

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ ДВИЖЕНИЯ
СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА, СОДЕРЖАЩЕГО ЖИДКИЕ МАССЫ

С. В. Ж а к

(Ростов-на-Дону)

В настоящей заметке рассматриваются частные случаи движения гироскопа с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, и устанавливаются необходимые и достаточные условия устойчивости таких движений.

1. Уравнения движения симметричного гироскопа с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, вихрь скорости которой предполагается постоянным для всех точек жидкости, были получены в различных формах при различных предположениях о действующих силах и расположении полости Гринхиллом,^[1] Гафом,^[2] Пуанкаре,^[3] Жуковским^[4] и др.¹ Если кроме сил тяжести, иных сил нет, то после введения функции Жуковского Ψ движение системы описывается двумя векторными обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \nabla \Psi \cdot (\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{H}), \quad \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{L}, \quad \mathbf{H}(t) = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (1.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}(t)$ — мгновенная угловая скорость гироскопа, \mathbf{L} — момент сил тяжести, а кинетический момент системы \mathbf{W} имеют вид:

$$\mathbf{W} = J_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} + J \cdot \mathbf{H} + J_1 \cdot (\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{H}) = (J_0 + J_1) \cdot \boldsymbol{\Omega} + (J - J_1) \cdot \mathbf{H} \quad (1.2)$$

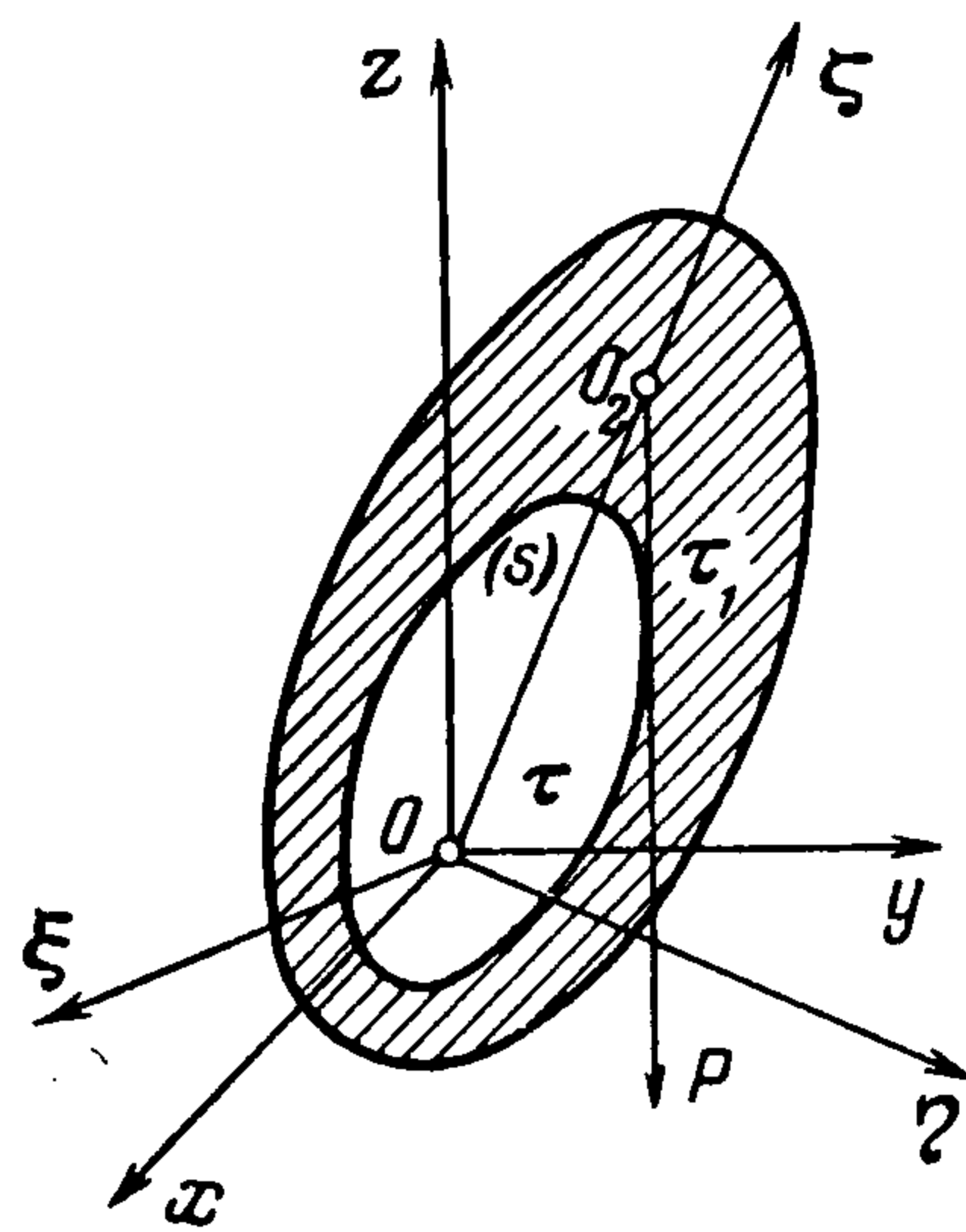
где J_0 — тензор инерции оболочки, J — тензор инерции жидкой массы в полости, J_1 — тензор инерции «эквивалентного» твердого тела для жидкости в полости^[4].

Если связать с гироскопом полуподвижную («астатическую», как ее называют в теории гироскопов) систему координат $O\xi\eta\zeta$ (фиг. 1), не принимающую участия во вращении его вокруг общей оси симметрии оболочки и полости Oz , то в ней тензоры $J_0 + J_1$, $J - J_1$ имеют лишь постоянные диагональные компоненты A_1, C_1 и A_2, C_2 .

Обозначая проекции \mathbf{H} и $\boldsymbol{\Omega}$ на эти оси через p_1, q_1, r_1, p, q, r , получим уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= r_1 [\varepsilon q_1 - (1 + \varepsilon) q] \\ \dot{q}_1 &= -r_1 [\varepsilon p_1 - (1 + \varepsilon) p] \quad \left(\varepsilon = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= (1 - \varepsilon) (p_1 q - q_1 p) \\ A_1 \dot{p} + A_2 \dot{p}_1 + q (C_1 r + C_2 r_1) &= L_1 \\ A_1 \dot{q} + A_2 \dot{q}_1 - p (C_1 r + C_2 r_1) &= L_2 \\ C_1 \dot{r} + C_2 \dot{r}_1 - A_2 (p_1 q - q_1 p) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

(ε — коэффициент эллипсности, $a = b$, c — полуоси эллипсоида).

Так как для эллипсоида вращения

$$A_2 = (1 - \varepsilon) C_2 = \frac{4Ma^2c^2}{5(a^2 + c^2)}$$

где M — масса жидкости в полости, то из третьих уравнений систем (1.3) и (1.4) следует

$$C_1 \dot{r} = 0, \quad r = \operatorname{const} = r_0$$

¹ Уже после сдачи настоящей статьи в редакцию мне стала известна статья В. В. Румянцева «Об устойчивости вращения твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, наполненную жидкостью». Труды Ин-та механики АН СССР, вып. 2, Изд-во АН СССР, 1956 г., также посвященная изучаемому вопросу.

Если обозначить $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы вертикали (линии действия силы веса) в выбранной системе координат, P — вес системы и h — расстояние от центра тяжести системы до неподвижной точки, то

$$L = Ph\xi^\circ \times g^\circ \quad L_1 = Ph\gamma_2, \quad L_2 = -Ph\gamma_1$$

и требуется еще добавить кинематические уравнения

$$\dot{\gamma}_1 = -q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \quad (1.5)$$

При задании начального положения гироскопа и начальных значений угловых скоростей система уравнений (1.3) — (1.5) полностью определяет движение гироскопа.

2. Если полость сферическая, то $\varepsilon = 0$, $A_2 = C_2 = \frac{2}{5}Ma^2$ и после исключения \dot{p}_1, \dot{q}_1 уравнения (1.4) принимают вид:

$$A_1\dot{p} + C_1r_0q = Ph\gamma_2, \quad A_1\dot{q} - C_1r_0p = -Ph\gamma_1 \quad (2.1)$$

т. е. не зависят от p_1, q_1, r_1 . Уравнения же движения твердого гироскопа в выбранной системе координат имеют вид:

$$A\dot{p} + Cr_0q = Ph\gamma_2, \quad A\dot{q} - Cr_0p = -Ph\gamma_1, \quad A = A_1 + A_2, \quad C = C_1 + C_2 \quad (2.2)$$

Уравнения (1.5) останутся теми же. А так как Н. Г. Четаевым [6] установлено, что необходимым и достаточным условием устойчивости движения такого гироскопа вокруг вертикального положения равновесия является выполнение неравенства

$$r_0^2 > \frac{4APh}{C^2} = r_{01}^2$$

то, совершенно дословно повторяя те же выкладки и рассуждения, получаем, что необходимым и достаточным условием устойчивости движения симметричного гироскопа со сферической полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, вокруг вертикального положения равновесия ($p = q = 0, r = r_0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1$) является неравенство

$$r_0^2 > \frac{4A_1Ph}{C_1^2} = r_{02}^2$$

Система будет двигаться как твердый гироскоп, не содержащий жидких масс, лишь моменты инерции ее нужно заменить моментами инерции «преобразованного твердого тела» [4].

Представляет интерес оценить влияние жидкости, изучая отношение критических угловых скоростей:

$$f(k, x) = \left(\frac{r_{02}}{r_{01}}\right)^2 = \frac{A_1C^2}{AC_1^2} = \frac{1 - kx}{(1 - x)^2} \quad \left(k = \frac{C}{A}, \quad x = \frac{C_2}{C}\right) \quad (2.3)$$

Графики изменения этого отношения приведены на фиг. 2. Из них следует, что, например, в простейшем случае, когда плотности оболочки и жидкости равны, с увеличением полости (A, C , а значит, и k остаются постоянными, x растет) критическая угловая скорость r_{02} возрастает, если $C \leq A$ ($k \leq 1$), вначале возрастает, а потом убывает, если $A < C < 2A$ ($1 < k < 2$) по отношению к r_{01} . Случай $k \geq 2$ невозможен, так как всегда $2A > C$.

3. В том случае, когда оболочка настолько тонка, что ее моментами инерции можно пренебречь, а неподвижная точка совпадает с центром полости, также оказывается возможным применить метод Четаева [5–7]. В этом случае

$$A_1 = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2)\varepsilon^2, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{2}{5}Ma^2, \quad A_2 = (1 - \varepsilon)C_2$$

и уравнения (1.4) принимают вид:

$$\dot{p} = -\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} r_1 [q_1(1 - \varepsilon) + \varepsilon q], \quad \dot{q} = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} r_1 [p_1(1 - \varepsilon) + \varepsilon p] \quad (3.1)$$

Уравнения (1.3) при этом не меняются, а уравнения (1.5) позволяют впоследствии по определенным из уравнений (3.1) и (1.3) p и q найти $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Уравнения (3.1) и (1.3) дают следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} r_1^2 &= \text{const} \\ p_1^2 + q_1^2 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} r_1^2 &= \text{const} \\ 2pp_1 + 2qq_1 + \frac{1+2\varepsilon}{1-\varepsilon} r_1^2 &= \text{const} \end{aligned} \quad (3.2)$$

или, исключая r_1 :

$$p^2 + q^2 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} (p_1^2 + q_1^2) = \text{const}, \quad 2pp_1 + 2qq_1 - \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} (p_1^2 + q_1^2) \equiv V_2 = \text{const} \quad (3.3)$$

Составляя связку этих интегралов

$$\begin{aligned} V = V_1 + \lambda V_2 &= p^2 + 2\lambda pp_1 + p_1^2 \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} - \lambda \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) + q^2 + 2\lambda qq_1 + \\ &+ q_1^2 \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} - \lambda \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

видим, что эта квадратичная форма, постоянная в силу уравнений движения, будет положительно-определенной только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > 0$$

А для того чтобы можно было подобрать λ так, чтобы это неравенство выполнялось, должно иметь место

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2 + 4 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{4+5\varepsilon}{\varepsilon(1+\varepsilon)^2} > 0 \\ \text{т. е. или } \varepsilon > 0 \quad (a^2 > c^2), \quad \text{или } \varepsilon < -\frac{4}{5} \quad (c^2 > 9a^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Но в силу результатов Н. Г. Четаева [5, 6] это является необходимым и достаточным условием устойчивости движения рассматриваемого гироскопа вокруг вертикального положения равновесия относительно переменных p, q, p_1, q_1 .

Эти условия были в свое время получены Гафом [2] как условия устойчивости линеаризованных уравнений, уравнений первого приближения.

4. Если гироскоп колеблется вокруг вертикального положения равновесия, то линеаризация уравнений (1.3) и (1.4) приводит к следующему: считая p_1, q_1, p, q малыми и пренебрегая их произведениями, получаем

$$\dot{r}_1 = 0, \quad \text{или} \quad r_1 = \text{const} = r_0 \quad (4.1)$$

Кроме того, определяя положение оси гироскопа углами α и β между вертикалью и плоскостями $\xi O \zeta$ и $\eta O \zeta$, можем также пренебречь их квадратами и произведениями, ибо в силу того, что система $O \xi \eta \zeta$ полуподвижная и не участвует во вращении гироскопа вокруг своей оси, они во все время движения по предположению остаются малыми. В результате имеем

$$p = \dot{\beta}, \quad q = -\dot{\alpha}, \quad \gamma_1 \approx \alpha, \quad \gamma_2 \approx \beta, \quad \gamma_3 \approx 1 \quad (4.2)$$

Подставляем это в (1.3) и (1.4):

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= r_0 [\varepsilon q_1 + (1+\varepsilon) \dot{\alpha}], & \ddot{\beta} + \varepsilon(1-\varepsilon) k_2 r_0 q_1 - r_0 (k_1 + \varepsilon^2 k_2) \dot{\alpha} &= k_3 \beta \\ \dot{q}_1 &= -r_0 [\varepsilon p_1 - (1+\varepsilon) \dot{\beta}], & \ddot{\alpha} + \varepsilon(1-\varepsilon) k_2 r_0 p_1 + r_0 (k_1 + \varepsilon^2 k_2) \dot{\beta} &= k_3 \alpha \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$k_1 = \frac{C_1}{A_1}, \quad k_2 = \frac{C_2}{A_1}, \quad k_3 = \frac{Ph}{A_1}$$

Введем комплексное переменное $Z = \alpha \pm i\beta = Ne^{\pm\lambda t}$; исключая p_1, q_1 , получаем для системы (4.3) следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + r_0(\varepsilon - k_1 - \varepsilon^2 k_2)\lambda^2 + [k_3 - r_0^2 \varepsilon(k_1 + k_2)]\lambda + \varepsilon r_0 k_3 = 0 \quad (4.4)$$

Так как комплексным корням уравнения (4.4) соответствует неустойчивое, а вещественным корням периодически устойчивое первое приближение, то на основании известных теорем Ляпунова [8] наличие комплексных корней у уравнения (4.4) является достаточным условием неустойчивости движения гироскопа в целом, в случае же вещественных корней имеем критический случай — 3 пары чисто мнимых корней. Поэтому достаточным условием неустойчивости будет неравенство

$$f(\mu) = \mu^3 + a_1\mu^2 + a_2\mu + a_3 > 0 \quad (4.5)$$

являющееся преобразованным условием наличия комплексных корней у уравнения (4.4); здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{k_3}{r_0^2}, & \pi_1 &= k_1 + \varepsilon^2 k_2 - \varepsilon, & \pi_2 &= k_1 + k_2 \\ a_1 &= \frac{1}{4} [27\varepsilon^2 + 6\varepsilon(3\pi_1 - 2\pi_2) - \pi_1^2], & a_3 &= -\frac{\varepsilon^2 \pi_2^2}{4} (\pi_1^2 + 4\varepsilon\pi_2) \\ a_2 &= \frac{\varepsilon}{2} [3\varepsilon\pi_2(2\pi_2 - 3\pi_1) + \pi_1^2(\pi_2 - 2\pi_1)], \end{aligned}$$

Интересно отметить, что так как характеристическое уравнение имеет 3-ю, а не 2-ю степень, то при устойчивом движении ось гироскопа, кроме прецессии и нутации, будет совершать еще и «нутацию второго порядка», т. е. она вращается с постоянной угловой скоростью λ_3 вокруг центра O_3 , который в свою очередь вращается с угловой скоростью λ_2 вокруг центра O_2 , вращающегося с угловой скоростью λ_1 вокруг следа оси гироскопа в положении «спящего волчка» — O_1 [$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни уравнения (4.4)].

Рассмотренные ранее частные случаи — сферической полости и «безынерционной» оболочки — также легко исследуются и исходя из уравнений первого приближения.

В случае сферической полости $\varepsilon = 0$, $a_2 = a_3 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{4}k_1^2$ условие (4.5) принимает вид:

$$f(\mu) = \mu^2 \left(\mu - \frac{k_1^2}{4} \right) > 0$$

т. е. движение неустойчиво при

$$\mu > \frac{k_1^2}{4}, \quad \text{или} \quad r_0^2 < \frac{4k_3}{k_1^2} = \frac{4PhA_1}{c_1^2} = r_{02}^2$$

Как было показано ранее, это достаточное условие неустойчивости является и необходимым.

В случае «безынерционной» оболочки ($k_1 = 0$, $k_2 = (1 + \varepsilon)/c^2$, $k_3 = 0$) уравнение (4.4) переходит в

$$\lambda \left(\lambda^2 - \lambda r_0 - r_0^2 \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{r_0}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4 + 5\varepsilon}{\varepsilon}} \right)$$

и опять получаем то же, что и в п. 3, условие неустойчивости

$$-\frac{4}{5} < \varepsilon < 0 \quad (a < c < 3a)$$

5. Рассмотрим теперь случай, когда полость близка к сфере. Для определенности будем исходить из сферы, равной по объему рассматриваемому эллипсоиду. Так как коэффициент ε при этом предполагается малым, то, разлагая коэффициенты неравенства (4.5) в ряд по степеням ε и отыскивая корни его также в виде ряда по степеням ε , получим

$$f(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) > 0 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (k_{20} - k_{10} - 2i\sqrt{k_{10}k_{20}})\varepsilon + O(\varepsilon^2), & \mu_3 &= \frac{1}{4} \left[k_{10}^2 + \frac{1}{2} k_{10} \left(\frac{dk_1}{d\varepsilon} \right)_0 \right] \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \mu_2 &= (k_{20} - k_{10} + 2i\sqrt{k_{10}k_{20}})\varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

Индекс нуль означает, что соответствующая величина вычислена при $\varepsilon = 0$, т. е. для исходной сферы. Величина $(dk_1/d\varepsilon)_0$ легко может быть вычислена, ибо

$$\frac{dk_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{A_1^2} \left(A_1 \frac{dC_1}{d\varepsilon} - C_1 \frac{dA_1}{d\varepsilon} \right)$$

а для подсчета $dA_1/d\varepsilon$ и $dC_1/d\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$ можно определить изменения этих моментов при изменении формы полости из сферической в эллипсоидальную, а затем найти пределы:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta A_1}{\varepsilon} = \left(\frac{dA_1}{d\varepsilon} \right)_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta C_1}{\varepsilon} = \left(\frac{dC_1}{d\varepsilon} \right)_0$$

Подсчеты дают

$$\frac{dk_1}{d\varepsilon} = -\frac{1}{3} \frac{\gamma_1}{\gamma} k_{20} (2 + k_{10}) \quad (5.3)$$

(γ — плотность жидкости, γ_1 — плотность оболочки).

Из полученных выражений (5.2) следует, что при малых ε два из корней неравенства (4.5) становятся комплексными; следовательно, неравенство выполняется $\mu > \mu_3$, т. е. движение неустойчиво при

$$r_0^2 < \frac{k_3}{\mu_3} \quad (5.4)$$

Значит, и в этом случае качественная картина остается такой же, как и для твердого тела: имеется одна критическая угловая скорость. Однако не доказано, что при $r_0^2 > k_3/\mu_3$ движение будет устойчивым, ибо мы исследовали здесь лишь линеаризованные уравнения.

6. Хотя во всех рассмотренных выше случаях качественная картина оказывалась такой же, как и для твердого тела, но, поскольку условие неустойчивости (4.5) является кубическим неравенством (для твердого тела соответствующее неравенство линейно), можно ожидать качественно новых случаев: абсолютной неустойчивости (если неравенство (4.5) вообще не имеет положительных вещественных корней) или появления второй области неустойчивости для больших угловых скоростей [при наличии двух или трех положительных корней у неравенства (4.5)].

Например, при $\varepsilon = -0.5$, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.5$ неравенство (4.5) принимает вид:

$$\mu^3 - 0.0850 \mu^2 - 0.0350 \mu + 0.061 > 0$$

и выполняется всегда (один отрицательный и два комплексных корня), т. е. движение такой системы всегда неустойчиво. Однако задача построения конкретного гироскопа с полостью по заданным k_1 , k_2 и ε хотя теоретически вполне осуществима (для 6—7 выбираемых величин: трех параметров, характеризующих полость, плотностей оболочки и жидкости, параметров, определяющих внешнее очертание тела, имеются лишь три уравнения), но практически крайне затруднительна, что не позволяет привести в настоящей статье примеры таких «аномальных» гироскопов.

Поступила 11 VI 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Greenhill. On the Rotation of a Liquid Ellipsoid about its Mean Axis, Proc. Camb. Phil. Soc., III, 1879.
2. Hough. The Oscillations of a Rotating Ellipsoidal Shell containing Fluid, Phil. Trans. A, CLXXXVI, 1895.
3. Poincaré, Sur la précession des corps déformables, Bull. Astr., XXVII, 1910.
4. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, 1949.
5. Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши. ПММ, т. IX, вып. 2, 1945.
6. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа, ПММ, т. XVIII, в. 1, 1954.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской, ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.
8. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., ОНТИ, 1935.
9. Жак С. В. О возможности квазитвердого движения жидкости, ПММ, т. XXI, в. 4, 1957.