Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

С. А. Амбарцумян

(Ереван)

1. Рассмотрим тонкую анизотропную оболочку постоянной толщины h. Пусть материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности оболочки.

За координатную поверхность принимаем срединную поверхность оболочки, которая отнесена к криволинейным ортогональным координатам α и β, совпадающим с линиями главной кривизны координатной поверхности. Пусть γ представляет расстояние по нормали от точки (α, β) срединной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки. Предполагаем:

(а) нормальный к координатной поверхности линейный элемент оболочки после деформации не меняет своей длины;

(б) нормальные напряжения[1] σ_γ малы по сравнению с напряжениями σ_α, σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$;

(в) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки изменяются по закону квадратной параболы [13].

Здесь, будучи более строгими в формулировках гипотез [2,5], предположения (а) и (б) можно сформулировать так:

а) приближенно считаем $e_{\gamma\gamma} = 0$;

б) напряжения σ_γ не оказывают существенного влияния на величины деформаций $e_{\alpha\alpha}$ и $e_{\beta\beta}$ и могут быть пренебрежены в соответствующих уравнениях обобщенного закона Гука.

2. В силу предположения (в) для касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ имеем

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{X^+ - X^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(X^+ + X^-) + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\varphi(\alpha, \beta)$$
$$\tau_{\beta\gamma} = \frac{Y^+ - Y^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(Y^+ + Y^-) + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\psi(\alpha, \beta) \qquad (2.1)$$

где $X^+(\alpha, \beta)$, $Y^+(\alpha, \beta)$ и $X^-(\alpha, \beta)$ и $Y^-(\alpha, \beta)$ — компоненты в осях подвижного трехгранника (по направлениям соответственно положительных касательных к линиям $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$) векторов интенсивности поверхностных нагрузок, приложенных соответственно на внешних поверхностях $\gamma = {}^1/_2 h$ и $\gamma = -{}^1/_2 h$, $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ — неизвестные функции. Подставляя значения касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ из (2.1) в соот-

---

[1] Здесь и в дальнейшем принимаются известные обозначения теории оболочек [1, 2, 3, 4].

ветствующие уравнения обобщенного закона Гука[6], для деформаций сдвига $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ получим

$$\begin{aligned} e_{\alpha\gamma} &= X + \frac{\gamma}{h} X' + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\Phi_1(\alpha,\ \beta) \\ e_{\beta\gamma} &= Y + \frac{\gamma}{h} Y' + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{h^2}{4}\right)\Phi_2(\alpha,\ \beta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\left[a_{55}(X^+ - X^-) + a_{45}(Y^+ - Y^-)\right] \\ Y &= \frac{1}{2}\left[a_{44}(Y^+ - Y^-) + a_{45}(X^+ - X^-)\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} X' &= a_{55}(X^+ + X^-) + a_{45}(Y^+ + Y^-) \\ Y' &= a_{44}(Y^+ + Y^-) + a_{45}(X^+ + X^-) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\Phi_1 = a_{55}\varphi + a_{45}\psi, \qquad \Phi_2 = a_{44}\psi + a_{45}\varphi \tag{2.5}$$

где a_{ik} — упругие постоянные [6].

Из уравнений трехмерной теории упругости для компонент деформаций имеем [1]

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_\beta + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_\gamma \\ e_{\beta\beta} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_\alpha \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$e_{\gamma\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} \tag{2.7}$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{H_1} u_\alpha\right) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{H_2} u_\beta\right) \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} e_{\beta\gamma} &= H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{H_2} u_\beta\right) + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta} u_\gamma \\ e_{\gamma\alpha} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha} u_\gamma + H_1 \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{H_1} u_\alpha\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$H_1 = A(1 + k_1\gamma), \qquad H_2 = B(1 + k_2\gamma) \tag{2.10}$$

$A = A(\alpha,\ \beta)$, $B = B(\alpha,\ \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, $k_1 = k_1(\alpha,\ \beta)$, $k_2 = k_2(\alpha,\ \beta)$ — главные кривизны срединной поверхности, $u_\alpha = u_\alpha(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, $u_\beta = u_\beta(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, $u_\gamma = u_\gamma(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ — компоненты перемещения какой-либо точки $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ оболочки на направления касательных к координатным линиям.

Из (2.7) в силу предположения (а) получим

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} = 0, \quad u_\gamma = u_\gamma(\alpha,\ \beta) = w(\alpha,\ \beta) \tag{2.11}$$

Значит, как и во всех существующих теориях расчета тонких оболочек, перемещение u_γ какой-либо точки оболочки не зависит от координаты γ. Это перемещение для всех точек данного нормального элемента оболочки имеет постоянное значение, равное нормальному перемещению $w = w(\alpha,\ \beta)$ соответствующей точки срединной поверхности оболочки.

Подставляя выражения $e_{\alpha\gamma}$, $e_{\beta\gamma}$, H_1, H_2 и u_γ соответственно из (2.2), (2.10) и (2.11) в уравнения (2.9), получим дифференциальные уравнения относительно компонент перемещений u_α и u_β. Интегрируя эти уравнения и учитывая, что $u_\alpha = u(\alpha, \beta)$ и $u_\beta = v(\alpha, \beta)$ при $\gamma = 0$, получим

$$
\begin{aligned}
u_\alpha &= (1 + k_1\gamma)\,u - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \gamma\left(1 + \gamma\frac{k_1}{2}\right)\frac{h^2}{8}\Phi_1 + \\
&+ \gamma^3\left(1 + \gamma\frac{k_1}{4}\right)\frac{1}{6}\Phi_1 + \gamma\left(1 + \gamma\frac{k_1}{2}\right)X + \gamma^2\left(1 + \gamma\frac{k_1}{3}\right)\frac{1}{2h}X' \\
u_\beta &= (1 + k_2\gamma)\,v - \frac{\gamma}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \gamma\left(1 + \gamma\frac{k_2}{2}\right)\frac{h^2}{8}\Phi_2 + \\
&+ \gamma^3\left(1 + \gamma\frac{k_2}{4}\right)\frac{1}{6}\Phi_2 + \gamma\left(1 + \gamma\frac{k_2}{2}\right)Y + \gamma^2\left(1 + \gamma\frac{k_2}{3}\right)\frac{1}{2h}Y'
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

где $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ — тангенциальные перемещения соответствующей точки срединной поверхности.

При выводе формул (2.12) ограничивались точностью γk_i, т. е. всюду, когда бывало очевидно, отбрасывали $(\gamma k_i)^2$ по сравнению с единицей.

Формулы (2.12) показывают, что в отличие от известных теорий тонких оболочек [1, 2, 5, 7] здесь, как и в работах [8, 9], тангенциальные перемещения u_α и u_β какой-либо точки оболочки, удаленной от срединной поверхности по нормали на расстояние γ, зависят от γ нелинейно.

В силу (2.12) деформации $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$ и $e_{\alpha\beta}$ могут быть представлены в виде многочлена по степеням γ, а именно

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_1 + \gamma\varkappa_1 + \gamma^2\eta_1 + \gamma^3\theta_1 + \gamma^4\xi_1 \\
e_{\beta\beta} &= \varepsilon_2 + \gamma\varkappa_2 + \gamma^2\eta_2 + \gamma^3\theta_2 + \gamma^4\xi_2 \\
e_{\alpha\beta} &= \omega + \gamma\tau + \gamma^2\nu + \gamma^3\lambda + \gamma^4\zeta
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Подставляя значения u_α, u_β, u_γ соответственно из (2.12) и (2.11) в соотношения (2.6) и (2.8) и полученные при этом значения деформаций $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$ и $e_{\alpha\beta}$ сравнивая с соответствующими выражениями (2.13), для коэффициентов разложений получим

$$
\varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}v + k_1 w \tag{2.14}
$$

$$
\varepsilon_2 = \varepsilon_2^\circ = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}u + k_2 w \tag{2.15}
$$

$$
\omega = \omega^\circ = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right) \tag{2.16}
$$

$$
\varkappa_1 = \varkappa_1^\circ - \frac{h^2}{8}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\Phi_2\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}Y \tag{2.17}
$$

$$
\varkappa_2 = \varkappa_2^\circ - \frac{h^2}{8}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\Phi_1\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial Y}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}X \tag{2.18}
$$

$$
\tau = \tau^\circ - \frac{h^2}{8}\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\Phi_1}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\Phi_2}{B}\right)\right] + \left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{X}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{Y}{B}\right)\right] \tag{2.19}
$$

$$\gamma_1 = -k_1\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}u + k_1\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + k_1\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{h^2}{16}\left(k_1\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} - \frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\Phi_1\right) + \frac{h^2}{8}\left(k_1 - \frac{1}{2}k_2\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Phi_2 - \frac{1}{2}\left(k_1\frac{1}{A}\frac{\partial X}{\partial\alpha} - \frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}X\right) - \left(k_1 - \frac{1}{2}k_2\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}Y + \frac{1}{2h}\frac{1}{A}\frac{\partial X'}{\partial\alpha} + \frac{1}{2h}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}Y' \tag{2.20}$$

$$\gamma_2 = -k_2\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}v + k_2\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) + k_2\frac{1}{BA^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{h^2}{16}\left(k_2\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\Phi_2\right) + \frac{h^2}{8}\left(k_2 - \frac{1}{2}k_1\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Phi_1 - \frac{1}{2}\left(k_2\frac{1}{B}\frac{\partial Y}{\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}Y\right) - \left(k_2 - \frac{1}{2}k_1\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}X + \frac{1}{2h}\frac{1}{B}\frac{\partial Y'}{\partial\beta} + \frac{1}{2h}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}X' \tag{2.21}$$

$$\nu = k_2\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) + k_1\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) - k_2\frac{1}{AB^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta} - k_1\frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{h^2}{16}\left[\frac{1}{B}(2k_2 - k_1)\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta} - \frac{1}{B}\left(\frac{\partial k_1}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}k_1\right)\Phi_1\right] + \frac{h^2}{16}\left[\frac{1}{A}(2k_1 - k_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha} - \frac{1}{A}\left(\frac{\partial k_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}k_2\right)\Phi_2\right] + \frac{1}{2B}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(k_1X) - 2k_2\frac{\partial X}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}k_1X\right] + \frac{1}{2A}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(k_2Y) - 2k_1\frac{\partial Y}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}k_2Y\right] + \frac{1}{2h}\left[\frac{1}{B}\left(\frac{\partial X'}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}X'\right) + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y'}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}Y'\right)\right] \tag{2.22}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Phi_2 + \frac{h^2}{16}k_1\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\Phi_1 - \frac{1}{2}k_1\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}X - \frac{1}{3h}\left(k_1\frac{1}{A}\frac{\partial X'}{\partial\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha}X'\right) - \frac{1}{2h}\left(k_1 - \frac{1}{3}k_2\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}Y' \tag{2.23}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{6}\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta} + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Phi_1 + \frac{h^2}{16}k_2\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}\Phi_2 - \frac{1}{2}k_2\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}Y - \frac{1}{3h}\left(k_2\frac{1}{B}\frac{\partial Y'}{\partial\beta} - \frac{1}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial\beta}Y'\right) - \frac{1}{2h}\left(k_2 - \frac{1}{3}k_1\right)\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}X' \tag{2.24}$$

$$\lambda = \frac{1}{6}\frac{1}{B}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta} - \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Phi_1 + \frac{1}{6}\frac{1}{A}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha} - \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Phi_2 + \frac{1}{h}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(k_1X') - \frac{1}{2}k_2\frac{1}{B}\frac{\partial X'}{\partial\beta} + \frac{1}{3}k_1\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}X'\right] + \frac{1}{h}\left[\frac{1}{A}\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial\alpha}(k_2Y') - \frac{1}{2}k_1\frac{1}{A}\frac{\partial Y'}{\partial\alpha} + \frac{1}{3}k_2\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}Y'\right] \tag{2.25}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{24}\frac{1}{A}\frac{\partial k_1}{\partial \alpha}\Phi_1 + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{k_2}{4} - k_1\right)\Phi_2 - \frac{1}{8}\frac{1}{A}k_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \tag{2.26}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{24}\frac{1}{B}\frac{\partial k_2}{\partial \beta}\Phi_2 + \frac{1}{6}\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{k_1}{4} - k_2\right)\Phi_1 - \frac{1}{8}\frac{1}{B}k_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\zeta = \frac{1}{B}\left[\frac{1}{24}\frac{\partial}{\partial \beta}(k_1\Phi_1) - \frac{1}{6}k_2\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \frac{1}{8}\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}k_1\Phi_1\right] + \\ + \frac{1}{A}\left[\frac{1}{24}\frac{\partial}{\partial \alpha}(k_2\Phi_2) - \frac{1}{6}k_1\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{8}\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}k_2\Phi_2\right]\end{aligned} \tag{2.28}$$

В формулах (2.17) — (2.19), как обычно для параметров, характеризующих изменения кривизны и кручение срединной поверхности оболочки, имеем [2,5]

$$\varkappa_1^\circ = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\right) \tag{2.29}$$

$$\varkappa_2^\circ = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}\right) \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\tau^\circ = -\frac{2}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\,\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) + \\ + \frac{2}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}u\right) + \frac{2}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}v\right)\end{aligned} \tag{2.31}$$

Здесь $R_1 = R_1(\alpha, \beta)$, $R_2 = R_2(\alpha, \beta)$ — главные радиусы кривизны срединной поверхности.

Рассматривая разложения (2.13), замечаем, что они внешне похожи на аналогичные разложения, использованные в работе [1], однако здесь мы имеем лишь внешнее сходство. Дело в том, что в работе [1] при определении деформаций $e_{\alpha\alpha}$, $e_{\beta\beta}$ и $e_{\alpha\beta}$ пользуются разложением по степеням γ, одновременно сохраняя гипотезу недеформируемых нормалей [1, 2].

В настоящей же работе, как и в работах [8, 9], соотношения (2.13) получаются в силу исходных предположений предлагаемой теории.

На основании (2.13) и исходного предположения (б) из обобщенного закона Гука для напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$ и $\tau_{\alpha\beta}$ получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha} = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{16}\omega + \gamma(B_{11}\varkappa_1 + B_{12}\varkappa_2 + \\ + B_{16}\tau) + \gamma^2(B_{11}\eta_1 + B_{12}\eta_2 + B_{16}\nu) + \gamma^3(B_{11}\theta_1 + \\ + B_{12}\theta_2 + B_{16}\lambda) + \gamma^4(B_{11}\xi_1 + B_{12}\xi_2 + B_{16}\zeta)\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta\beta} = B_{22}\varepsilon_2 + B_{12}\varepsilon_1 + B_{26}\omega + \gamma(B_{22}\varkappa_2 + B_{12}\varkappa_1 + \\ + B_{26}\tau) + \gamma^2(B_{22}\eta_2 + B_{12}\eta_1 + B_{26}\nu) + \gamma^3(B_{22}\theta_2 + \\ + B_{12}\theta_1 + B_{26}\lambda) + \gamma^4(B_{22}\xi_2 + B_{12}\xi_1 + B_{26}\zeta)\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\beta} = B_{16}\varepsilon_1 + B_{26}\varepsilon_2 + B_{66}\omega + \gamma(B_{16}\varkappa_1 + B_{26}\varkappa_2 + B_{66}\tau) + \\ + \gamma^2(B_{16}\eta_1 + B_{26}\eta_2 + B_{66}\nu) + \gamma^3(B_{16}\theta_1 + B_{26}\theta_2 + B_{66}\lambda) + \\ + \gamma^4(B_{16}\xi_1 + B_{26}\xi_2 + B_{66}\zeta)\end{aligned} \tag{2.34}$$

где постоянные B_{ik} через упругие постоянные a_{ik} выражаются следующим образом [10, 11]:

$$\begin{aligned}B_{11} = \frac{a_{22}a_{66} - a_{26}^2}{\Omega}, \quad B_{12} = \frac{a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}}{\Omega}, \quad B_{16} = \frac{a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16}}{\Omega} \\ B_{22} = \frac{a_{11}a_{66} - a_{16}^2}{\Omega}, \quad B_{66} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Omega}, \quad B_{26} = \frac{a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26}}{\Omega} \\ \Omega = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2\end{aligned} \tag{2.35}$$

Напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$ вызывают внутренние силы (T_1, T_2, S_1, S_2, N_1, N_2) и моменты (M_1, M_2, H), которые должны удовлетворять следующим уравнениям статики [1, 2, 5]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1) - T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}(AS_2) + S_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + ABk_1N_1 = -ABX^* \\
\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2) - T_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}(BS_1) + S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + ABk_2N_2 = -ABY^* \\
-(k_1T_1 + k_2T_2) + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2)\right] = -Z^* \\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(BH) + H\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}(AM_2) - M_1\frac{\partial A}{\partial\beta} - ABN_2 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\beta}(AH) + H\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_1) - M_2\frac{\partial \beta}{\partial\alpha} - ABN_1 = 0 \\
S_1 - S_2 + k_1H - k_2H = 0
\end{gathered} \tag{2.36}$$

Здесь

$$X^* = X^*(\alpha, \beta), \qquad Y^* = Y^*(\alpha, \beta), \qquad Z^* = Z^*(\alpha, \beta)$$

— компоненты вектора интенсивности заданной внешней поверхностной нагрузки, отнесенные к срединной поверхности оболочки [7]:

$$P^* = P^+\left(1 + \frac{h}{2R_1}\right)\left(1 + \frac{h}{2R_2}\right) + P^-\left(1 - \frac{h}{2R_1}\right)\left(1 - \frac{h}{2R_2}\right) \tag{2.37}$$

где под P надо подразумевать X, Y, Z.

Внутренние усилия, входящие в (2.36), определяются обычным способом [1, 2, 10]. Не вдаваясь в подробности, приведем наиболее простые соотношения упругости, которые тождественно удовлетворяют шестому уравнению равновесия:

$$\begin{aligned}
T_1 = C_{11}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) + C_{12}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) + \\
+ C_{16}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
T_2 = C_{22}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) + C_{12}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) + \\
+ C_{26}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
S_1 = C_{16}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) + C_{26}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) + \\
+ C_{66}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right) + k_2\left[C_{16}\left(\frac{h^2}{12}\varkappa_1 + \frac{h^4}{80}\theta_1\right) + C_{26}\left(\frac{h^2}{12}\varkappa_2 + \frac{h^4}{80}\theta_2\right) + \right. \\
\left. + C_{66}\left(\frac{h^2}{12}\tau + \frac{h^4}{80}\lambda\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
S_2 = C_{26}\left(\varepsilon_2 + \frac{h^2}{12}\eta_2 + \frac{h^4}{80}\xi_2\right) + C_{16}\left(\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12}\eta_1 + \frac{h^4}{80}\xi_1\right) + \\
+ C_{66}\left(\omega + \frac{h^2}{12}\lambda + \frac{h^4}{80}\zeta\right) + k_1\left[C_{26}\left(\frac{h^2}{12}\varkappa_2 + \frac{h^4}{80}\theta_2\right) + C_{16}\left(\frac{h^2}{12}\varkappa_1 + \frac{h^4}{80}\theta_1\right) + \right. \\
\left. + C_{66}\left(\frac{h^2}{12}\tau + \frac{h^4}{80}\lambda\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$M_1 = D_{11}\left(\varkappa_1 + \frac{3h^2}{20}\theta_1\right) + D_{12}\left(\varkappa_2 + \frac{3h^2}{20}\theta_2\right) + D_{16}\left(\tau + \frac{3h^2}{20}\lambda\right) \quad (2.42)$$

$$M_2 = D_{22}\left(\varkappa_2 + \frac{3h^2}{20}\theta_2\right) + D_{12}\left(\varkappa_1 + \frac{3h^2}{20}\theta_1\right) + D_{26}\left(\tau + \frac{3h^2}{20}\lambda\right) \quad (2.43)$$

$$\begin{gathered} H_1 = H_2 = H = D_{16}\left(\varkappa_1 + \frac{3h^2}{20}\theta_1\right) + D_{26}\left(\varkappa_2 + \frac{3h^2}{20}\theta_2\right) + \\ + D_{66}\left(\tau + \frac{3h^2}{20}\lambda\right) \end{gathered} \quad (2.44)$$

$$N_1 = \frac{h}{2}(X^+ - X^-) - \frac{h^3}{12}\varphi(\alpha, \beta) \quad (2.45)$$

$$N_2 = \frac{h}{2}(Y^+ - Y^-) - \frac{h^3}{14}\psi(\alpha, \beta) \quad (2.46)$$

В этих формулах для жесткостей растяжения — сжатия (C_{ik}) и изгиба (D_{ik}) имеем

$$C_{ik} = hB_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12}B_{ik} \quad (2.47)$$

Укажем, что во всех соотношениях упругости при подстановке значений $\varepsilon_1 \ldots \zeta$ с достаточно высокой точностью [7] могут быть отброшены все члены, содержащие X и Y.

Из соотношений (2.14) — (2.16), исключая перемещения срединной поверхности u, v, w, при этом используя (2.29), (2.30), получим

$$\begin{gathered} k_2\varkappa_1^\circ + k_1\varkappa_2^\circ + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{A}\left[B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\omega\right]\right\} + \\ + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B}\left[A\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{B}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega\right]\right\} = 0 \end{gathered} \quad (2.48)$$

Уравнение (2.48) является третьим соотношением неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки. Как и следовало ожидать, оно ничем не отличается от соответствующего соотношения классической теории тонких оболочек [2,5]. Остальные два соотношения неразрывности деформаций срединной поверхности в настоящей работе нас не будут интересовать.

Уравнения (2.14) — (2.31), (2,36), (2.38) — (2.46) в своей совокупности составляют полную систему уравнений теории оболочек. Полную систему уравнений, как известно [1,2,5], можно составить различными способами. Ввиду чрезвычайной громоздкости в общем случае произвольной оболочки здесь полная система будет приведена лишь для одного конкретного типа оболочки.

При решении конкретных краевых задач к разрешающим дифференциальным уравнениям оболочки, как обычно, присоединяются граничные условия [1,2,3].

3. Не вдаваясь в подробности, приведем некоторые возможные варианты граничных условий.

Свободный край. Под этим термином будем подразумевать такой край оболочки ($\alpha = \mathrm{const}$), для которого имеем

$$M_1 = 0, \quad H = 0, \quad S_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad N_1 = 0 \quad (3.1)$$

Шарнирно опертый край. Под этим термином будем подразумевать такой край оболочки ($\alpha = \text{const}$), для которого имеем

$$M_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad w = 0, \quad v = 0, \quad B_{11}\theta_1 + B_{12}\theta_2 + B_{16}\lambda = 0 \tag{3.2}$$

Шарнирно закрепленный край. Здесь подразумевается такой край оболочки ($\alpha = \text{const}$), для которого имеем

$$M_1 = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \psi = 0 \tag{3.3}$$

Заделанный край. В этом случае будем подразумевать такой край оболочки ($\alpha = \text{const}$), для которого имеем

$$\begin{gathered} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \psi = 0 \\ \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_1 u + \frac{h^2}{8}\Phi_1 = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Безусловно возможны и другие варианты граничных условий.

Аналогичным образом могут быть выписаны и граничные условия для края $\beta = \text{const}$.

В заключение этого номера укажем, что вопрос граничных условий требует специальных исследований.

Рассматривая результаты, приведенные в первых трех номерах этой работы, замечаем, что в частном случае, когда $a_{44} = 0$, $a_{55} = 0$, $a_{45} = 0$, получаются исходные соотношения и уравнения теории анизотропных оболочек, которая опирается на гипотезу недеформируемых нормалей.

4. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку с радиусом кривизны R. Полагаем, что координатные линии: α—направлены вдоль образующей, β — по дуге поперечного сечения срединной поверхности. Пусть оболочка несет лишь нормально приложенную нагрузку.

Для такой оболочки имеем

$$A = \text{const}, \quad B = \text{const}, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R} \tag{4.1}$$

Для коэффициентов разложений (2.13) имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{R}w, \quad \omega = \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} \varkappa_1 = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{h^2}{8}\frac{1}{A}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \\ \varkappa_2 = -\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{h^2}{8}\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} \tau = -\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2}{R}\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{h^2}{8}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right) \\ \eta_1 = 0, \qquad \eta_2 = \frac{1}{R}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{h^2}{16}\frac{1}{R}\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \\ \nu = \frac{1}{R}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{h^2}{16}\frac{1}{R}\left(2\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right) \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{6A}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha}, \quad \theta_2 = \frac{1}{6B}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta}, \quad \lambda = \frac{1}{6B}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \frac{1}{6A}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \tag{4.5}$$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = -\frac{1}{8B}\frac{1}{R}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta}, \quad \zeta = -\frac{1}{6R}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \frac{1}{4A}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}\right) \tag{4.6}$$

Уравнения равновесия примут вид:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial S_2}{\partial\beta}=0,\qquad \frac{1}{A}\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial M_2}{\partial\beta}-N_2=0$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial S_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{R}N_2=0,\qquad \frac{1}{B}\frac{\partial H}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial\alpha}-N_1=0 \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial N_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial N_2}{\partial\beta}-\frac{1}{R}T_2=-Z$$

Подставляя значения $\varepsilon_1,\ldots,\zeta$ из (4.2) — (4.6) в формулы (2.38) — (2.46), получим значения внутренних усилий, выраженные через искомые функции u, v, w, φ, ψ.

Подставляя полученные значения внутренних усилий в уравнения равновесия (4.7), найдем разрешающую систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций u, v, w и φ, ψ;

$$\nabla_1(C_{ik})u+\nabla_6(C_{ik})v+\left\{C_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+C_{26}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{12}\left[(C_{12}+C_{66})\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}+C_{16}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\right]\right\}\frac{w}{R}+$$
$$+Q_4(C_{ik},a_{ik})\psi+Q_5(C_{ik},a_{ik})\varphi=0 \tag{4.8}$$

$$\nabla_6(C_{ik})u+\nabla_2(C_{ik})v+\left\{C_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{12}\left[C_{22}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}-C_{16}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}+C_{26}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}-C_{66}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right]\right\}\frac{w}{R}+$$
$$+R_4(C_{ik},a_{ik})\psi+R_5(C_{ik},a_{ik})\varphi=0 \tag{4.9}$$

$$\left(C_{12}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+C_{26}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{u}{R}+\left(C_{22}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\frac{v}{R}+$$
$$+\left[C_{22}+\frac{h^2}{12}\left(C_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+C_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\right]\frac{w}{R^2}+$$
$$+P_4(C_{ik},a_{ik})\psi+P_5(C_{ik},a_{ik})\varphi=Z \tag{4.10}$$

$$\left(D_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2D_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+3D_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)\frac{v}{R}-$$
$$-E_2(D_{ik})w-S_4(D_{ik},a_{ik})\psi-S_5(D_{ik},a_{ik})\varphi=0 \tag{4.11}$$

$$\left[D_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2D_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(2D_{66}+D_{12})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\right]\frac{v}{R}-$$
$$-E_1(D_{ik})w-K_4(D_{ik},a_{ik})\psi-K_5(D_{ik},a_{ik})\varphi=0 \tag{4.12}$$

где введены следующие обозначения:

$$\nabla_1(C_{ik})=C_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+C_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2C_{16}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\nabla_2(C_{ik})=C_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+C_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2C_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\nabla_6(C_{ik})=C_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+C_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

$$E_1(D_{ik})=D_{11}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}+3D_{16}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta}+$$
$$+(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}+D_{26}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}$$

$$E_2(D_{ik}) = D_{22}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + 3D_{26}\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial\beta^2\partial\alpha} + (D_{12}+2D_{66})\frac{1}{BA^2}\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2} + D_{16}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}$$

$$P_i(C_{ik}, a_{ik}) = \left[(i-4)\frac{h^3}{12} - C_{26}\frac{3h^4}{640R^2}a_{4i}\right]\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \left[\frac{h^4}{120R^2}\left(\frac{7}{16}C_{22}a_{4i} + C_{26}a_{i5}\right) - (i-5)\frac{h^3}{12}\right]\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

$$R_i(C_{ik}, a_{ik}) = (i-5)\frac{h^3}{12R} + \frac{h^4}{120R}\left[\left(\frac{7}{16}C_{22}a_{4i} + C_{26}a_{i5}\right)\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{9}{8}C_{26}a_{4i}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} - \left(\frac{25}{16}C_{66}a_{4i} + C_{16}a_{i5}\right)\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right]$$

$$Q_i(C_{ik}, a_{ik}) = \frac{h^4}{120R}\left[\left(\frac{7}{16}C_{12}a_{4i} - \frac{9}{16}C_{66}a_{4i} + C_{16}a_{i5}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{9}{16}C_{16}a_{4i}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{7}{16}C_{26}a_{4i} + C_{66}a_{i5}\right)\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]$$

$$S_i(D_{ik}, a_{ik}) = \frac{h^2}{10}\left[(D_{16}a_{i5} + D_{66}a_{4i})\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + (2D_{26}a_{4i} + D_{66}a_{i5} + D_{12}a_{i5})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} + (D_{22}a_{4i} + D_{26}a_{i5})\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right] - (i-5)\frac{h^3}{12}$$

$$K_i(D_{ik}, a_{ik}) = \frac{h^2}{10}\left[(D_{11}a_{i5} + D_{16}a_{4i})\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + (2D_{16}a_{i5} + D_{66}a_{4i} + D_{12}a_{4i})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} + (D_{26}a_{4i} + D_{66}a_{i5})\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right] + (i-4)\frac{h^3}{12}$$

Таким образом, задача расчета анизотропной цилиндрической оболочки свелась к решению системы пяти дифференциальных уравнений (4.8)—(4.12) относительно пяти искомых функций. Имея значения u, v, w, φ, ψ, при помощи формул (2.32) — (2.34), (2.38) — (2.46) и (4.2) — (4.6) нетрудно найти значения внутренних усилий и напряжений.

Система уравнений (4.8) — (4.12) существенно упрощается в случае трансверсально изотропной оболочки [10]. Как известно, для трансверсально изотропного тела имеем

$$a_{16} = 0, \quad a_{26} = 0, \quad a_{45} = a_{54} = 0, \quad a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G'}$$
$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad B_{12} = \mu B_{11}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4.13}$$

где E — модуль упругости в плоскости изотропии, μ — коэффициент Пуассона, G' — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

Считаем, что плоскость изотропии материала в каждой точке оболочки параллельна срединной поверхности оболочки.

Координаты α, β выбираются так, чтобы коэффициенты первой квадратичной формы имели следующие значения [1,2] :

$$A = 1, \quad B = R \tag{4.14}$$

В силу (4.13) и (4.14) система разрешающих уравнений упрощается и принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\mu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{(1+\mu)h^2}{24R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}+$$
$$+\frac{23\mu-9}{3840}\frac{h^4}{R^2}a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{1-\mu}{240}\frac{h^4}{R^3}a_{44}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}=0 \tag{4.15}$$

$$\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{h^2}{12R^4}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}-$$
$$-\frac{(1-\mu)h^2}{24R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}+\frac{7h^4}{1920R^3}a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}-\frac{5(1-\mu)h^4}{768R}a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}-$$
$$-\frac{(1-\mu^2)h^2}{12ER}\psi=0 \tag{4.16}$$

$$\frac{\mu}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{w}{R^2}+\frac{h^2}{12R^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{7h^4}{1920R^3}a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+$$
$$+\frac{(1-\mu^2)h^2}{12ER}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{(1-\mu^2)h^2}{12E}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\frac{1-\mu^2}{Eh}Z \tag{4.17}$$

$$\frac{1-\mu}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R^3}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}-\frac{1}{R^3}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\frac{1-\mu^2}{E}\psi-$$
$$-\frac{h^2}{10}a_{44}\left(\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)=0 \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}-\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}-$$
$$-\frac{h^2}{10}a_{44}\left(\frac{1+\mu}{2R}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}\right)+\frac{1-\mu^2}{E}\varphi=0 \tag{4.19}$$

Для примера рассмотрим задачу горизонтальной трубы, свободно опертой по торцам и изготовленной из трансверсально изотропного материала. Труба целиком наполнена жидкостью удельным весом γ. Собственным весом материала трубы пренебрегаем [7,12].

Отсчитывая угол β от нижней точки трубы, принимаем

$$u=\sum_m\sum_n A_{mn}\cos n\beta\cos\frac{m\pi\alpha}{l},\qquad \varphi=\sum_m\sum_n D_{mn}\cos n\beta\cos\frac{m\pi\alpha}{l}$$
$$v=\sum_m\sum_n B_{mn}\sin n\beta\sin\frac{m\pi\alpha}{l},\qquad \psi=\sum_m\sum_n E_{mn}\sin n\beta\sin\frac{m\pi\alpha}{l} \tag{4.20}$$
$$w=\sum_m\sum_n C_{mn}\cos n\beta\sin\frac{m\pi\alpha}{l},$$

Выбранные искомые функции удовлетворяют условиям опирания по торцам $\alpha=0$, $\alpha=l$ и условиям периодичности с периодом 2π по переменной β. Действующая нагрузка (радиально направленное давление жидкости)

$$q=R\gamma(1+\cos\beta) \tag{4.21}$$

может быть представлена в виде двойного ряда:

$$Z=\sum_m\sum_n q_{mn}\cos n\beta\sin\frac{m\pi\alpha}{l} \tag{4.22}$$

при этом для коэффициентов q_{mn} имеем [7,12]

$$q_{mn}=0,\quad q_{m0}=\frac{4\gamma R}{m\pi},\quad q_{m1}=\frac{4\gamma R}{m\pi} \tag{4.23}$$

Ввиду быстрой сходимости рядов по $m=1,3,5$, в дальнейшем будем ограничиваться лишь первым членом разложения.

Подставляя значения u, v, w, φ, ψ из (4.20), а значения из z (4.22) в соответствующие уравнения системы (4.15) — (4.19), для каждой пары значений m и n получим систему пяти уравнений относительно пяти искомых коэффициентов A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}. E_{mn}. В частном случае, когда $n=0$, эти системы существенно упрощаются.

Рассмотрим численный пример, приведенный в работах [7,12]; пусть $a = 50$ *см*, $l = 25$ *см*, $h = 7$ *см*, $\mu = 0.3$. При этих размерах рассмотрим три случая, когда отношение E к G', E / G' равны соответственно 2.6, 5.0 и 10.

В случае $E / G' = 2.6$, как нетрудно заметить, имеем изотропную оболочку, а во втором и третьем случаях имеем трансверсально изотропные оболочки.

Значение коэффициентов C_{mn} нормального перемещения оболочки в виде отношений C_{mn} / N, где $N = 24\gamma R^3 l^2 / E\pi h$, даны в табл. 1. В последнем столбце приведены значения коэффициентов максимального нормального перемещения, т. е. значения коэффициентов при w в точке $\beta = 0$, $\alpha = {}^1/_2 l$.

Для сравнения в первой строчке табл. 1 приведены значения тех же коэффициентов C_{mn} / N, где $N = 24\gamma R^3 l^2 / E\pi h$, подсчитанные при помощи теории, опирающейся на гипотезу недеформируемых нормалей[7,12].

Таблица

$\frac{E}{G'}$	$\frac{10^4}{N} C_{01}$	$\frac{10^4}{N} C_{11}$	$\frac{10^4}{N} C$
	0.7022	0.6708	1.3730
2.6	0.8103	0.8004	1.6107
5.0	0.9000	0.9138	1.8138
10.0	1.0616	1.0275	2.0891

Рассматривая таблицу, замечаем, что результаты, полученные на основании теории, построенной на базе гипотезы недеформируемых нормалей, существенным образом отличаются от результатов, полученных на основании предлагаемой теории. Как видно, даже в случае изотропной оболочки погрешность классической теории (теории, которая опирается на гипотезу недеформируемых нормалей) доходит до 15%. В случае же трансверсально изотропных оболочек в зависимости от отношения E / G' эта погрешность для рассматриваемого примера оболочки может быть существенной. Например, при $E / C' = 10$ погрешность доходит до 35%.

Поступила 13 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
3. Амбарцумян С. А. Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Известия АН Арм. ССР, серия ФМЕиТ наук, т. IV, № 5, 1951.
4. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН Арм. ССР, серия ФМЕиТ наук, т. VI, № 3, 1953.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951,
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
7. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
8. Амбарцумян С. А. К расчету двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1957.
9. Амбарцумян С. А. О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН Арм.ССР, серия ФМ наук, т. X, № 2, 1957.
10. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947.
11. Амбарцумян. С. А. К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, т. XII, № 1, 1948.
12. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
13. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1958.