следующее выражение:

$$Y_1 = \rho v_0 \Gamma_s C\left(v, \frac{d}{l}, \beta\right) e^{j\sigma t} \quad (29)$$

Сила же  $Y_0$  обусловлена бесциркуляционным движением жидкости и связана с эффектом присоединенных масс. При чисто поступательных колебаниях имеем

$$Y_0 = -\mu_{yy} \frac{dV_n}{dt} \quad \left( \mu_{yy} = \frac{2\rho l^2}{\pi} \ln \operatorname{ch} a, \quad V_n = v_n e^{j\sigma t} \right) \quad (30)$$

Из проведенных вычислений [3] следует, что в значительном диапазоне значений густоты решетки  $d/l$  коэффициент присоединенной массы  $\mu_{yy}$  слабо зависит от угла выноса  $\beta$ .

Поступила 9 I 1956

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Колебания тонкого полиплана тандем в плоском несжимаемом потоке. ПММ (в печати).
2. S ö h n g e n H e i n z. Luftkräfte an einem Schwingenden Schaufelkranz kleiner Teilung. Zeitschrift angew. Math. und Phys., Bd. 4, No. 4, 1953.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.

### НЕКОТОРЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ОКОЛОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

О. С. Рыжов

(Москва)

Рассматриваются околосвуковые движения идеального газа, изображаемые в области годографа скорости кривой или поверхностью. Во второй части заметки определяется класс автомодельных решений плоских и осесимметрических течений.

§ 1. Пространственные течения с вырожденным годографом. 1°. Уравнения пространственных околосвуковых движений газа в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} u u_x - v_y - w_z = 0, \quad u_y - v_x = 0, \quad u_z - w_x = 0, \quad v_z - w_y = 0 \\ u = (\kappa + 1) \frac{U}{a_*}, \quad v = (\kappa + 1) \frac{V}{a_*}, \quad w = (\kappa + 1) \frac{W}{a_*} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $U, V, W$  — добавки вдоль осей  $x, y, z$  к скорости, равной критической скорости  $a_*$  и направленной вдоль  $x$ .