ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. П. Проскуряков

(Москва)

1. В статье [1] изложен метод определения характеристических чисел решения дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Напомним кратко этот метод. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}+A\frac{dx}{d\varphi}+Bx=0 \tag{1.1}$$

коэффициенты которого A и B являются периодическими функциями φ с периодом 2π. Если коэффициент A имеет производную по φ, то уравнение (1.1) приводится к уравнению типа Хилла

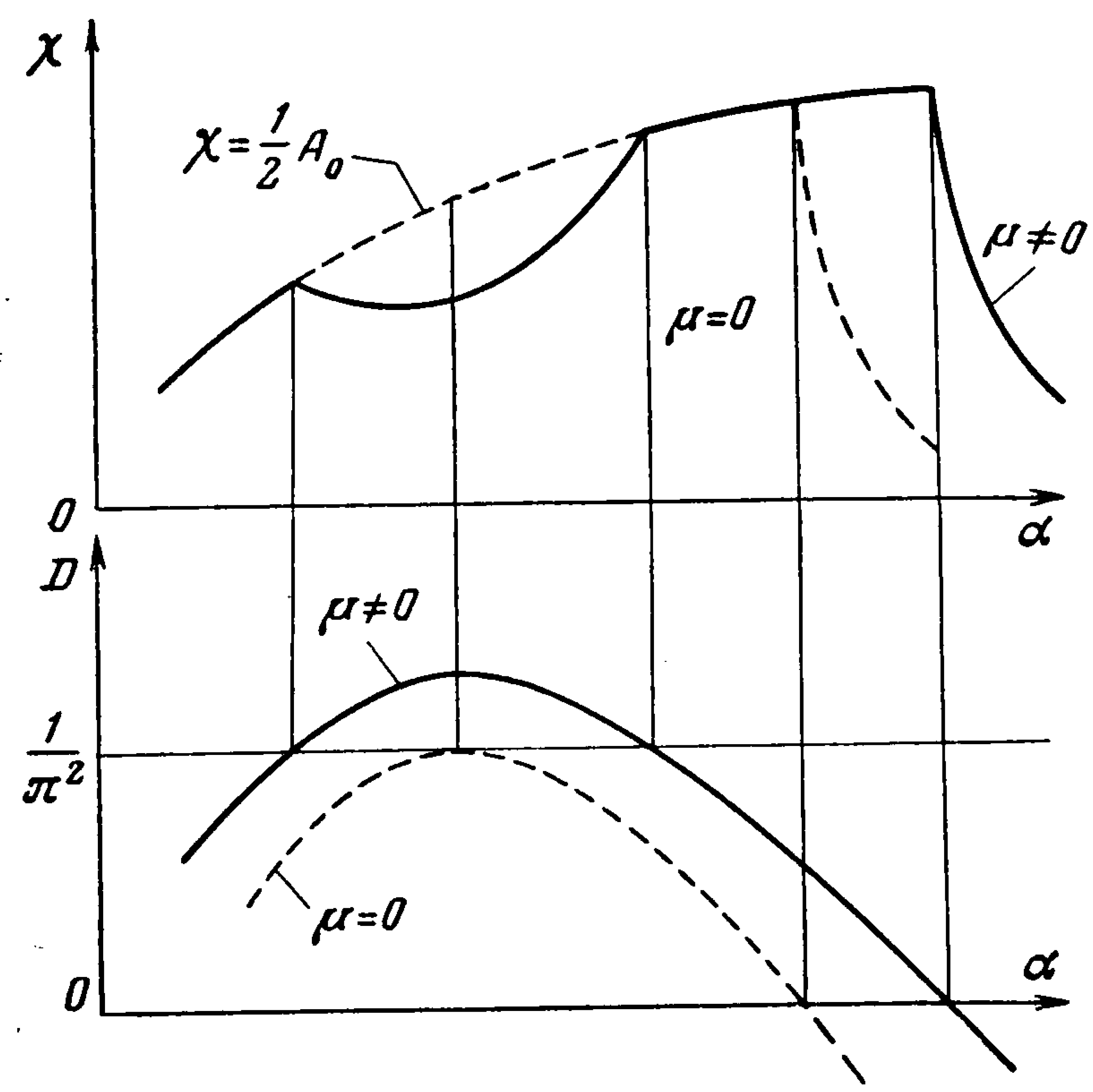
$$\frac{d^2z}{d\varphi^2}+Kz=0 \tag{1.2}$$

Коэффициент K также является периодической функцией φ с периодом 2π. Пусть K зависит еще от малого параметра μ, причем при $\mu=0$ функция $K(\varphi, \mu)$ обращается в постоянную. При некоторых ограничениях, наложенных на функцию $K(\varphi, \mu)$, эта функция может быть представлена в виде ряда [1, 2]

$$K(\varphi, \mu)=a+\sum_{n=1}^{\infty}\left[p_{0n}+\sum_{m=1}^{\infty}(p_{mn}\cos m\varphi+q_{mn}\sin m\varphi)\right]\mu^n \tag{1.3}$$

Решение уравнения (1.2) ищется в следующем виде:

$$z=e^{i\nu\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_k e^{ik\varphi}$$



Фиг. 1

Величина ν находится из уравнения

$$\sin^2\pi\nu=\pi^2D(\mu) \tag{1.4}$$

где $D(\mu)$ — бесконечный определитель, элементы которого зависят от коэффициентов a, p_{mn} и q_{mn} разложения (1.3). Этот определитель в свою очередь может быть представлен в виде ряда

$$D(\mu)=D_0+D_1\mu+D_2\mu^2+\ldots \tag{1.5}$$

Наименьшее характеристическое число решения уравнения (1.1) определяется по формуле

$$\chi=\frac{1}{2}A_0-|\operatorname{Im}\nu| \tag{1.6}$$

где A_0 является постоянным членом разложения $A(\varphi)$ в ряд Фурье.

Пусть коэффициенты A и B уравнения (1.1) зависят еще от некоторого произвольного по величине параметра α, отличного от μ (или от нескольких параметров). Тогда определитель D и характеристическое число χ также будут зависеть от этого параметра.

Из формулы (1.6) следует, что максимально возможная устойчивость системы при заданном значении параметра α получится, если $\operatorname{Im}\nu=0$. В этом случае характеристическое число $\chi={}^1/{}_2A_0$. Но величина $\operatorname{Im}\nu$ равна нулю при

$$0\leqslant D\leqslant\frac{1}{\pi^2} \tag{1.7}$$

и отлична от нуля, если величина D лежит вне этого отрезка.

При $A_0 = 0$ области, где не выполняется условие (1.7), являются областями неустойчивости. При $A_0 = 0$ в точках, где $D_0 = 0$ и $D_0 = \pi^{-2}$, также может возникнуть неустойчивость из-за резонанса с внешними силами. При $A_0 > 0$ области, где не выполняется условие (1.7), характеризуются падением устойчивости по сравнению с максимально возможной.

Чтобы получить полную картину изменения характеристических чисел в зависимости от изменения параметров, ограничиваясь при этом минимальным количеством расчетных точек, необходимо предварительно наметить границы областей, где выполняется условие (1.7). Для этого рассмотрим первый член разложения (1.5) как функцию параметра α

$$D_0 = \frac{\sin^2 \pi \sqrt{a}}{\pi^2} \tag{1.8}$$

Так как величина a, зависящая от α, может принимать любые вещественные значения, то коэффициент D_0 может изменяться от $-\infty$ до $1/\pi^2$. Определим все точки кривой D_0 как функции α (фиг. 1), которые лежат на границе полосы (1.7). Эти точки находятся из уравнения

$$a = \frac{1}{4} n^2 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.9}$$

При $n = 0$ и при n четном имеем $D_0 = 0$, а при n нечетном $D_0 = \pi^{-2}$.

Заметим, что все точки пересечения кривой D_0 с нижней границей полосы (1.7) соответствуют $n = 0$.

При возрастании параметра μ от нуля кривая $D(\mu)$, совпадавшая с кривой D_0 при $\mu = 0$, будет непрерывно деформироваться и в окрестностях тех точек, которые лежат на границах полосы (1.7), но не являются точками пересечения кривой D_0 с нижней границей полосы, может выйти за пределы полосы (1.7). На графике χ по α в окрестностях соответствующих точек появятся новые ветви, лежащие ниже кривой $\chi = {}^1/_2 A_0$. Те точки на кривой $\chi = {}^1/_2 A_0$, в которых зарождаются эти ветви при возрастании параметра μ или, что одно и то же, стягиваются эти ветви при убывании μ, будем называть критическими точками первого рода. Таким образом, каждой критической точке первого рода на графике χ по α соответствует однопараметрическое семейство криволинейных ветвей с параметром, равным μ. Заметим, что критические точки первого рода могут появиться не только при $\mu = 0$, но и при любом другом значении этого параметра.

Те точки на кривой χ по α, которые при $\mu = 0$ являются началом или концом криволинейных ветвей, не совпадающих с кривой $\chi = {}^1/_2 A_0$, будем называть критическими точками второго рода. Этим точкам соответствуют точки пересечения кривой D_0 с нижней границей полосы (1.7). При изменении параметра μ указанные выше криволинейные ветви χ будут непрерывно деформироваться, образуя однопараметрические семейства кривых. Каждому такому семейству соответствует одна или две критические точки второго рода, являющиеся концевыми для кривой данного семейства при $\mu = 0$.

Пусть $\nu = \nu_1 + i\nu_2$. Легко показать, что $\nu_1 = m$, если $D \leqslant 0$, и $\nu_1 = m + {}^1/_2$, если $D \geqslant \pi^{-2}$, где m — целое число или нуль. Внутри полосы (1.7) величина ν_1 меняется непрерывно между значениями ее в граничных точках полосы.

Решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$x(\varphi) = f_0(\varphi)\, f_1(\varphi)\, f_2(\varphi)$$

где $f_0(\varphi)$ — показательная функция, $f_1(\varphi)$ — периодическая функция с периодом 2π, а $f_2(\varphi)$ — периодическая функция с периодом, равным $2\pi / \nu_1$. Если $\nu_1 = k/n$, где k и n — целые положительные числа, то произведение $f_1(\varphi)\, f_2(\varphi)$ является периодической функцией с периодом $2\pi n$. В этом случае имеет место затухающее (возрастающее) колебательное движение. По аналогии с тем случаем, когда уравнение имеет постоянные коэффициенты, будем называть период этого произведения периодом колебательного движения.

Таким образом, при $D \geqslant \pi^{-2}$ период колебаний равен 4π, а при $D \leqslant 0$ период равен 2π или же имеет место апериодическое движение.

2. В качестве примера возьмем уравнение махового движения лопасти несущего винта, которое рассмотрено в статьях [1,2]. Это уравнение имеет вид:

$$d^2\beta / d\psi^2 + \gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\mu\sin\psi\right)d\beta / d\psi + \Big[1+\gamma\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mu\sin\psi\right)\mu\cos\psi +$$
$$+\gamma h\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\mu\sin\psi+\frac{1}{2}\mu^2\sin^2\psi\right)\Big]\beta = F(\psi) \qquad (2.1)$$

где β — угол взмаха, ψ — азимутальный угол лопасти, а μ, γ и h — параметры¹ (μ — малый параметр). Правая часть этого уравнения является периодической функцией ψ с периодом 2π.

Возьмем уравнение (2.1) без правой части и преобразуем его к виду (1.2) Коэффициент K будет равен

$$K(\psi, \mu) = a + (p_{11}\cos\psi + q_{11}\sin\psi)\mu + (p_{02} + p_{22}\cos 2\psi + q_{22}\sin 2\psi)\mu^2$$

Здесь величины a, p_{mn}, q_{mn} определяются формулами

$$a = 1 - \frac{1}{64}\gamma^2 + \frac{1}{4}\gamma h, \qquad p_{11} = \frac{1}{6}\gamma, \qquad q_{11} = \frac{2}{3}\gamma h - \frac{1}{24}\gamma^2$$
$$p_{02} = \frac{1}{4}\gamma h - \frac{1}{72}\gamma^2, \qquad p_{22} = -p_{02}, \qquad q_{22} = \frac{1}{4}\gamma$$

Определитель $D(\mu)$ является в данном случае четной функцией от μ. Коэффициенты разложения этого определителя D_2 и D_4 определяются формулами

$$D_2 = \frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}\left[p_{02} + \frac{p_{11}^2 + q_{11}^2}{2(1-4a)}\right]$$

$$D_4 = \frac{\sin 2\pi\sqrt{a}}{2\pi\sqrt{a}}\left[\frac{p_{22}^2+q_{22}^2}{8(1-a)} + \frac{3}{8}\frac{p_{22}(p_{11}^2 - q_{11}^2) + 2p_{11}q_{11}q_{22}}{(1-a)(1-4a)} + \right.$$
$$+\frac{1}{2}p_{02}^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg} 2\pi\sqrt{a} - \frac{1}{2a}\right) + \frac{p_{02}(p_{11}^2+q_{11}^2)}{2(1-4a)}\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg} 2\pi\sqrt{a} - \frac{1}{2a} + \frac{4}{1-4a}\right) +$$
$$\left. + \frac{(p_{11}^2+q_{11}^2)^2}{8(1-4a)^2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{a}}\operatorname{ctg} 2\pi\sqrt{a} - \frac{1}{2a} + \frac{4}{1-4a} + \frac{9}{4(1-a)}\right)\right]$$

Наименьшее характеристическое число системы в данном случае равно

$$\chi = \frac{1}{8}\gamma - |\operatorname{Im}\nu| \qquad (2.2)$$

Все критические точки лежат на прямой $\chi = {}^1/_8\gamma$, которая соответствует максимально возможной устойчивости лопасти при заданном значении параметра γ. Для получения критических точек рассмотрим уравнение (1.9). Это уравнение связывает два параметра γ и h. Решая его относительно γ, получим

$$\gamma = 8\left(h \pm \sqrt{h^2 + 1 - \frac{1}{4}n^2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Параметры γ и h будем рассматривать в следующих пределах:

$$0 < \gamma \leqslant 10, \qquad -0{,}5 \leqslant h \leqslant 1.0$$

При этих пределах изменения параметров могут существовать три критические точки для заданного значения h:

$$\gamma_0 = 8(h + \sqrt{h^2+1}), \qquad \gamma_1 = 8\left(h + \sqrt{h^2 + \frac{3}{4}}\right), \qquad \gamma_2 = 16h \qquad (2.3)$$

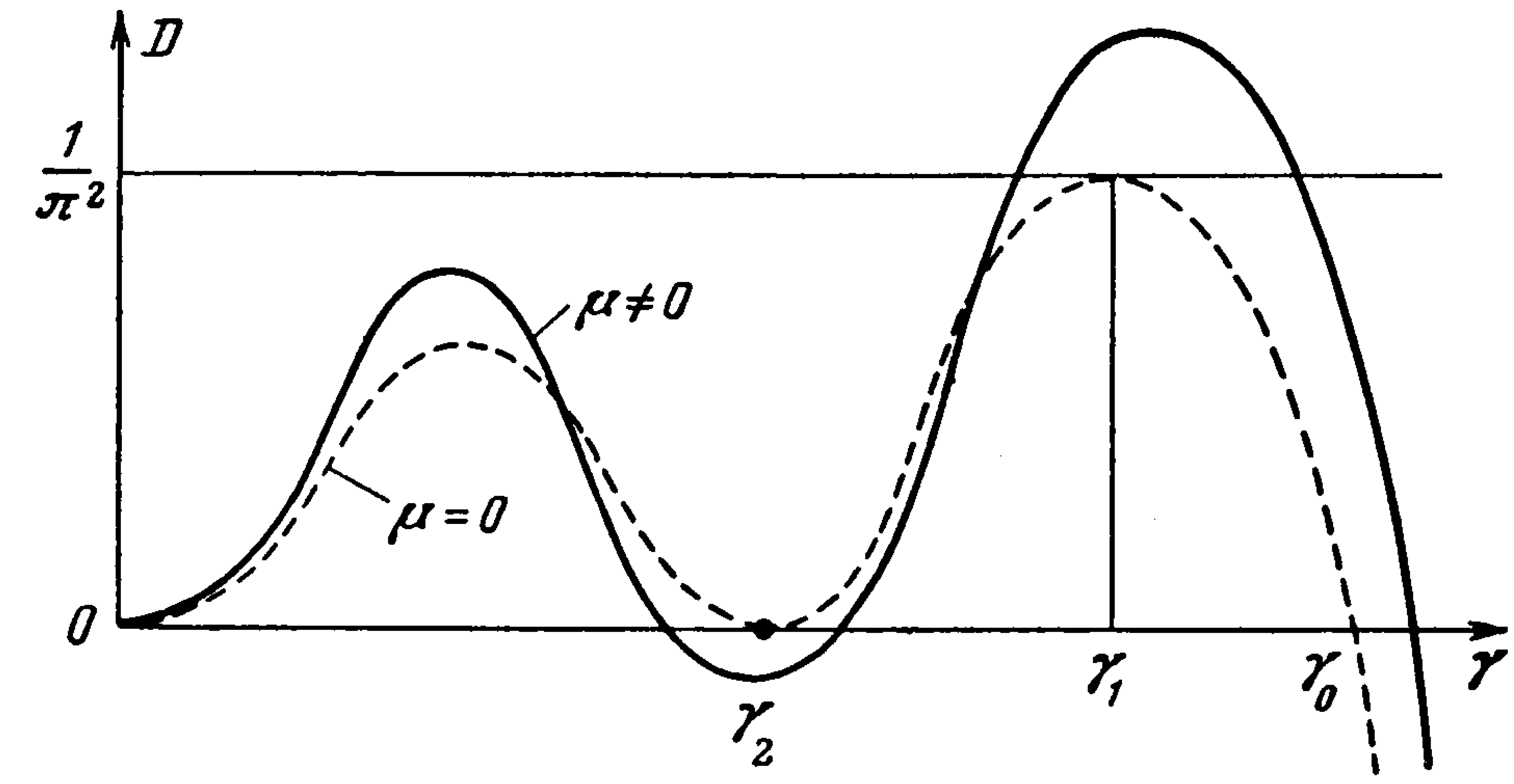
Первая точка является критической точкой второго рода, остальные две точки, как нетрудно проверить по знаку следующего за D_0 и неравного нулю коэффициента D_n, являются критическими точками первого рода. Заметим, что для третьей точки $D_2 = 0$. В критических точках частоты ν_1 соответственно равны 0, ${}^1/_2$, 1.

---

¹ Подробное определение этих параметров дано в статьях [1,2].

На фиг. 2 даны кривые D по параметру γ при $\mu=0$ и при малом μ для некоторого значения параметра h. На кривой D_0 при $\gamma=8h$ имеется максимум, лежащий внутри полосы (1.7). Вблизи этой точки возможно появление новой критической точки первого рода при некотором значении μ.

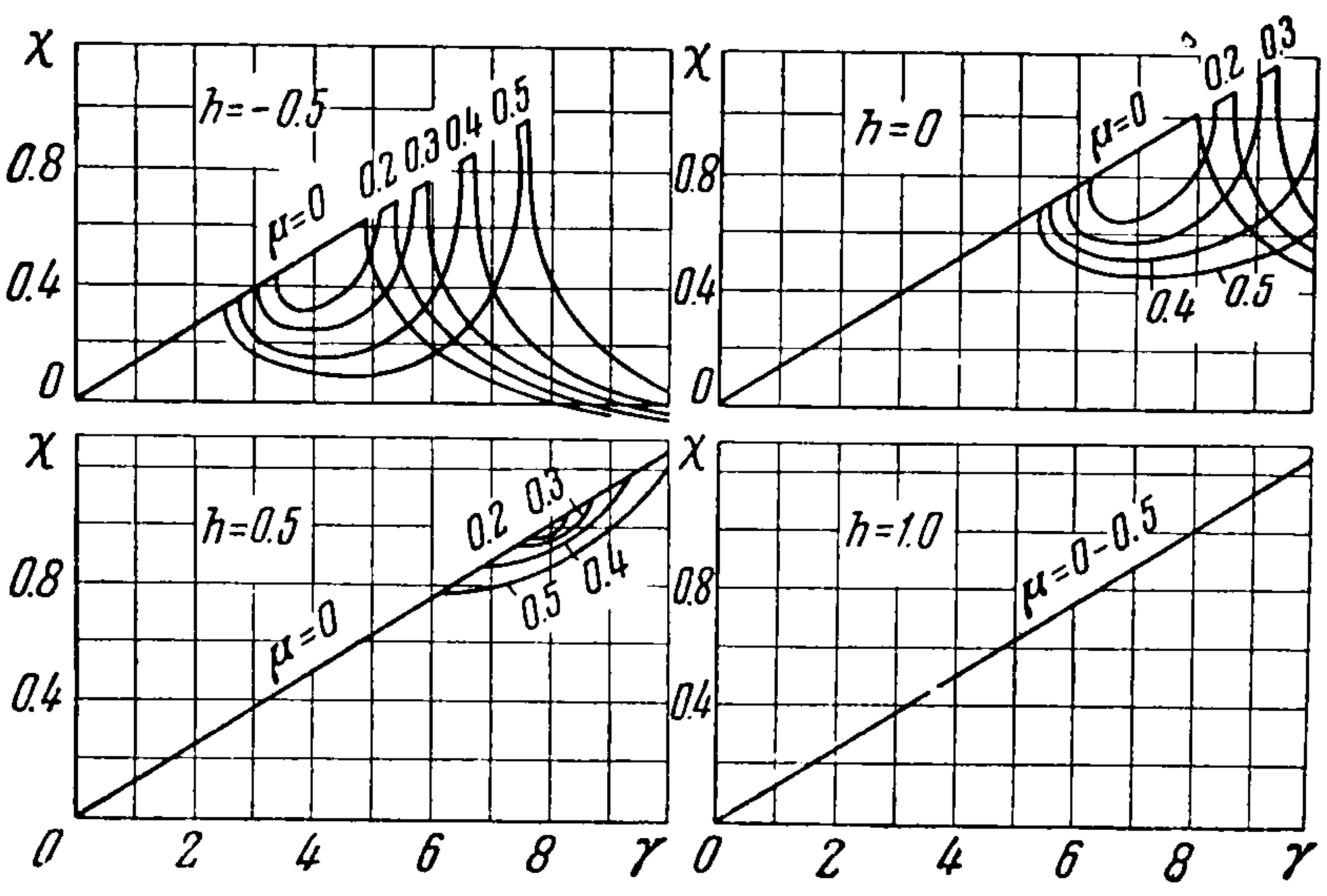
На фиг. 3 приведены кривые наименьших характеристических чисел, построенные по параметру γ, при значениях параметра μ от 0 до 0,5. Каждый график соответствует одному из четырех значений параметра $h=-0.5$, 0, 0.5, 1.0.



Фиг. 2

Проанализируем, как изменяется вид кривых характеристических чисел при изменении параметра h от —0.5 до 1.0. При $h=-0.5$ имеются два семейства криволинейных ветвей с критическими точками $\gamma_0=4(\sqrt{5}-1)$ и $\gamma_1=4$. С увеличением параметра h эти точки перемещаются вправо и при $h=0$ абсциссы их становятся равными $\gamma_0=8$ и $\gamma_1=4\sqrt{3}$. При дальнейшем увеличении h эти точки вместе с соответствующими им семействами криволинейных ветвей выходят за границу практически интересных значений параметра γ. Например, при $h=0.5$ абсциссы этих точек делаются равными $\gamma_0=4(\sqrt{5}+1)$ и $\gamma_1=12$.

При малых значениях параметра h справа от точки $\gamma=0$ появляется новая критическая точка γ_2, которая, двигаясь вправо, достигает при $h=0.5$ абсциссы $\gamma_2=8$. При $h=1.0$ эта точка вместе со своим семейством криволинейных ветвей также уходит в область $\gamma>10$. Таким образом, при $h=1.0$ во всем диапазоне практически интересных значений параметра μ не существует криволинейных ветвей. Для появления новой критической точки, соответствующей упомянутому выше максимуму внутри полосы (1.7), значение $\mu=0.5$ оказывается недостаточным.



Фиг. 3

Заметим, что криволинейные ветви семейства, имеющего критическую точку γ_2, лежат ближе к прямой $\chi={}^1/_8\gamma$, чем соответствующие ветви семейства с критической точкой γ_1. Это объясняется тем, что в разложении $D(\mu)$ при $\gamma=\gamma_2$ коэффициент D_2 равен нулю.

Поступила 5 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Характеристические числа решений дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946, стр. 545—558.
2. Проскуряков А. П. Динамическая устойчивость несущего винта при наличии горизонтальных шарниров у лопастей. Труды ЛИИ, № 22, 1947.