

ОБ УДАРЕ ЖИДКОСТИ О НАКЛОННУЮ СТЕНКУ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ЧАСТИЧНО ЗАКРЫТОГО СОСУДА

Л. С. И в а н о в а

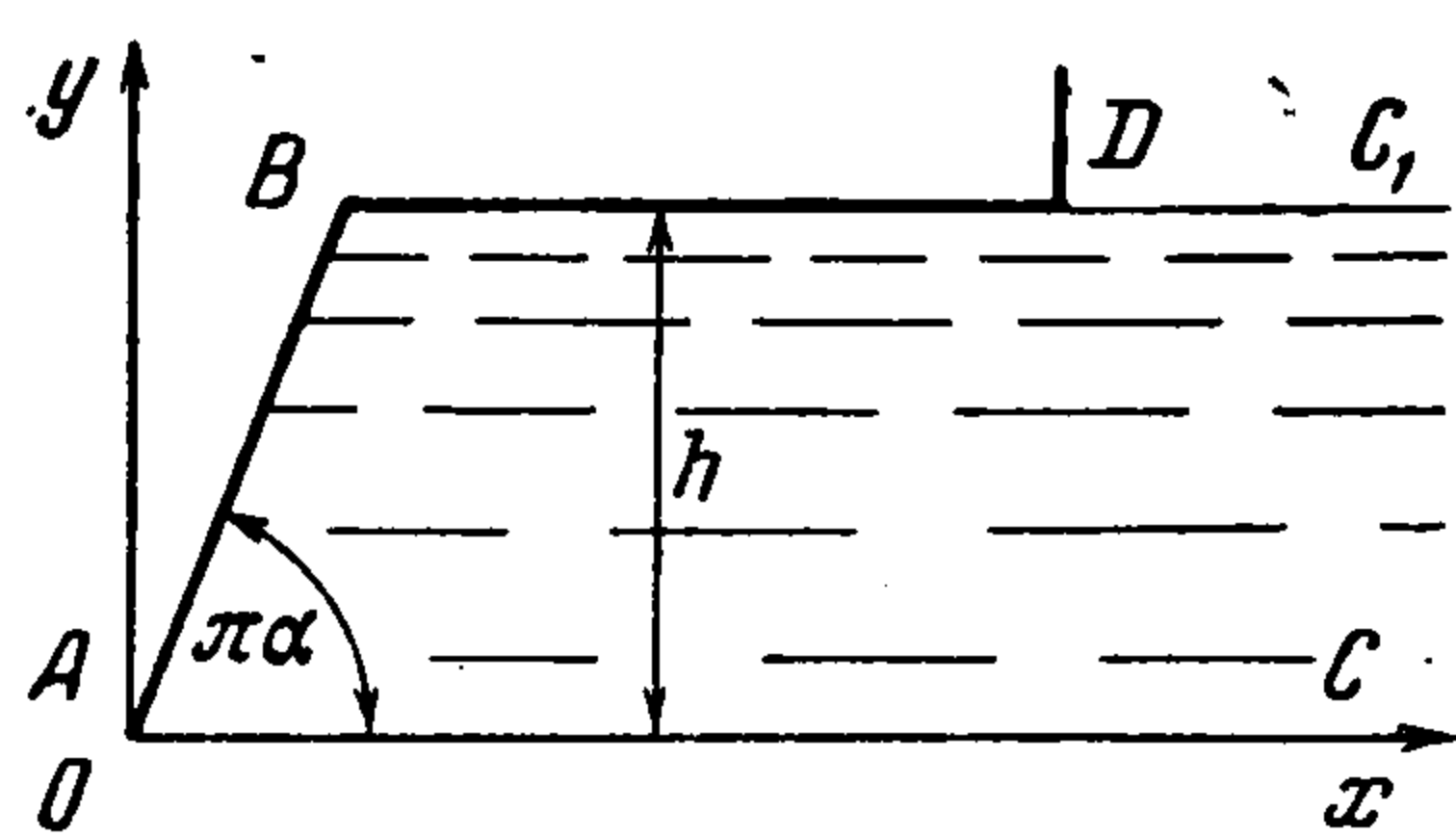
(Москва)

Введение. В 1931 г. Вестергардт [1] решил, при помощи разложения в ряды, задачу об ударе несжимаемой жидкости о вертикальную плотину.

В 1956 г. Ш. Г. Напетваридзе [1] попытался обобщить [метод Вестергардта на случай наклонной плотины, но допустил в своем решении ошибку. В настоящей работе задача об ударе несжимаемой жидкости о наклонную стенку, при наличии прикрытия, прилегающего к стенке, решена методом теории функций комплексного переменного. Полученное решение может быть применено для рассмотрения удара жидкости о наклонную плотину, удара жидкого груза о переборку судна.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается следующая плоская задача: бесконечно длинный сосуд, конечной глубины h наполнен несжимаемой невязкой жидкостью. Боковая стенка AB образует с горизонтальным плоским дном AC угол $\pi\alpha$. Сверху имеется прикрытие BD длиной λh (где $0 \leq \lambda \leq \infty$), прилегающее к боковой стенке. Свободная поверхность в вертикальном сечении обозначена DC_1 (фиг. 1).

Допустим, что, находясь первоначально в покое, сосуд мгновенно приобретает скорость v_0 в направлении его горизонтального ребра. Требуется определить импульсивные давления жидкости на наклонную стенку AB .



Фиг. 1

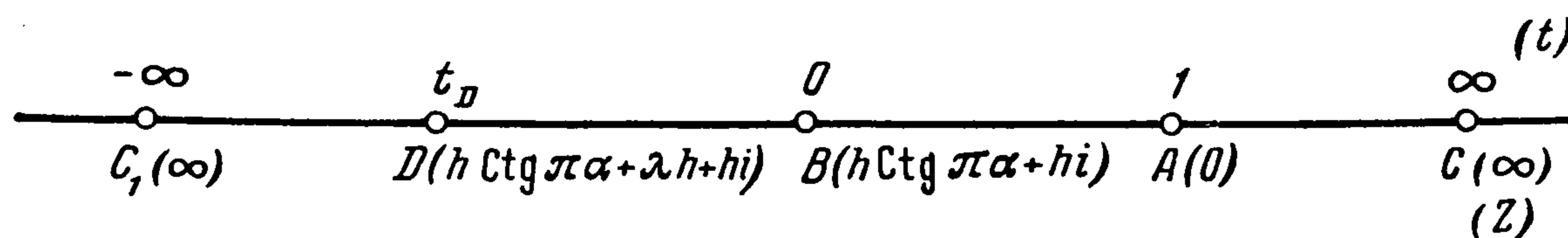
Плоскость течения принимается за плоскость комплексного переменного $z = x + yi$, причем ось x совпадает с дном сосуда, а начало координат есть точка пересечения наклонной стенки с дном (фиг. 1). Возникающее при внезапном движении течение жидкости будет обладать потенциалом скоростей φ , который связан с импульсивными давлениями p и плотностью жидкости ρ соотношением [2]:

$$p = -\rho\varphi \quad (1.1)$$

Таким образом, задача сводится к определению потенциала скоростей φ , действительной части комплексного потенциала течения $w = \varphi + \psi i$ при следующих граничных условиях: так как на свободной поверхности импульсивные давления равны нулю, а у стенок нормальные скорости жидкости $\partial\varphi/\partial n$ совпадают с нормальными скоростями стенок v_n , то:

$$\varphi = \operatorname{Re} w = 0 \quad \text{на } DC_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_n \quad \text{на } AB, AC, BD \quad (1.2)$$

§ 2. Решение задачи. Область течения z , являющаяся разомкнутым треугольником с углами $A = \pi\alpha$, $B = \pi(1 - \alpha)$ и $C = 0$, отображается на верхнюю полуплоскость



Фиг. 2

параметрического переменного t . Соотношение между отображаемыми и отображенными точками дается фиг. 2. При этом [3]

$$z = A \int_1^t \frac{dt}{(t-1)^{1-\alpha} t^\alpha}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{A}{(t-1)^{1-\alpha} t^\alpha} \quad (2.1)$$

Для отыскания $\varphi = \operatorname{Re} w$ определяется $dw/dt = (dw/dz)(dz/dt)$ по граничным условиям: на части действительной оси (t), соответствующей наклонной стенке AB ,

прикрытию BD и дну AC (фиг. 1), имеем соотношение [4]:

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{dt} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\frac{dz}{dt}} \quad (2.2)$$

откуда следует, что:

1) На части оси t , соответствующей дну AC и прикрытию BD , $v_n = 0$; следовательно в соответствие с (1.2) и (2.2)

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{dt} = 0 \quad \text{[при } 1 < t < \infty, t_D < t < 0 \quad (2.3)$$

2) На части оси t , соответствующей боковой стенке AB (фиг. 1), как следует из условий (1.2), (2.1) и (2.2)

$$\operatorname{Im} \frac{dw}{dt} = -v_0 \sin \pi \alpha \left| \frac{dz}{dt} \right| = \frac{-Av_0 \sin \pi \alpha}{(1-t)^{1-\alpha} t^\alpha} \quad \text{при } 0 < t < 1 \quad (2.4)$$

3) На части оси t , соответствующей свободной поверхности DC_1 , в соответствии с (1.2)

$$\operatorname{Re} \frac{dw}{dt} = 0 \quad \text{при } t < t_D \quad (2.5)$$

Для определения $\frac{dw}{dt}$ вводится функция [5]:

$$f(t) = \frac{dw}{dt} \sqrt{t-t_D} \quad (t_D < 0) \quad (2.6)$$

Граничные условия для $f(t)$ получаются путем преобразования граничных условий для dw/dt в виде:

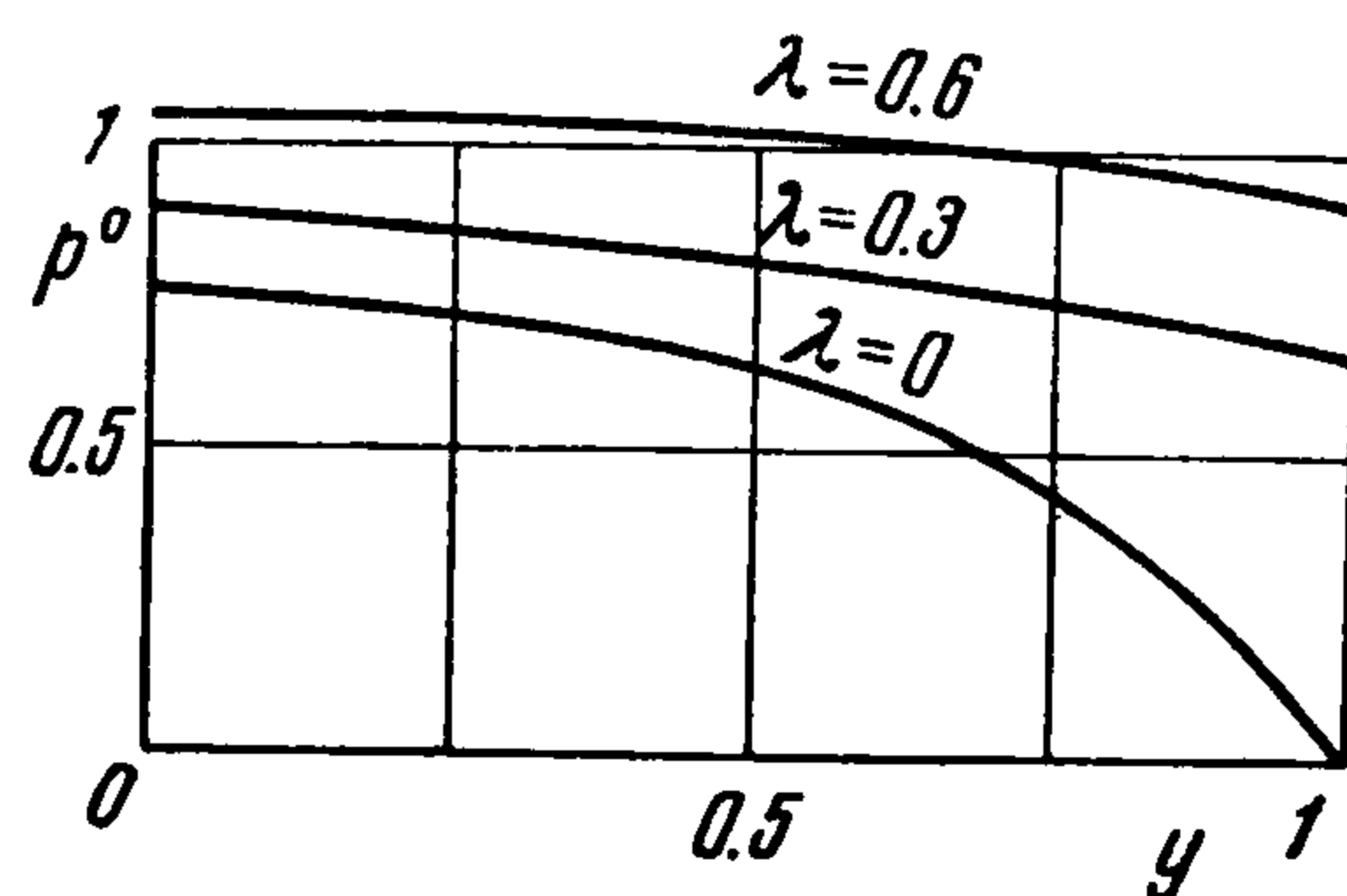
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f(t) &= \operatorname{Im} \frac{dw}{dt} \sqrt{t-t_D} = 0 \quad \text{при } 1 < t < \infty \\ \operatorname{Im} f(t) &= \operatorname{Im} \frac{dw}{dt} \sqrt{t-t_D} = - \frac{v_0 A \sin \pi \alpha}{(1-t)^{1-\alpha} t^\alpha} \sqrt{t-t_D} \quad \text{при } 0 < t < 1 \\ \operatorname{Im} f(t) &= \operatorname{Im} \frac{dw}{dt} \sqrt{t-t_D} = 0 \quad \text{при } t_D < t < 0 \\ \operatorname{Im} f(t) &= \operatorname{Re} \frac{dw}{dt} \sqrt{|t|-|t_D|} = 0 \quad \text{при } t < t_D \end{aligned} \quad (2.7)$$

Определяя $f(t)$, по заданной на всей действительной оси ее мнимой части получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\xi) d\xi}{(\xi-t)} \quad (2.8)$$

Отсюда, принимая во внимание (2.7), имеем

$$f(t) = - \frac{Av_0 \sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi-t_D} d\xi}{(1-\xi)^{1-\alpha} \xi^\alpha (\xi-t)} \quad (2.9)$$



Фиг. 3

Из (2.9) и (2.6) следует, что:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{f(t)}{\sqrt{t-t_D}} = \frac{-Av_0 \sin \pi \alpha}{\pi \sqrt{t-t_D}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi-t_D} d\xi}{(1-\xi)^{1-\alpha} \xi^\alpha (\xi-t)} \quad (2.10)$$

Интегрируя по t по любому контуру с обходом особой точки и определяя произвольную постоянную из условия $\varphi(t) = \operatorname{Re} w(t) = 0$ при $t = t_D$, получим

$$\varphi(t) = \frac{-2Av_0 \sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} \theta)^{1-2\alpha} \ln \left| \frac{\sqrt{t-t_D} + \sqrt{\sin^2 \theta - t_D}}{\sqrt{t-t_D} - \sqrt{\sin^2 \theta - t_D}} \right| d\theta \quad (2.11)$$

где $\xi = \sin^2 \theta$.

Подставляя $\varphi(t)$, определяемое соотношением (2.11) в (1.1), получаем для импульсивных давлений в точке боковой стенки

$$p(t) = \frac{2A\rho v_0 \sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} \theta)^{1-2\alpha} \ln \left| \frac{\sqrt{t-t_D} + \sqrt{\sin^2 \theta - t_D}}{\sqrt{t-t_D} - \sqrt{\sin^2 \theta - t_D}} \right| d\theta \quad (2.12)$$

Постоянная A определяется из (2.1) при условии, что

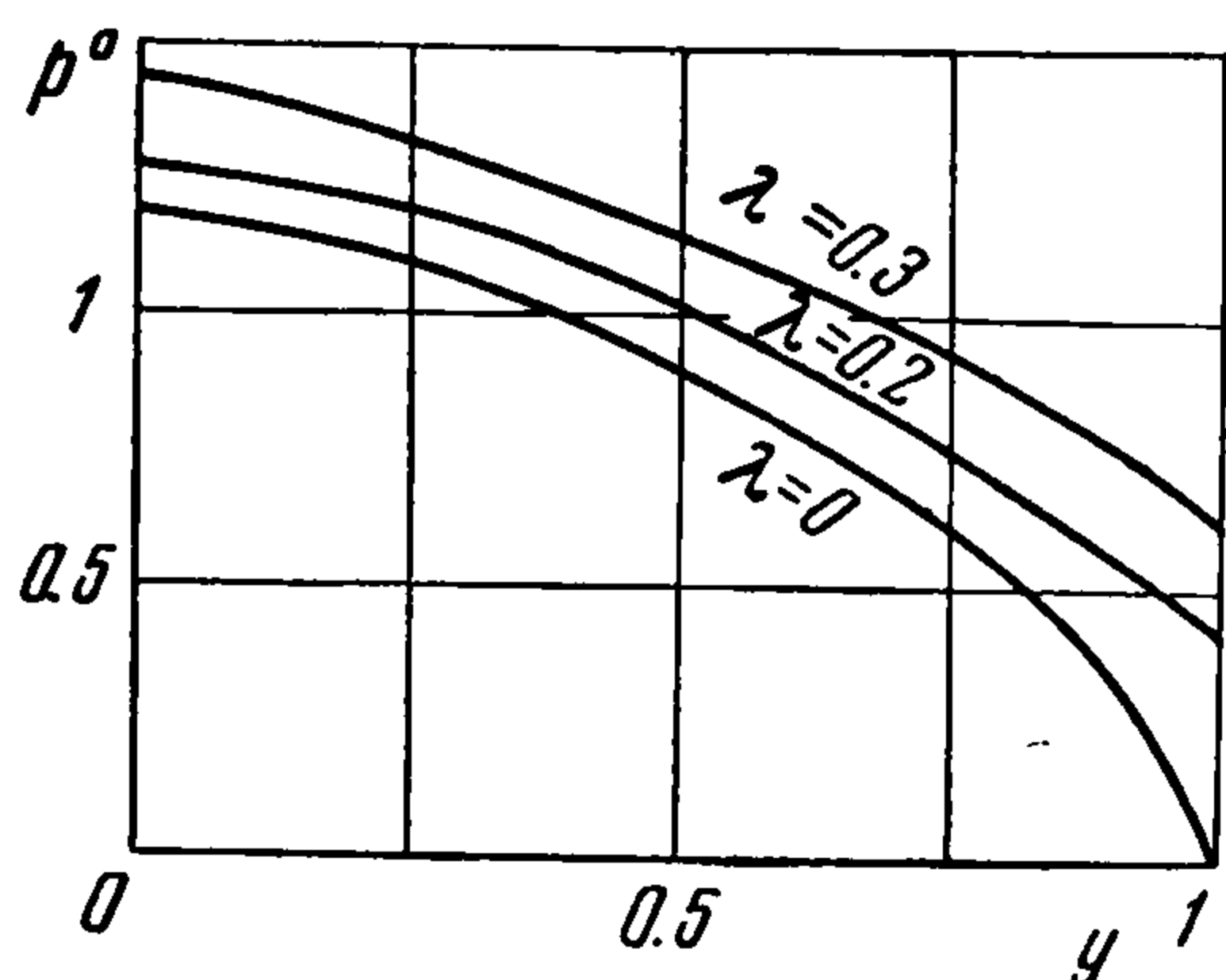
$$y = \operatorname{Im} z = h \quad \text{при } t = 0$$

Зависимость t_D от λ , где λh длина прикрытия (фиг. 1), определяется из (2.1).

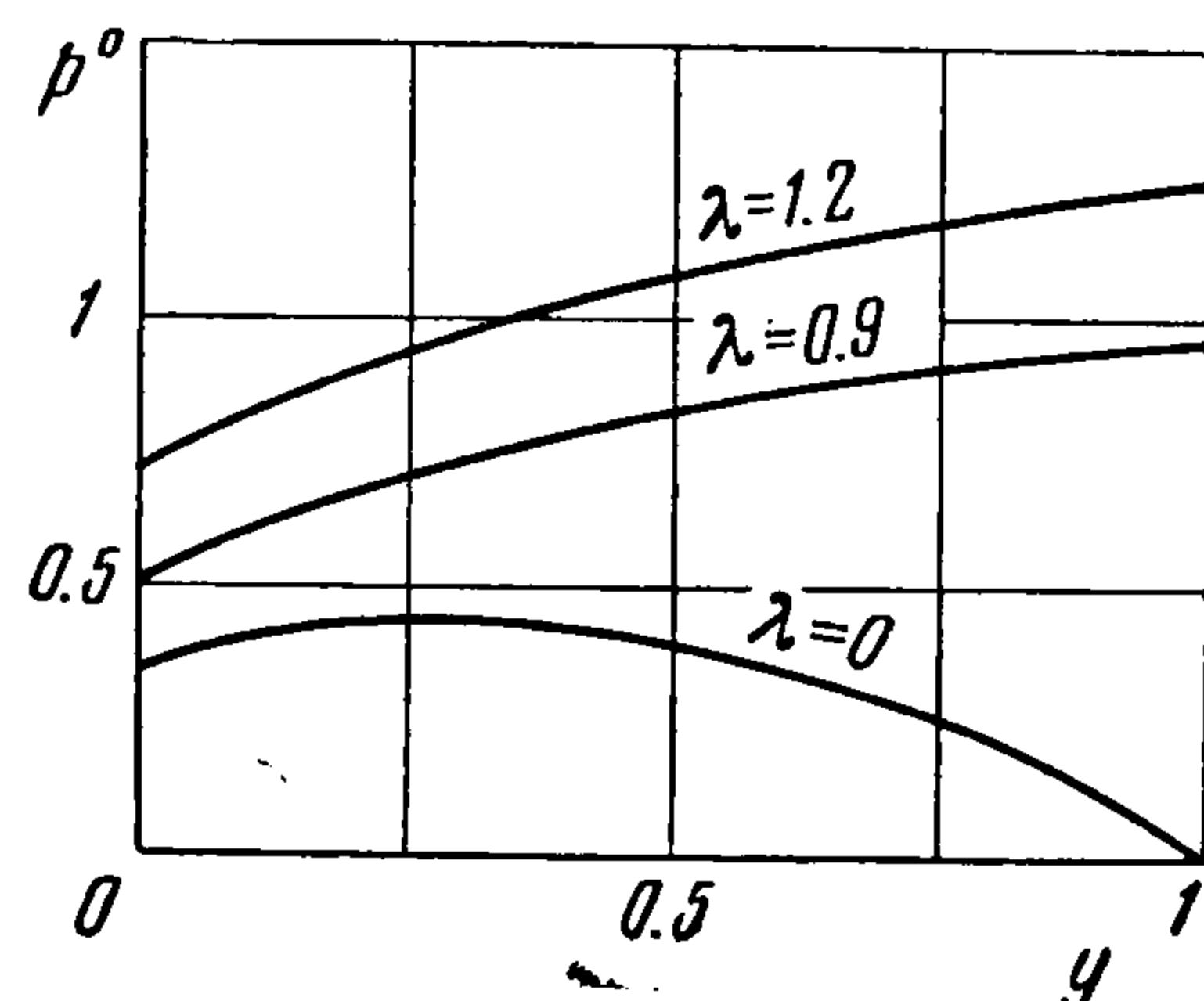
Из (2.12) и (2.1) легко найти параметрические уравнения кривой зависимости импульсивных давлений в точках боковой стенки от положения точки. По формуле (2.12) были произведены приближенные вычисления для следующих частных случаев:

α	$1/2$ (фиг. 3)			$1/4$ (фиг. 4)			$3/4$ (фиг. 5)			
	t_D	0	$-1/3$	-1	0	$-1/3$	-1	0	$-1/3$	-1
$\lambda \approx$		0	0.3	0.6	0	0.2	0.3	0	0.9	1.2
$P_{\max}/\rho v_0 h$		0.74		1.05	1.19		1.42			1.25
$P_{\min}/\rho v_0 h$		0		0.94	0		0.66			0.72

Графическая зависимость p от y , полученная в результате приближенных вычислений, приводится на фиг. 3, 4, 5, где $p^0 = p/\rho v_0$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким образом прикрытия значительно увеличивает импульс сил, действовавших на боковую стенку. Влияние угла наклона боковой стенки видно из сравнения фиг. 3, 4, 5.

Поступила 28 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Напетваридзе Ш. Г. Гидродинамическое давление при сейсмическом воздействии. Труды Института строит. дела АН Груз. ССР, т. V, 1955.
2. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1953.
4. Гуревич М. И. Удар пластинки при обтекании с отрывом струй. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.