Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ КОМПЛЕКСНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

К. Ф. Черных

(Ленинград)

При расчете оболочек сложной формы (резервуары, котлы и т. д.) часто приходится разбивать их на несколько более простых частей.

При этом использование комплексного преобразования [1] затрудняется необходимостью при сопряжении решений разделять их вещественные и мнимые части.

В некоторых частных случаях [1] были предложены комплексные комбинации искомых величин, дающие возможность устранить отмеченный недостаток.

В настоящей работе комплексные условия сопряжения общего вида получены как естественные граничные условия предлагаемой вариационной задачи.

Вводится понятие комплексной энергии и доказывается минимальное свойство ее модуля.

Срединную поверхность оболочки отнесем к линиям главных кривизн (α_1, α_2) и будем для краткости изложения считать, что область изменения координат срединной поверхности S ограничена какой-либо замкнутой линией кривизны, например $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \mathrm{const}$. Положим, кроме того, равным нулю коэффициент Пуассона μ.

Тогда, как известно [1], имеет место обобщенный закон Гука, связывающий усилия-моменты со смещениями срединной поверхности u, v, w:

$$\begin{aligned} T_1 &= Eh\varepsilon_1(u, v, w), & M_1 &= Ehc_0^2\varkappa_1(u,v,w,) \\ T_2 &= Eh\varepsilon_2(u, v, w) & M_2 &= Ehc_0^2\varkappa_2(u, v, w) \\ S &= Eh\frac{1}{2}\omega(u, v, w), & H &= Ehc_0^2\tau(u, v, w) \end{aligned} \tag{1}$$

Обобщая понятие функций Лурье — Гольденвейзера [2,3] на случай неоднородной задачи теории оболочек, введем функции напряжения a, b, c следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1^* + Ehc_0\varkappa_2(a, b, c), & M_1 &= M_1^* - Ehc_0\varepsilon_2(a, b, c) \\ T_2 &= T_2^* + Ehc_0\varkappa_1(a, b, c), & M_2 &= M_2^* - Ehc_0\varepsilon_1(a, b, c) \\ S &= S^* - Ehc_0\tau(a, b, c), & H &= H^* + Ehc_0\frac{1}{2}\omega(a, b, c) \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $h = \mathrm{const}$ — толщина оболочки, $c_0^2 = {}^1/_{12}h^2$, а составляющие деформации выражаются через смещения срединной поверхности соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}v + \frac{w}{R_1}, & \varkappa_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u + \frac{w}{R_2}, & \varkappa_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\vartheta \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad \tau = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2} = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} \tag{3}$$

где

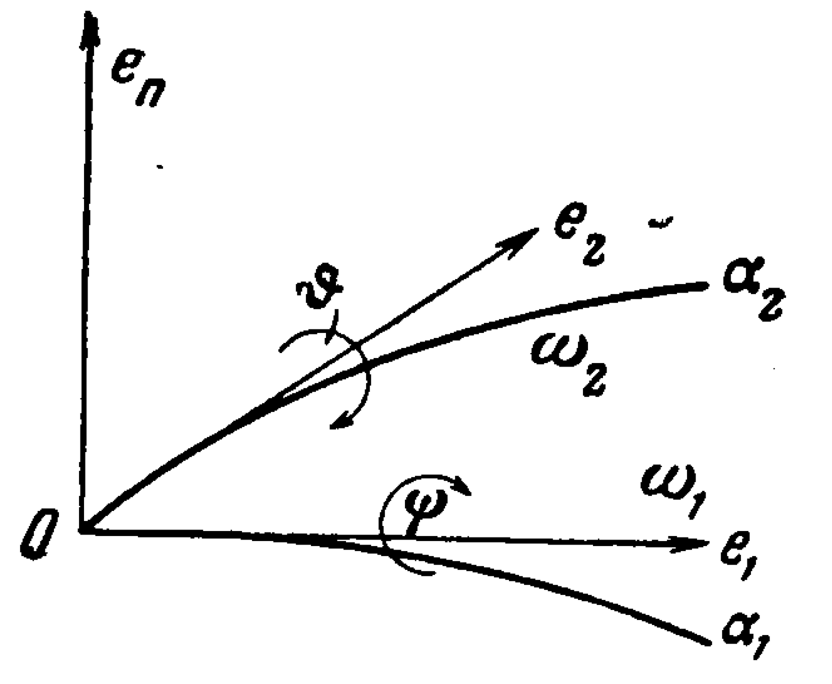
$$\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u}{R_1}, & \omega_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u \\ \psi &= -\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{v}{R_2}, & \omega_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}v \end{aligned}$$

углы поворота соответственно касательных к координатным линиям α_1 и α_2 вокруг направлений, показанных на фиг. 1,

$$\tau_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\vartheta, \qquad \tau_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi$$

а A_1, A_2, R_1, R_2 — соответствующие параметры Ляме и главные радиусы кривизны срединной поверхности. В качестве системы функций $(T_1^*, T_2^*, S^*, M_1^*, M_2^*, H^*)$ выбирается некоторое решение системы уравнений равновесия (статически допустимая система функций). Комплексными усилиями называют следующие комплексные комбинации:

$$\begin{aligned} \check{T}_1 &= T_1 - iEhc_0\varkappa_2 = T_1 - \frac{i}{c_0}M_2 \\ \check{T}_2 &= T_2 - iEhc_0\varkappa_1 = T_2 - \frac{i}{c_0}M_1 \\ \check{S} &= S + iEhc_0\tau = S + \frac{i}{c_0}H \end{aligned} \tag{4}$$



Фиг. 1

Они удовлетворяют следующей системе уравнений в комплексных усилиях [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_2\check{T}_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2\check{S}}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\check{T}_2 + \\ &\qquad + \frac{ic_0}{R_1}\left[\frac{\partial A_2\check{T}_2}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2\check{S}}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\check{T}_1\right] + \prod\nolimits_1 + A_1A_2q_1 = 0 \\ &\frac{\partial A_1\check{T}_2}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2\check{S}}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\check{T}_1 + \\ &\qquad + \frac{ic_0}{R_2}\left[\frac{\partial A_1\check{T}_1}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2\check{S}}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\check{T}_2\right] + \prod\nolimits_2 + A_1A_2q_2 = 0 \\ &\frac{\check{T}_1}{R_1} + \frac{\check{T}_2}{R_2} - \frac{ic_0}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial A_2\check{T}_2}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2\check{S}}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\check{T}_1\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_1\check{T}_1}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2\check{S}}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\check{T}_2\right)\right\} - q_n = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\prod\nolimits_1 = ic_0\left\{-\frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\check{S} - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{R_1}\check{S}\right)\right\}, \qquad \prod\nolimits_2 = ic_0\left\{-\frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\check{S} - \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{R_2}\check{S}\right)\right\}$$

Эта система равносильна совокупности систем уравнений равновесия и неразрывности срединной поверхности. В этом легко убедиться, разделив в ней вещественную и мнимую части.

Комплексные смещения вводятся соотношениями

$$\check{u} = u + ia, \qquad \check{v} = v + ib, \qquad \check{w} = w + ic \tag{6}$$

Составляя комплексные комбинации соответствующих уравнений систем (1) и (2), получим связь между комплексными усилиями и смещениями:

$$\begin{aligned} \check{T}_1 &= T_1^* - iEhc_0\check{\varkappa}_2(\check{u}, \check{v}, \check{w}), & \check{T}_1 &= -\frac{i}{c_0}M_2^* + Eh\check{\varepsilon}_1(\check{u}, \check{v}, \check{w}) \\ \check{T}_2 &= T_2^* - iEhc_0\check{\varkappa}_1(\check{u}, \check{v}, \check{w}), & \check{T}_2 &= -\frac{i}{c_0}M_1^* + Eh\check{\varepsilon}_2(\check{u}, \check{v}, \check{w}) \\ \check{S} &= S^* + iEhc_0\check{\tau}(\check{u}, \check{v}, \check{w}), & \check{S} &= \frac{i}{c_0}H^* + Eh\frac{1}{2}\check{\omega}(\check{u}, \check{v}, \check{w}) \end{aligned} \tag{7}$$

Наконец, исключая отсюда комплексные усилия $T_1^\vee$, $T_2^\vee$, $S^\vee$, получим систему уравнений в комплексных смещениях:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1^\vee + ic_0\varkappa_2^\vee &= \frac{1}{Eh}\left(T_1^* + \frac{i}{c_0} M_2^*\right)\\
\varepsilon_2^\vee + ic_0\varkappa_1^\vee &= \frac{1}{Eh}\left(T_2^* + \frac{i}{c_0} M_1^*\right)\\
\frac{\omega^\vee}{2} - ic_0\tau^\vee &= \frac{1}{Eh}\left(S^* - \frac{i}{c_0} H^*\right)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Если в качестве системы функций (T_1^*, T_2^*, S^*, M_1^*, M_2^*, H^*) выбрать общее решение безмоментной теории (T_1^*, T_2^*, S^*), то системы (7) и (8) совпадут с аналогичными, предложенными В. В. Новожиловым.

Сопоставим точкам границы ($\alpha_1 = \overset{\circ}{\alpha}_1$) четыре комплексные величины:

$$
T_1^\vee, \quad T_{12}^{\vee\prime} = S^\vee - ic_0\frac{2S^\vee}{R_2}, \quad N_1^{\vee\prime} = \frac{ic_0}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2T_2^\vee}{\partial\alpha_1} - 2\frac{\partial A_1S^\vee}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_1^\vee\right)
$$

$$
M_1^\vee = ic_0T_2^\vee \tag{9}
$$

Отделяя в приведенных комплексных выражениях вещественные части, получим следующие величины:

$$
T_1, \qquad T_{12}' = S + 2\frac{H}{R_2} = T_{12} + \frac{M_{12}}{R_2}
$$

$$
N_1' = \frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2M_1}{\partial\alpha_1} + 2\frac{\partial A_1H}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_2\right) = N_1 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha_2}, \qquad M_1
$$

А это (см.[1], стр. 55) есть обобщенные по Кирхгофу контурные усилия.

Мнимые части величин (9) имеют вид:

$$
-Ehc_0\varkappa_2, \qquad Ehc_0\varkappa_{21}' = Ehc_0\left\{\tau - \frac{\omega}{R_2}\right\}
$$

$$
-Ehc_0\zeta_2' = -Ehc_0\left\{-\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2\varepsilon_2}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1\omega}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\varepsilon_1\right)\right\}, \qquad Ehc_0\varepsilon_2
$$

Выясним геометрический смысл величин $\varkappa_2$, $\varkappa_{21}'$, ζ_2', ε_2. Для этого несколько их преобразуем. Подставляя в третье соотношение выражения для деформаций (3), получим при помощи соотношений Кодацци — Гаусса

$$
\zeta_2' = \frac{\vartheta}{R_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_2}
$$

Далее $\tau = \tau_2 + \dfrac{\omega_1}{R_2}$, $\omega = \omega_1 + \omega_2$; отсюда

$$
\varkappa_{21}' = \tau_2 - \frac{\omega_2}{R_2}
$$

Итак, на нейтральной линии заданы четыре величины:

$$
\varepsilon_2, \varkappa_2\ \zeta_2' = \frac{\vartheta}{R_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_2}, \qquad \varkappa_{21}' = \tau_2 - \frac{\omega_2}{R_2} \tag{10}
$$

Покажем, что их задание полностью определяет деформацию граничного элемента. Для этого выделим граничный элемент, связанный с элементом дуги.

Прежде всего известно, что ε_2 определяет относительное удлинение нейтральной линии, а $\varkappa_2$ — ее искривление в плоскости чертежа.

Найдем искривление в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, определив его как предел отношения разностей углов в двух смежных точках вокруг одного и того же направления ($\mathbf{e}_n$) к расстоянию между ними, т. е. положив его равным

$$\varkappa_{2z} = \lim_{\Delta\alpha_2 \to 0} \frac{\omega_2'' - \omega_2}{A_2 \Delta\alpha_2} \tag{11}$$

Из фиг. 2 видно, что

$$\omega_2'' = \left(\omega_2 + \frac{\Delta\omega_2}{\Delta\alpha_2}\Delta\alpha_2\right)\cos\Delta\beta + \left(\vartheta + \frac{\Delta\vartheta}{\Delta\alpha_2}\Delta\alpha_2\right)\sin\Delta\beta$$

В силу малости угла $\Delta\beta$

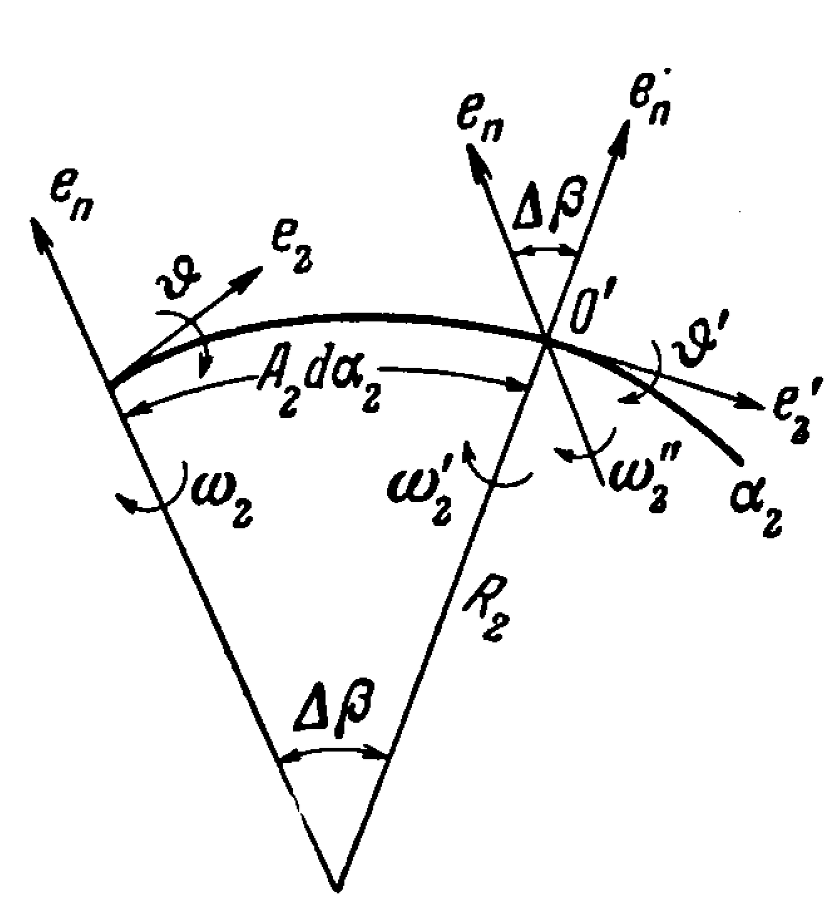
$$\cos\Delta\beta \approx 1, \qquad \sin\Delta\beta \approx \Delta\beta \approx \frac{A_2\Delta\alpha_2}{R_2}$$

и

$$\omega_2'' \approx \omega_2 + \left(\frac{\Delta\omega_2}{\Delta\alpha_2} + \frac{A_2}{R_2}\vartheta\right)\Delta\alpha_2$$

Подставляя полученное соотношение в равенство (11), получим

$$\varkappa_{2z} = \frac{\vartheta}{R_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_2} = \zeta_2'$$



Фиг. 2

Итак, первые три величины определяют деформации элемента нейтральной линии.

Далее [1]

$$\omega_2^{(z)} = \frac{\omega_2 + z\tau_2}{1 + z / R_2} \approx \omega_2 + z\left(\tau_2 - \frac{\omega_2}{R_2}\right)$$

Отсюда видно, что четвертая величина характеризует изменение по высоте угла поворота ω_2, т. е. скручивание граничного элемента.

Но согласно кинематической гипотезе Кирхгофа деформация граничного элемента как раз и определяется четырьмя величинами. Таким образом, задание мнимых частей комплексных выражений (9) полностью определяет деформацию граничного элемента.

Предполагая, как и выше, что срединная поверхность оболочки ограничена замкнутой линией кривизны $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \text{const}$, покажем, что в основу теории оболочек можно положить следующее вариационное уравнение:

$$\iint_S \{T_1^\vee \delta\varepsilon_1^\vee + T_2^\vee \delta\varepsilon_2^\vee + S^\vee \delta\omega^\vee + ic_0 T_2^\vee \delta\varkappa_1^\vee + ic_0 T_1^\vee \delta\varkappa_2^\vee - ic_0 S^\vee \delta\tau^\vee\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 -$$
$$- \int_{\alpha_1 = \alpha_1^0} \{T_1^\vee \delta u^\vee + T_{12}^{\vee\prime} \delta v^\vee + N_1^{\vee\prime} \delta w^\vee + M_1^\vee \delta\vartheta^\vee\} A_2 d\alpha_2 -$$
$$- \iint_S \{q_1 \delta u^\vee + q_2 \delta v^\vee + q_n \delta w^\vee\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \tag{12}$$

Действительно, интегрируя первый интеграл по частям, нетрудно убедиться, что уравнениями Эйлера для (12) будет являться система уравнений в комплексных усилиях (5), которая равносильна совокупности систем уравнений равновесия и неразрывности срединной поверхности.

Используя соотношения (7), уравнение (12) можно привести к виду

$$\delta V^\vee - \int_{\alpha_1 = \alpha_1^0} \{T_1^\vee \delta u^\vee + T_{12}^{\vee\prime} \delta v^\vee + N_1^{\vee\prime} \delta w^\vee + M_1^\vee \delta\vartheta^\vee\} A_2 d\alpha_2 -$$
$$- \delta \iint_S \{q_1 u^\vee + q_2 v^\vee + q_n w^\vee\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

Здесь величину

$$V^{\vee}=\frac{Eh}{2}\Big\{\iint\limits_S\Big\{(\varepsilon_1^{\vee}+\varepsilon_2^{\vee})^2-2\Big[\varepsilon_1^{\vee}\varepsilon_2^{\vee}-\Big(\frac{\omega^{\vee}}{2}\Big)^2\Big]\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+$$

$$+\frac{h^2}{12}\iint\limits_S\Big\{(\varkappa_1^{\vee}+\varkappa_2^{\vee})^2-2\,[\varkappa_1^{\vee}\varkappa_2^{\vee}-\tau^{\vee 2}]\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\Big\}\Big\}+$$

$$+\iint\limits_S\Big\{-\frac{i}{c_0}M_2^*\varepsilon_1^{\vee}-\frac{i}{c_0}M_1^*\varepsilon_2^{\vee}+\frac{i}{c_0}H^*\omega^{\vee}+ic_0T_2^*\varkappa_1^{\vee}+ic_0T_1^*\varkappa_2^{\vee}-ic_02S^*\tau\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2-$$

$$-\frac{1}{2Eh}\Big\{\iint\limits_S\Big\{(T_1^*+T_2^*)^2-2\,[T_1^*T_2^*-S^{*2}]\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2+$$

$$+\frac{12}{h^2}\iint\limits_S\Big\{(M_1^*+M_2^*)^2-2\,[M_1^*M_2^*-H^{*2}]\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2\Big\}\Big\}$$

по аналогии можно называть потенциальной энергией комплексной деформации (заметим, что величины (T_1^*, T_2^*, ..., H^*) нами не варьируются).

Возможны, конечно, и другие формы комплексных вариационных уравнений, приводящие к тем или другим естественным граничным условиям. Отметим, что имеет место своеобразное минимальное свойство потенциальной энергии комплексной деформации.

Именно имеет место следующее предложение.

Для истинных комплексных смещений, т. е. для u, v, w, удовлетворяющих системе уравнений в комплексных смещениях (8), потенциальная энергия комплексной деформации V достигает минимального (по модулю) значения.

Действительно, V можно записать в виде:

$$V^{\vee}=\frac{Eh}{2}\iint\limits_S\Big\{\Big[\varepsilon_1^{\vee}+ic_0\varkappa_2^{\vee}-\frac{1}{Eh}\Big(T_1^*+\frac{i}{c_0}M_2^*\Big)\Big]\Big[\varepsilon_1^{\vee}-ic_0\varkappa_2^{\vee}+\frac{1}{Eh}\Big(T_1^*-\frac{i}{c_0}M_2^*\Big)\Big]+$$

$$+\Big[\varepsilon_2^{\vee}+ic_0\varkappa_1^{\vee}-\frac{1}{Eh}\Big(T_2^*+\frac{i}{c_0}M_1^*\Big)\Big]\Big[\varepsilon_2^{\vee}-ic_0\varkappa_1^{\vee}+\frac{1}{Eh}\Big(T_2^*-\frac{i}{c_0}M_1^*\Big)\Big]+$$

$$+2\Big[\frac{\omega^{\vee}}{2}-ic_0\tau^{\vee}-\frac{1}{Eh}\Big(S^*-\frac{i}{c_0}H^*\Big)\Big]\Big[\frac{\omega^{\vee}}{2}+ic_0\tau^{\vee}+\frac{1}{Eh}\Big(S^*+\frac{i}{c_0}H^*\Big)\Big]\Big\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2$$

Отсюда видно, что для $u^{\vee}$, $v^{\vee}$, $w^{\vee}$, удовлетворяющих системе уравнений (8), $V^{\vee}=0$. Это и доказывает минимальное свойство.

В качестве первого приложения вариационного уравнения получим комплексные условия сопряжения по линии кривизны двух оболочек одинаковой толщины.

Пусть две оболочки сопрягаются по линии l. Сопровождая знаком плюс все величины, относящиеся к первой оболочке, и знаком минус величины, относящиеся ко второй, примем вариационное уравнение в следующем виде:

$$\iint\limits_{S^+}\{T_1^{\vee+}\delta\varepsilon_1^{\vee+}+T_2^{\vee+}\delta\varepsilon_2^{\vee+}+S^+\delta\omega^{+\vee}+ic_0T_2^{\vee+}\delta\varkappa_1^{\vee+}+ic_0T_1^{\vee+}\delta\varkappa_2^{\vee+}-ic_0S^{\vee+}\delta\tau^{+\vee}\}A_1^+A_2^+d\alpha_1^+d\alpha^+_2-$$

$$-\iint\limits_{S^+}\{q_1^+\delta u^{+\vee}+q_2^+\delta v^{+\vee}+q_n^+\delta w^{+\vee}\}A_1^+A_2^+d\alpha_1^+d\alpha_2^++$$

$$+\iint\limits_{S^-}\{T_1^{\vee-}\delta\varepsilon_2^{\vee-}+T_2^{\vee-}\delta\varepsilon_2^{\vee-}+S^{\vee-}\delta\omega^{-\vee}+ic_0T_2^{\vee-}\delta\varkappa_1^{-\vee}+ic_0T^-_1\delta\varkappa_2^{-\vee}-ic_0S^{\vee-}\delta\tau^{\vee-}\}A_1^--$$

$$-A_2^-d\alpha_1^-d\alpha_2^--\iint\limits_{S^-}\{q_1^-\delta u_2^{\vee}+q_2^-\delta v^{\vee-}+q_n^-\delta w^{\vee-}\}A_1^-A_2^-d\alpha_1^-d\alpha_2^-=0$$

От уравнения (12) последнее уравнение отличается тем, что в нем отсутствуют интегралы по границам областей S^+ и S^- ($\alpha_1^+=\alpha_1^{+0}$, $\alpha_1^-=\alpha_1^{-0}$), отвечающим линии упругого сопряжения l. Как и выше, интегрируя по частям, получим для каждой области свои уравнения Эйлера. Кроме того, на линии сопряжения будет иметь место интегральное условие сопряжения

$$\int\limits_{\alpha_1^+=\alpha_1^{+0}} \{T_1{}^{\vee +}\,\delta u^{+\vee} + \check{T}_{12}{}'^{+}\delta v^{+\vee} + \check{N}_1{}'^{+}\delta w^{+\vee} + \check{M}_1{}^{+}\delta\vartheta^{\vee -+\vee}\}\, A_2{}^{+} d\alpha_2{}^{+} +$$

$$+ \int\limits_{\alpha_1^-=\alpha_1^{-0}} \{\check{T}_1{}^{-}\delta u^{-\vee} + \check{T}_{12}{}'^{+}\delta v^{-\vee} + \check{N}_1{}'^{-}\delta w^{\vee -} + \check{M}_1{}^{-}\delta\vartheta^{\vee -}\} A_2{}^{-} d\alpha_2{}^{-} = 0 \qquad (13)$$

Пусть $\check{\Delta}_x$ и $\check{\Delta}_z$ — составляющие комплексного смещения по некоторым двум взаимно-перпендикулярным направлениям, лежащим в плоскости, перпендикулярной касательной к l (см. фиг. 3):

$$\delta u^{+\vee} = (\mathbf{e}_1{}^{+},\ \mathbf{e}_x{}^{-})\,\delta\check{\Delta}_x + (\mathbf{e}_1{}^{+},\ \mathbf{e}_z)\delta\check{\Delta}_z$$

$$\delta w^{+\vee} = (\mathbf{e}_n{}^{+},\ \mathbf{e}_x{}^{-})\,\delta\check{\Delta}_x + (\mathbf{e}_n{}^{+}, \mathbf{e}_z)\,\delta\check{\Delta}_z$$

$$\delta u^{-\vee} = (\mathbf{e}_1{}^{-},\ \mathbf{e}_x)\,\delta\check{\Delta}_x + (\mathbf{e}_1{}^{-},\ \mathbf{e}_z)\delta\check{\Delta}_z$$

$$\delta w^{-\vee} = (\mathbf{e}_n{}^{-},\ \mathbf{e}_x)\,\delta\check{\Delta}_x + (\mathbf{e}_n{}^{-},\ \mathbf{e}_z)\delta\check{\Delta}_z$$

$$\delta v^{+\vee} = -\,\delta v^{-\vee} = \delta v^{\vee}$$

$$\delta\vartheta^{+\vee} = -\,\delta\vartheta^{-\vee} = \delta\vartheta^{\vee}$$

Подставляя эти соотношения в (13) и учитывая при этом, что $A_2{}^{+}d\alpha_2{}^{+} = A_2{}^{-}d\alpha_2{}^{-} = ds_2$, получим

$$\int\limits_{e} \{(\check{Q}_x{}'^{+} - \check{Q}_x{}'^{-})\,\delta\check{\Delta}_x + (\check{Q}_z{}'^{+} - \check{Q}_z{}'^{-})\,\delta\check{\Delta}_z + (\check{T}_{12}{}'^{+} -$$

$$- \check{T}_{12}{}'^{-})\,\delta v + (\check{M}_1{}^{+} - \check{M}_1{}^{-})\,\delta\vartheta\}\, ds_2 = 0$$

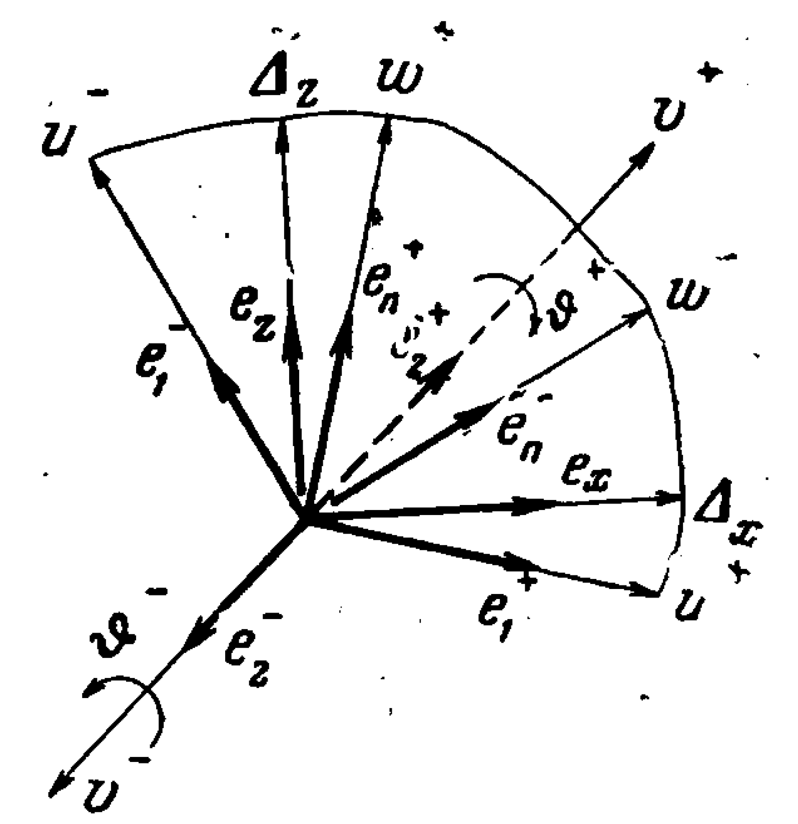
где

$$\check{Q}_x{}'^{+} = (\mathbf{e}_1{}^{+},\ \mathbf{e}_x)\,\check{T}_1{}^{+} + (\mathbf{e}_n{}^{+},\ \mathbf{e}_x)\,\check{N}_1{}'^{+}$$

$$\check{Q}_z{}'^{+} = (\mathbf{e}_1{}^{+},\ \mathbf{e}_z)\,\check{T}_1{}^{+} + (\mathbf{e}_n{}^{+},\ \mathbf{e}_z)\,\check{N}_1{}'^{+}$$

$$-\check{Q}_x{}'^{-} = (\mathbf{e}_1{}^{-},\ \mathbf{e}_x)\,\check{T}_1{}^{-} + (\mathbf{e}_n{}^{-},\ \mathbf{e}_x)\,\check{N}_1{}'^{-}$$

$$-\check{Q}_z{}'^{-} = (\mathbf{e}_1{}^{-},\ \mathbf{e}_z)\,\check{T}_1{}^{-} + (\mathbf{e}_n{}^{-},\ \mathbf{e}_z) N_1{}'^{-\vee}$$



Фиг. 3

В силу произвольности вариаций $\delta\check{\Delta}_x$, $\delta\check{\Delta}_z$, $\delta v^{\vee}$, $\delta\vartheta$ получим естественные комплексные условия сопряжения

$$\check{Q}_x{}'^{+} = \check{Q}_x{}'^{-}, \qquad \check{T}_{12}{}'^{+} = \check{T}_{12}{}'^{-}, \qquad \check{Q}_z{}'^{+} = \check{Q}_z{}'^{-}, \qquad \check{M}_1{}^{+} = \check{M}_1{}^{-} \qquad (14)$$

Иллюстрируем сказанное выше на следующем примере.

Рассмотрим две симметрично нагруженные оболочки вращения одинаковой толщины, сопрягаемые по общему параллельному кругу. В этом случае (см. фиг. 4 и работу [1], стр. 241) (на чертеже 3 и 4 индекс $^{\vee}$ опущен).

$$\alpha_1{}^{+} = \theta, \qquad \alpha_1{}^{-} = -\theta, \qquad \alpha_2{}^{-} = \varphi, \qquad \alpha_2{}^{-} = -\varphi$$

$$A_1{}^{+} = R_1{}^{+} = R_1{}^{+}(\theta), \qquad A_2{}^{+} = (R_2 \sin\theta)^{+} = r(\theta)$$

$$A_1{}^{-} = R_1{}^{-} = R_1{}^{+}(\theta), \qquad A_2{}^{-} = (R_2 \sin\theta)^{-} = r(\theta)$$

Считая, что оболочка не испытывает кручения, получим

$$v^{\vee +} = v^{-\vee} = \check{T}_{12}{}^{+} = \check{T}_{12}{}^{-} = 0$$

Соотношения (14) в данном случае запишутся в виде

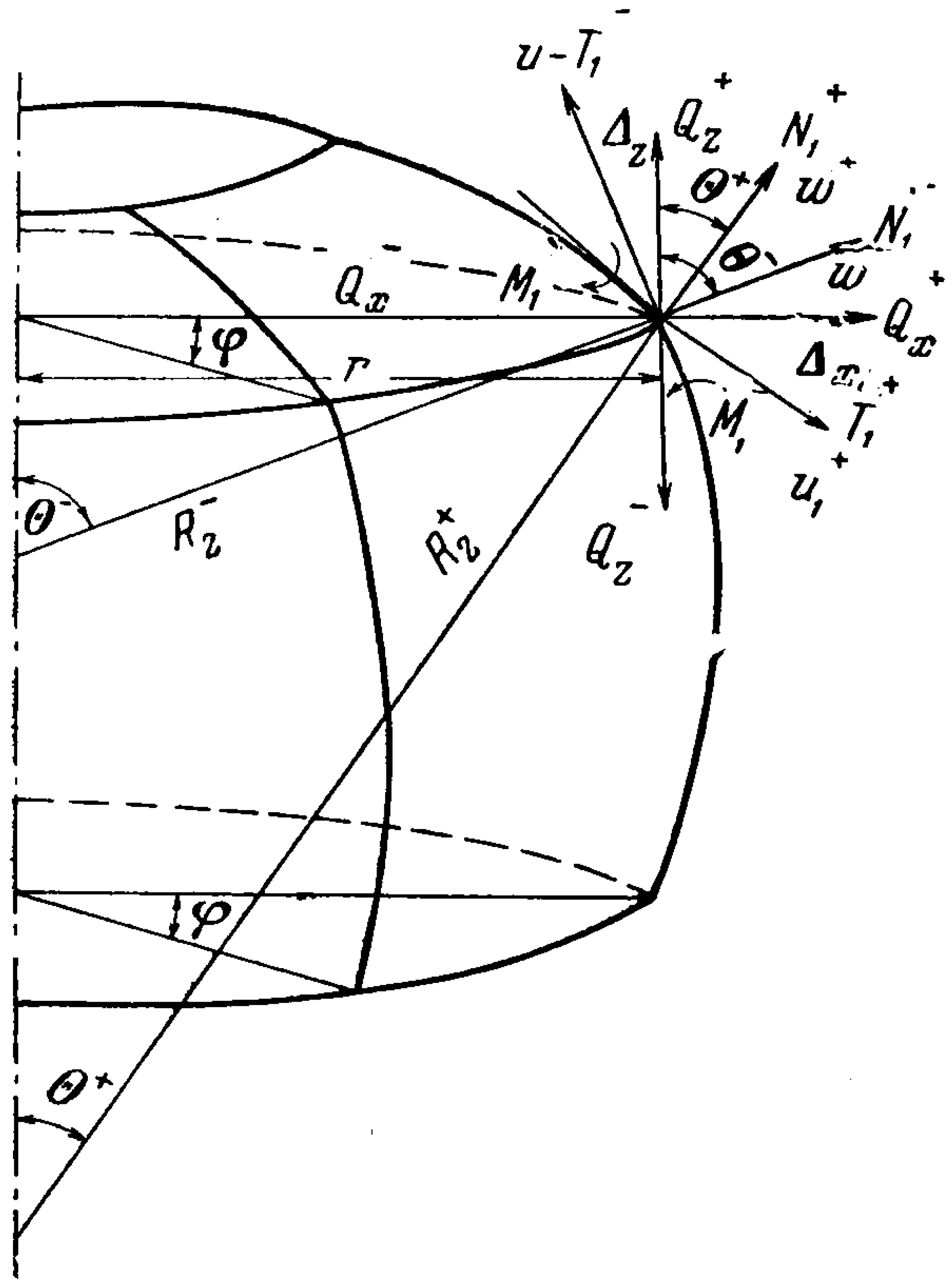
$$\check{Q}_x{}^{+} = \check{Q}_x{}^{-}, \quad \check{Q}_z{}^{+} = \check{Q}_z{}^{-}, \quad \check{M}_1{}^{+} = \check{M}_1{}^{-} \qquad (15)$$

При этом, как видно из фиг. 4:

$$\overset{\vee}{Q}_x{}^+ = \cos\theta^+ \overset{\vee}{T}_1{}^+ + \sin\theta^+ \overset{\vee}{N}_1{}^+, \qquad \overset{\vee}{Q}_x{}^- = \cos\theta^- \overset{\vee}{T}_1{}^- - \sin\theta^- \overset{\vee}{N}_1{}^-$$

$$\overset{\vee}{Q}_z{}^+ = -\sin\theta^+ \overset{\vee}{T}_1{}^+ + \cos\theta^+ \overset{\vee}{N}_1{}^+, \qquad \overset{\vee}{Q}_z{}^- = -\sin\theta^+ \overset{\vee}{T}{}^- - \cos\theta^- \overset{\vee}{N}_1{}^- \tag{16}$$

Отметим, что здесь величина $\overset{\vee}{Q}_z$ отличается знаком от введенной в[1]. Из фиг. 4 видно также, что вещественные части $\overset{\vee}{\Delta}_x$, $\overset{\vee}{\Delta}_z$, $\overset{\vee}{Q}_x$, $\overset{\vee}{Q}_z$ являются в нашем случае соответственно горизонтальным и вертикальным смещениями и усилиями.



Фиг. 4

Выясним статико-геометрический смысл условий (15). Из (3) и (10) находим

$$\varepsilon_2 = \frac{u\cos\theta + w\sin\theta}{R_2\sin\theta} = \frac{\Delta x}{r}, \quad \varkappa_2 = \frac{\cos\theta}{R_2\sin\theta}\vartheta = \frac{\cos\theta}{r}\vartheta, \quad \zeta_2' = \frac{\vartheta}{R^2} = \frac{\sin\theta}{r}\vartheta$$

Отсюда

$$\overset{\vee}{T}_1 = T_1 - iEhc_0\frac{\cos\theta}{r}\vartheta$$

$$\overset{\vee}{N}_1 = N_1 - iEhc_0\frac{\sin\theta}{r}\vartheta, \quad \overset{\vee}{M}_1 = M_1 + iEhc_0\frac{\Delta x}{r}$$

Подставляя первые два из этих соотношений в (16), получим

$$\overset{\vee}{Q}_z = Q_z, \qquad \overset{\vee}{Q}_x = Q_x - iEhc_0\frac{\vartheta}{r}$$

$$M_1 = M_1 + iEhc_0\frac{\Delta x}{r}$$

Так как $h^+ = h^- = h$, из написанных соотношений легко видеть, что условия сопряжения (14) равносильны требованию непрерывности на линии сопряжения пяти вещественных величин: Q_x, Q_z, M_1, Δ_x, ϑ.

Величина Q_z обычно определяется из условия равновесия оболочки в целом; второе и третье комплексные равенства могут быть использованы для определения комплексных постоянных (решений) без разделения их вещественных и мнимых частей.

Условия $\overset{\vee}{Q}_x{}^+ = \overset{\vee}{Q}_x{}^-$, $\overset{\vee}{M}_1{}^+ = \overset{\vee}{M}_1{}^-$, ранее были найдены подбором.

Все сказанное здесь без каких-либо принципиальных затруднений обобщается на случай отличного от нуля коэффициента Пуассона μ и оболочек, срединные поверхности которых имеют границы, не совпадающие с линиями кривизны.

Поступила 28 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ, т. IV, вып. 2, 1940.
3. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории оболочек. ПММ, т. IV, вып. 2, 1940.