Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОБТЕКАНИИ ПРОНИЦАЕМЫХ КОНТУРОВ

М. В. Третьяков

(Новосибирск)

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу обтекания произвольного гладкого замкнутого равномерно проницаемого контура потенциальным потоком идеальной жидкости. Задачу будем решать при предположениях, сформулированных Х. А. Рахматулиным [1]:

1. В каждой точке контура нормальная составляющая скорости потока разрыва не терпит; касательная же составляющая терпит разрыв; следовательно, проницаемый контур является линией разрыва скоростей и давлений.

2. Течение при обтекании считаем установившимся и безвихревым.

3. Контур равномерно проницаем, и в каждой точке контура перепад давления Δp и скорость проницания $v_i{}^\circ$ частиц жидкости через контур связаны законом:

$$\Delta p = a v_i{}^\circ \tag{1.1}$$

где a — параметр проницаемости материала контура, устанавливаемый экспериментально. Сформулируем граничные условия задачи.

1. Согласно первому основному предположению в каждой точке проницаемого контура нормальная составляющая $v_{n1}{}^\circ$ скорости наружной части потока равна нормальной составляющей $v_{n2}{}^\circ$ скорости внутренней части потока, т. е.

$$v_{n1}{}^\circ = v_{n2}{}^\circ \tag{1.2}$$

Для дальнейшего условимся индексом 1 обозначать величины, относящиеся к наружной части, индексом 2 — к внутренней части потока.

2. Из второго основного предположения следует, что для обтекающего контур потока справедливо уравнение Бернулли — Эйлера. Согласно этому уравнению и согласно первому граничному условию (1.2), для перепада давления Δp в точках контура получим

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left(v_{\tau 2}{}^\circ + v_{\tau 1}{}^\circ\right)\left(v_{\tau 2}{}^\circ - v_{\tau 1}{}^\circ\right)$$

где $v_{\tau 1}$ и $v_{\tau 2}$ — касательные составляющие скорости в точке контура потока. Принимая во внимание (1.1), получим второе граничное условие:

$$\frac{\rho}{2}\left(v_{\tau 2}{}^\circ + v_{\tau 1}{}^\circ\right)\left(v_{\tau 2}{}^\circ - v_{\tau 1}{}^\circ\right) = a v_i{}^\circ \tag{1.3}$$

Для решения заменим проницаемый контур вихревым слоем, плотность которого подберем так, чтобы выполнялись граничные условия.

Итак, пусть L (см. фигуру) есть равномерно проницаемый гладкий контур.

Обозначим через $\gamma = \gamma(s)$ плотность вихревого слоя, рассматриваемую как функцию дуговой координаты s на контуре L. Пусть функции

$$x = x(s), \qquad y = y(s) \tag{1.4}$$

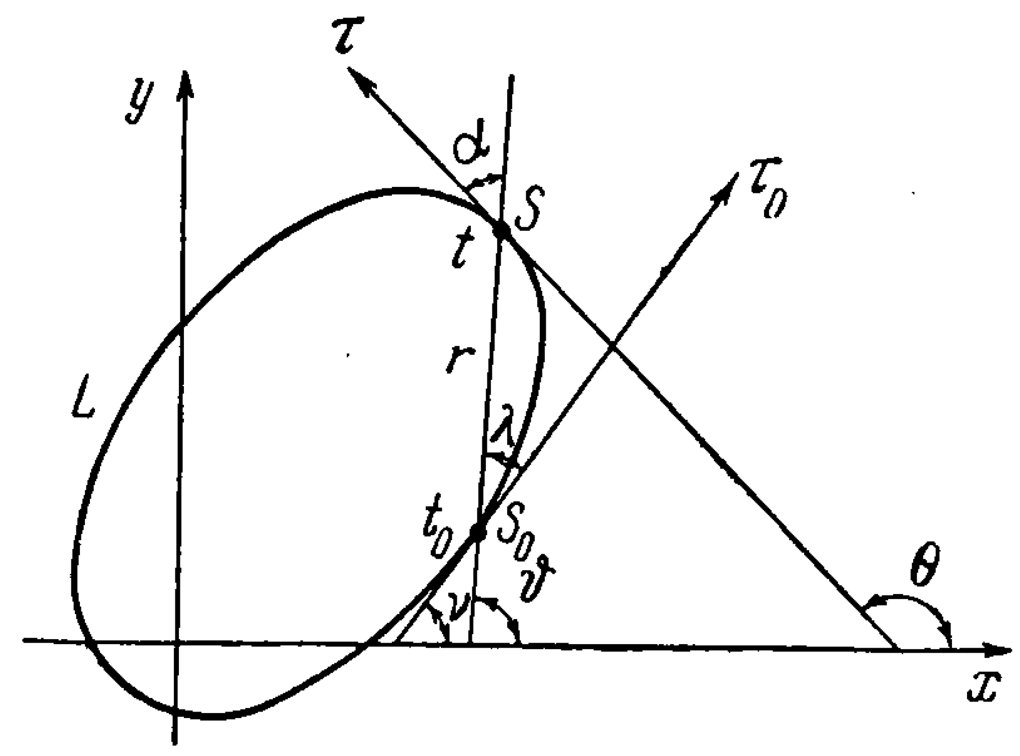
есть параметрические уравнения нашего контура.

Обозначим через s_0 и s дуговые, а через t_0 и t соответствующие комплексные координаты неподвижной и подвижной точек нашего контура. Сами точки в дальнейшем мы будем называть их соответствующими координатами.

За положительное направление обхода на L берем обход в ту сторону, чтобы область, ограниченная контуром L, оставалась слева.

Обозначим через ν и θ углы, образованные с осью x, касательными к контуру в точках t_0 и t, а через ϑ — угол, составляемый с осью x хордой, проходящей через эти точки.

Если ds — длина элемента дуги контура, то интенсивность вихрей на этом элементе будет $\gamma(s)\,ds$. Тогда комплексная скорость в некоторой точке z, индуцируемая вихревым слоем, распределенным по контуру, будет



$$(v_x{}^\circ - iv_y{}^\circ)_b = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\,ds}{z-t}$$

Учитывая, что $ds = e^{-i\theta}dt$, получим:

$$(v_x{}^\circ - iv_y{}^\circ)_b = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\,e^{-i\theta}}{t-z}dt \qquad (1.5)$$

Справа стоит интеграл типа Коши для функции $\gamma(s)\,e^{-i\theta}$, которая М. А. Лаврентьевым [1] названа «вихревой функцией».

Найдем предельные значения комплексной скорости в точке t_0 контура, соответственно обозначая предельные ее значения при подходе со стороны положительного направления нормали индексом плюс, а при подходе со стороны отрицательного направления нормали индексом минус.

Согласно формулам Сохоцкого — Племеля для предельных значений интеграла типа Коши получим:

$$\begin{aligned}(v_x{}^\circ - i\,v_y{}^\circ)_{b_+} &= -\left[\frac{\gamma(s_0)}{2}e^{-i\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\,e^{-i\theta}}{t-t_0}dt\right]\\ (v_x{}^\circ - i\,v_y{}^\circ)_{b_-} &= -\left[-\frac{\gamma(s_0)}{2}e^{-i\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\,e^{-i\theta}}{t-t_0}dt\right]\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Преобразуем входящий сюда интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\,e^{-i\theta}}{t-t_0}dt \qquad (1.7)$$

Логарифмируя и дифференцируя равенство $t - t_0 = re^{i\vartheta}$, получим:

$$\frac{dt}{t-t_0} = \frac{dr}{r} + id\vartheta \qquad (1.8)$$

Непосредственно из фигуры имеем:

$$\cos\vartheta = \frac{x(s)-x(s_0)}{r}, \qquad \sin\vartheta = \frac{y(s)-y(s_0)}{r}$$

$$\frac{dx(s)}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy(s)}{ds} = \sin\theta, \quad \frac{dx(s_0)}{ds_0} = \cos\nu, \quad \frac{dy(s_0)}{ds_0} = \sin\nu \qquad (1.9)$$

Кроме того

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y(s)-y(s_0)}{x(s)-x(s_0)} \qquad (1.10)$$

Отсюда, учитывая равенства (1.9), получим:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\alpha}{r} \qquad (\alpha = \theta - \vartheta) \tag{1.11}$$

Следовательно, имеем

$$dr = \frac{dr}{ds}ds = \cos\alpha ds, \qquad d\vartheta = \frac{d\vartheta}{ds}ds = \frac{\sin\alpha}{r}ds$$

Подставляя это в равенство (1.8), получим:

$$\frac{dt}{t - t_0} = \frac{e^{i\alpha}}{r}ds$$

и интеграл (1.7) запишется так:

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\gamma(s)\, e^{-i\vartheta}}{r}ds$$

Подставляя его в равенства (1.6) и приравнивая действительные части и коэффициенты при мнимых частях этих равенств, будем иметь:

$$\begin{aligned}
(v_x{}^\circ)_{b_+} &= -\frac{\gamma(s_0)}{2}\cos\nu + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\vartheta}{r}ds \\
(v_y{}^\circ)_{b_+} &= -\frac{\gamma(s_0)}{2}\sin\nu - \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\cos\vartheta}{r}ds \\
(v_x{}^\circ)_{b_-} &= \frac{\gamma(s_0)}{2}\cos\nu + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\vartheta}{r}ds \\
(v_y{}^\circ)_{b_-} &= \frac{\gamma(s_0)}{2}\sin\nu - \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\cos\vartheta}{r}ds
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Воспользуемся выражениями нормальной и касательной составляющих скорости потока в точке контура через составляющие по осям:

$$v_\tau{}^\circ = v_x{}^\circ\cos\nu + v_y{}^\circ\sin\nu, \qquad v_n{}^\circ = -v_x{}^\circ\sin\nu + v_y{}^\circ\cos\nu \tag{1.13}$$

Тогда, согласно (1.12), полагая $\lambda = \vartheta - \nu$, получим:

$$(v_\tau{}^\circ)_{b_+} = -\frac{\gamma(s_0)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}ds, \qquad (v_n{}^\circ)_{b_+} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\cos\lambda}{r}ds \tag{1.14}$$

$$(v_\tau{}^\circ)_{b_-} = \frac{\gamma(s_0)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}ds, \qquad (v_n{}^\circ)_{b_-} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\cos\lambda}{r}ds \tag{1.15}$$

Нормальная v_n и касательная v_τ составляющие скорости от набегающего потока в каждой точке контура разрыва не терпят и, следовательно, как для внешней части потока, так и для внутренней его части, выразятся формулами:

$$v_\tau = v_\infty\cos\nu, \qquad v_n = -v_\infty\sin\nu \tag{1.16}$$

Сравнивая вторые из равенств (1.14) и (1.15) и учитывая только что сказанное относительно составляющих от набегающего потока, приходим к выводу, что первое граничное условие задачи (1.2) выполняется.

Из первых равенств формул (1.14), (1.15) и (1.16) получаем:

$$v_{\tau 1}{}^\circ = (v_\tau{}^\circ)_{b_-} + v_\tau = \frac{\gamma(s_0)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}ds + v_\infty\cos\nu$$

$$v_{\tau 2}{}^\circ = (v_\tau{}^\circ)_{b_+} + v_\tau = -\frac{\gamma(s_0)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}ds + v_\infty\cos\nu$$

Из вторых равенств формул (1.15) и (1.16) получаем:

$$v_i^\circ = (v_n^\circ)_b + v_n = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\cos\lambda}{r}\,ds - v_\infty \sin\nu$$

Подставляя найденные выражения для компонент скорости изучаемого потока во второе граничное условие (1.3) нашей задачи, получим:

$$\gamma(s_0)\rho\left(v_\infty\cos\nu + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}\,ds\right) - \frac{a}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\cos\lambda}{r}\,ds = av_\infty\sin\nu \qquad (1.17)$$

Это есть сингулярное интегральное уравнение для определения соответствующей функции $\gamma(s_0)$ плотности вихревого слоя в нашей задаче.

С ростом плотности проницаемого контура параметр проницаемости a возрастает. Для плотного контура $a=\infty$. При $a \to \infty$ уравнение (1.17) обратится в уравнение:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\cos\lambda}{r}\,ds = -v_\infty\sin\nu \qquad (1.18)$$

полученное М. А. Лаврентьевым [1], и решающее задачу обтекания замкнутого плотного контура потенциальным потоком.

2. Метод решения основного уравнения (1.17). Дифференцируя равенство (1.10) по s_0 и учитывая равенства (1.9), получим:

$$\frac{d\vartheta}{ds_0} = \frac{\sin\lambda}{r} \qquad (2.1)$$

Кроме того,

$$\frac{d\ln r}{ds_0} = \frac{1}{r}\frac{dr}{ds_0} = \frac{1}{r}\cos\sigma = -\frac{\cos\lambda}{r}$$

С другой стороны

$$r = (t-t_0)\,e^{-i\vartheta}, \qquad \frac{d\ln r}{ds_0} = -\frac{dt_0/ds_0}{t-t_0} - i\frac{d\vartheta}{ds_0} = -\frac{e^{i\nu}}{t-t_0} - i\frac{d\vartheta}{ds_0}$$

Следовательно

$$\frac{\cos\lambda}{r} = \frac{e^{i\nu}}{t-t_0} + i\frac{d\vartheta}{ds_0} \qquad (2.2)$$

На основании равенств (2.1) и (2.2), уравнение (1.17) запишется так:

$$\gamma(s_0)\,\rho\left(v_\infty\cos\nu + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{d\vartheta}{ds_0}\,ds\right) - \frac{ae^{i\nu}}{2\pi}\int\limits_L \frac{\gamma(t)\,e^{-i\theta}}{t-t_0}\,dt =$$

$$= av_\infty\sin\nu + \frac{ai}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{d\vartheta}{ds_0}\,ds \qquad (2.3)$$

Так как ds и ds_0 на одном и том же контуре L будут эквивалентными, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{d\vartheta}{ds_0}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma\,[s(\vartheta)]\,d\vartheta = K = \text{const} \qquad (2.4)$$

Далее, циркуляция скорости Γ потока вокруг контура будет равна:

$$\Gamma = \int\limits_L \left(v_{x1}^\circ\frac{dx}{ds_0} + v_{y1}^\circ\frac{dy}{ds_0}\right)ds_0$$

Причем, очевидно,

$$v_{x1}^\circ = (v_x^\circ)_{b_-} + v_x, \qquad v_{y1}^\circ = (v_y^\circ)_{b_-} + v_y \qquad (v_x = v_\infty,\ \ v_y = 0)$$

Тогда, согласно последним двум из равенств (1.12) и последнему из (1.9), получим:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int\limits_L \gamma(s_0)\,ds_0 + v_\infty \int\limits_L \cos\nu\, ds_0 + \int\limits_L \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}\,ds\right] ds_0 \tag{2.5}$$

На основании равенств (2.1), (2.4) и очевидных равенств:

$$\frac{1}{2}\int\limits_L \gamma(s_0)\,ds_0 = Q = \mathrm{const}, \qquad \int\limits_L \cos\nu ds = 0 \tag{2.6}$$

получим:

$$\Gamma = Q + Kl \tag{2.7}$$

где l — длина контура L.

Из выражений (2.4) и (2.6) для величин K и Q следует, что они одного знака, и в нуль будут обращаться одновременно. Следовательно, постоянная K непосредственно связана с циркуляцией Γ вокруг контура равенством (2.7) и обращается в нуль при $\Gamma = 0$.

Так как значение циркуляции Γ при обтекании гладких замкнутых контуров может быть задано произвольно, то мы можем задавать произвольно постоянную величину K, определив затем по формуле (2.7) соответствующее значение циркуляции Γ.

Теперь, учитывая (2.4), уравнение (2.3) запишется так:

$$\gamma(t_0)\,\rho\,(v_\infty \cos\nu + K) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \gamma(t)\frac{(-i)\,ae^{-i(\theta-\nu)}}{2(t-t_0)}\,dt = av_\infty \sin\nu + iaK \tag{2.8}$$

Для этого уравнения имеем:

$$A(t) = \rho\,(v_\infty \cos\theta + K), \qquad K(t_0,\ t) = -\frac{a}{2}e^{-i(\theta-\nu)}$$

функции $A(t)$ и $K(t_0,\ t)$ удовлетворяют условию H (Гёльдера) на контуре L

$$B(t) = K(t,\ t) = -\frac{1}{2}ai$$

$$S(t) = A(t) + B(t) = \rho\,(v_\infty\cos\theta + K) - \frac{1}{2}ai \neq 0 \text{ на } L$$

$$D(t) = A(t) - B(t) = \rho\,(v_\infty\cos\theta + K) + \frac{1}{2}ai \neq 0 \text{ на } L$$

Следовательно, по терминологии Н. И. Мусхелишвили [2], уравнение (2.8) есть сингулярное интегральное уравнение нормального типа. Индекс этого уравнения

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{\rho\,(v_\infty\cos\theta + K) + {}^1/_2\, ia}{\rho\,(v_\infty\cos\theta + K) - {}^1/_2\, ia}\right]_L = 0$$

Следовательно, уравнение (2.8), по той же терминологии, будет квази-фредгольмовым уравнением и может быть решено методом регуляризации.

В качестве регуляризующего оператора для уравнения (2.8) может быть взят, например, оператор:

$$M\Psi \equiv \rho\,(v_\infty\cos\nu + K)\,\Psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{-{}^1/_2\, ia\Psi(t)}{t-t_0}\,dt$$

причем, уравнение Фредгольма, полученное после применения этого оператора к обеим частям уравнения (2.8), будет эквивалентно уравнению (2.8). Можно также регуляризацию уравнения (2.8) провести методом Карлемана — Векуа.

При изучении бесциркуляционного обтекания равномерно проницаемого гладкого контура потенциальным потоком все приведенные выше рассуждения остаются в силе, только нужно считать $k = 0$.

В качестве примера рассмотрим задачу обтекания потенциальным потоком равномерно проницаемой окружности радиуса R. В этом случае непосредственно из чертежа, считая, что центр окружности лежит в начале осей координат, а φ и φ_0 есть центральные углы точек s и s_0, имеем

$$\cos\nu = -\sin\varphi_0, \qquad \sin\nu = \cos\varphi_0, \qquad \lambda = \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \qquad r = 2R\sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2}$$

$$ds = Rd\varphi, \quad \frac{\cos\lambda}{r}ds = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \varphi_0}{2}d\varphi, \quad \frac{\sin\lambda}{r}ds = \frac{1}{2}d\varphi$$

Тогда значение K, определяемое интегралом (2.4), будет равно:

$$\frac{1}{2\pi}\int_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(\varphi)\,d\varphi = K_0$$

и основное уравнение (1.17) (или, аналогично, уравнение (2.8)) после замены переменных, запишется:

$$\gamma(\varphi_0)\rho(v_\infty\sin\varphi_0 - K_0) + \frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \varphi_0}{2}d\varphi = -av_\infty\cos\varphi_0 \tag{2.9}$$

Применяя к обеим частям этого сингулярного уравнения регуляризующий оператор:

$$M\Psi \equiv \rho(v_\infty\sin\varphi_0 - K_0)\Psi(\varphi_0) - \frac{{}^1\!/_2 a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \varphi_0}{2}d\varphi$$

получим уравнение Фредгольма, единственное решение которого будет:

$$\gamma(\varphi_0) = -\frac{4a\rho v_\infty^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + 2a^2(v_\infty\sin\varphi_0 - K_0)}{4\rho^2(v_\infty\sin\varphi_0 - K_0)^2 + a^2} \tag{2.10}$$

Эта функция и решает задачу обтекания равномерно проницаемой окружности потенциальным потоком.

При $a \to \infty$ в пределе уравнение (2.9) переходит в уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi - \varphi_0}{2}d\varphi = -v_\infty\cos\varphi_0 \tag{2.11}$$

решение которого

$$\gamma(\varphi_0) = -2v_\infty\sin\varphi_0 + C \tag{2.12}$$

есть функция, решающая задачу обтекания плотной окружности потенциальным потоком. Причем, при обтекании плотной окружности потоком с циркуляцией, как следует из (2.10) при предельном переходе, нужно полагать $C = 2K_0$, а при бесциркуляционном обтекании считать $C = 0$.

Поступила 25 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. Труды ЦАГИ, № 118, 1932.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
3. Рахматулин Х. А. Обтекание проницаемого тела. Вестник Московского университета, № 3, 1950.