

ОБТЕКАНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ С ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

О. М. Белоцерковский

(Москва)

Задача обтекания тел с отошедшей ударной волной рассматривалась многими авторами, но в большинстве работ лишь в приближенной постановке.

В работах ^[1,2] и др.) решение данной задачи представлялось в виде рядов. Однако этот метод позволяет исследовать лишь небольшую область течения в окрестности оси симметрии или в окрестности критической точки тела. Используя плоскость годографа для вихревых потоков, удалось рассмотреть только такие случаи, когда число Маха набегающего потока близко к единице (А. Буземанн ^[3] и др.). Японские ученые К. Тамада ^[4] и К. Хида ^[5] решают данную задачу, делая априорные предположения о форме ударной волны или полагая, что за волной жидкость несжимаема. С. Юхида и М. Исухара ^[6] предлагают полуграфический приближенный метод расчета течения за криволинейной ударной волной, а А. Митчелл ^[7], задаваясь из эксперимента формой и положением ударной волны, рассчитывает методом сеток поток вокруг тела с плоским носом.

Ниже задача решается численно при помощи метода интегральных соотношений, предложенного А. А. Дородницыным ^[8]. Этот метод сводит интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к численному решению некоторой аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При использовании электронных счетных машин метод интегральных соотношений дает возможность получить окончательные результаты с нужной степенью точности для задачи в точной постановке.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание с отошедшей ударной волной плоского тела произвольной формы (профиля), обладающего осью симметрии. Пусть плоскопараллельный сверхзвуковой поток ($M_\infty > 1$) идеального газа набегаает под нулевым углом атаки с постоянной скоростью w_∞ на такое тело. Перед телом возникает ударная волна, форма и положение которой заранее неизвестны. Требуется произвести расчет смешанного вихревого течения сжимаемого газа в минимальной области влияния, т. е. в области, ограниченной ударной волной, осью симметрии, контуром тела и первой граничной характеристикой (или характеристиками), проходящей между волной и телом.

Введем безразмерные величины, относя скорость к максимальной скорости, давление и плотность — к давлению и плотности торможения до ударной волны, линейные размеры — к характерному размеру тела; тогда уравнения движения, неразрывности и энергии (условие адиабатичности) имеем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{w} \times \mathbf{w} + \frac{\nabla w^2}{2} + \frac{\nabla(kp)}{\rho} = 0 & \quad \left(k = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \right) \\ \nabla(\rho \mathbf{w}) = 0, & \quad \mathbf{w} \nabla \frac{p}{\rho^\kappa} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где w , p , ρ — скорость, давление и плотность за ударной волной, κ — показатель адиабаты (для воздуха $\kappa = 1.40$).

Запишем систему (1.1) в полярных координатах r , ϑ (фиг. 1) и введем вместо одного из уравнений движения интеграл Бернулли; вместе с уравнением для функции тока ψ новая система будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r H}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} &= g, & \frac{\partial r h}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial \vartheta} &= 0 \\ \frac{d\psi}{d\vartheta} &= \rho \left(v \frac{dr}{d\vartheta} - r u \right), & \varphi &\equiv \frac{p}{\rho^\kappa} = \varphi(\psi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$H = \kappa p + \rho u^2, \quad S = \rho u v, \quad g = \kappa p + \rho v^2, \quad h = \tau u, \quad t = \tau v$$

$$p = (1 - w^2) \rho, \quad \rho = \tau \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}}, \quad \tau = (1 - w^2)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

u , v — составляющие скорости w вдоль r и ϑ . В этой системе неизвестными являются функции u , v , ψ , φ .

Граничные условия на контуре тела $r = r_0(\vartheta)$ имеем в виде

$$u = \frac{v}{r_0} \frac{dr_0}{d\vartheta}, \quad \psi = 0 \quad (1.3)$$

$$\varphi = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^\kappa \frac{1}{w_\infty^{2\kappa}} \left[\frac{w_\infty^2}{1 - w_\infty^2} - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right] = \text{const}$$

Представим уравнение ударной волны в виде $r = r_0(\vartheta) + \varepsilon(\vartheta)$, где $\varepsilon(\vartheta)$ — расстояние от контура тела до волны вдоль луча $\vartheta = \text{const}$. Известные соотношения на волне выразим в нужной нам форме:

$$w_x = w_\infty \left[1 - \frac{2 \sin^2 \sigma}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right) \right] \quad (1.4)$$

$$w_y = \frac{w_\infty}{\kappa + 1} \sin 2\sigma \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right) \quad (1.5)$$

$$\varphi = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^\kappa \left[\omega - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right] \left(1 + \frac{1}{\omega} \right)^\kappa \quad (1.6)$$

$$\psi \equiv \psi_\infty = w_\infty (1 - w_\infty^2)^{\frac{1}{\kappa-1}} (r_0 + \varepsilon) \sin \vartheta \quad (1.7)$$

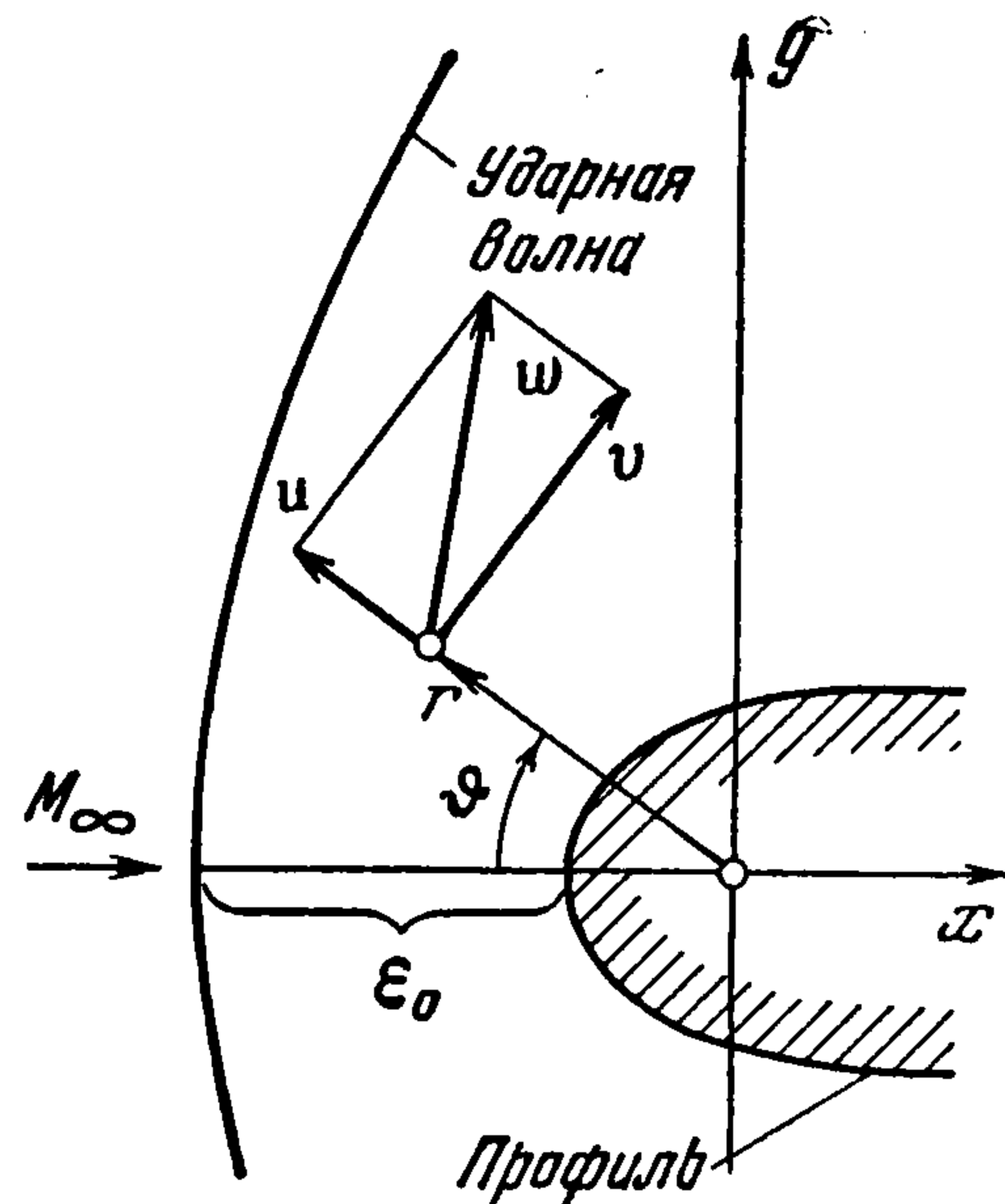
Здесь σ — угол между касательной к волне и направлением набегающего потока, w_x и w_y — составляющие скорости w вдоль осей $x = -r \cos \vartheta$ и $y = r \sin \vartheta$ (фиг. 1); индексом ∞ обозначены величины до ударной волны; $\omega = w_\infty^2 \sin^2 \sigma / (1 - w_\infty^2)$.

Связь составляющих скорости при этом такова:

$$u = w_y \sin \vartheta - w_x \cos \vartheta, \quad v = w_x \sin \vartheta + w_y \cos \vartheta \quad (1.8)$$

Из соотношения на волне $dy/dx = \text{tg } \sigma$ получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = -(r_0 + \varepsilon) \text{ctg } (\sigma + \vartheta) - \frac{dr_0}{d\vartheta} \quad (1.9)$$



Фиг. 1

2. Метод решения. Проведем между телом и волной $N - 1$ линий:

$$r = r_i(\vartheta) = r_0(\vartheta) + \xi_i \varepsilon(\vartheta) \quad \left(\xi_i = \frac{N - i + 1}{N}, \quad i = 2, 3, \dots, N \right)$$

которые разобьют область интегрирования на N полос. Будем обозначать все величины на i -й промежуточной линии индексом i , на ударной волне ($i = 1$) — индексом 1 и на теле индексом 0.

Проинтегрируем два первых уравнения системы (1.2) вдоль произвольного луча $\vartheta = \text{const}$ от контура тела до границы каждой из полос, тогда получим $2N$ независимых интегральных соотношений:

$$\frac{d}{d\vartheta} \int_{r_0}^{r_i} S(r, \vartheta) dr - \left(S_i \frac{dr_i}{d\vartheta} - S_0 \frac{dr_0}{d\vartheta} \right) + r_i H_i - r_0 H_0 = \int_{r_0}^{r_i} g(r, \vartheta) dr \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \int_{r_0}^{r_i} t(r, \vartheta) dr - \left(t_i \frac{dr_i}{d\vartheta} - t_0 \frac{dr_0}{d\vartheta} \right) + r_i h_i - r_0 h_0 = 0 \quad (2.2)$$

Подынтегральные функции в (2.1) и (2.2) будем аппроксимировать интерполяционными полиномами степени N по r , принимая за узлы интерполяций границы полос

$$f(r, \vartheta) = \sum_{m=0}^N a_m(\vartheta) \left[\frac{r - r_0(\vartheta)}{\varepsilon(\vartheta)} \right]^m \quad (2.3)$$

где коэффициенты $a_m(\vartheta)$ будут линейно зависеть от значений соответствующих функций на границах полос. Записав далее два последних уравнения системы (1.2) вдоль каждой промежуточной линии $r = r_i(\vartheta)$ (на теле и на волне ψ и φ находятся из граничных условий) и принимая во внимание уравнение (1.9), получим аппроксимирующую систему, состоящую из $4N - 1$ уравнений для неизвестных ε , σ , v_0 , u_i , v_i , ψ_i , φ_i ($i = 2, 3, \dots, N$).

Разрешим эту систему относительно производных всех неизвестных функций:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} &= -(r_0 + \varepsilon) \operatorname{ctg}(\sigma + \vartheta) - \frac{dr_0}{d\vartheta}, & \frac{d\sigma}{d\vartheta} &= F \\ \frac{dv_0}{d\vartheta} &= \frac{E_0}{(\kappa - 1)/(\kappa + 1) - w_0^2}, & \frac{d\psi_i}{d\vartheta} &= \rho_i \left[v_i \frac{dr_i}{d\vartheta} - r_i u_i \right] \\ \frac{du_i}{d\vartheta} &= \frac{1}{t_i} \varphi_i^{\frac{1}{\kappa} - 1} \left[f_1 - u_i \varphi_i^{-\frac{1}{\kappa} - 1} f_2 + \frac{S_i}{\kappa - 1} \frac{d \ln \varphi_i}{d\psi_i} \frac{d\psi_i}{d\vartheta} \right] \\ \frac{dv_i}{d\vartheta} &= \frac{E_i}{(\kappa - 1 + 2u_i^2)/(\kappa + 1) - w_i^2}, & \varphi_i(\psi_i) &= \varphi_1(\psi_i) \quad (i = 2, 3, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь F , E_0 , E_i , f_1 , f_2 — определенные голоморфные в области интегрирования функции от ϑ и искомых величин (вид этих функций зависит от N), а

$$\frac{d \ln \varphi_i}{d\psi_i} = \frac{d \ln \varphi_1}{d\psi_1} \Big|_{\psi_1 = \psi_i} = \frac{d \ln \varphi_1}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\psi_1} \Big|_{\psi_1 = \psi_i} \quad (2.5)$$

где $d \ln \varphi_1 / d\sigma$ и $d\psi_1 / d\vartheta$ находятся из (1.6) и (1.7).

Все граничные условия на теле и на ударной волне, как видно из схемы построения этой системы, удовлетворяются автоматически. Интегрирование полученной системы проводится численно от оси симметрии $\vartheta = 0$, где $v_0 = v_i = \psi_i = 0$, $\sigma = 1/2 \pi$, $\varphi = \varphi_1(0)$, а N начальных значений функций ε и u_i являются неизвестными параметрами.

В рассматриваемом смешанном течении возмущения, происходящие в сверхзвуковой области за граничной характеристикой, не передаются в дозвуковую область, и поэтому на верхней границе рассматриваемой области интегрирования мы не можем получить дополнительных условий для определения недостающих начальных значений искомых функций. Однако из структуры аппроксимирующей системы видно, что в окрестности звуковой линии N уравнений системы будут иметь N подвижных особых точек. Для возможности непрерывного перехода через эти точки необходимо выполнение в них некоторых условий, а именно в точках, где

$$w_0^2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad w_i^2 = \frac{\kappa - 1 + 2u_i^2}{\kappa + 1} \quad (i = 2, 3, \dots, N)$$

должно быть соответственно $E_0 = 0$ и $E_i = 0$ (назовем совокупность этих точек особой линией). В противном случае на особой линии будут бесконечные значения производных $dv_0/d\vartheta$, $dv_i/d\vartheta$, т. е. бесконечные ускорения, а тогда движение нельзя продолжить за эту линию — сама особая линия будет предельной линией и все решение не будет иметь физического смысла. Эти условия подобны условиям на переходной линии, полученным С. А. Христиановичем [9] из точной системы дифференциальных уравнений в частных производных для некоторых случаев плоских безвихревых потоков. Для удовлетворения N условий на особой линии в нашем распоряжении имеется N параметров при $\vartheta = 0$. Таким образом, требование непрерывности движения на особой линии и дает нам недостающие условия для определенности задачи.

В аппроксимирующей системе (2.4) правые части представляют собой функции, голоморфные по всем своим аргументам всюду в рассматриваемой области, кроме точек особой линии, где N уравнений системы имеют правые части вида O/O . По теореме Коши через любую неособую точку области проходит одно и только одно голоморфное по ϑ решение системы (2.4), поэтому в окрестности такой точки данное решение может быть представлено в виде степенных рядов.

3. Построение решения в окрестности особых точек. Рассмотрим вначале уравнение

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{P(Z, W)}{Q(Z, W)} \quad (3.1)$$

где $P(Z, W)$ и $Q(Z, W)$ — голоморфные функции переменных Z, W в некоторой окрестности точки $Z = W = 0$, причем

$$\begin{aligned} P(O, O) &= Q(O, O) = 0 \\ P(Z, W) &= aZ + bW + O(Z^2 + W^2) \\ Q(Z, W) &= cZ + dW + O(Z^2 + W^2) \end{aligned} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (3.2)$$

Пусть λ_1, λ_2 — корни уравнения $\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ad - bc) = 0$. Покажем, что если $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ — действительное отрицательное число (это будет при

($b-c)^2 + 4ad > 0$ и $ad - bc > 0$), то уравнение (3.1) в действительной области не имеет никаких других интегралов, стремящихся к нулю вместе с Z , кроме двух голоморфных.

Исследуем возможность решения, равного $O(Z^m)$ в начале координат, для чего уравнение (3.1) приведем при помощи неособого линейного преобразования к такому каноническому виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{P_*(\xi, \eta)}{Q_*(\xi, \eta)} \equiv \frac{\lambda\eta + \Phi_1(\xi, \eta)}{\xi + \Phi_2(\xi, \eta)} \quad (3.3)$$

Здесь Φ_1 и Φ_2 — функции порядка $\xi^2 + \eta^2$, голоморфные по ξ, η в окрестности точки $\xi = \eta = 0$.

Отсюда, между прочим, сразу вытекает, что в действительной области искомое уравнение будет иметь только два простых обыкновенных критических направления, вдоль которых в особую точку входят четыре интегральные кривые — особая точка есть «седло».

Построив для уравнения (3.3) диаграмму Пьюизо, найдем, что в точке $\xi = \eta = 0$ предполагаются решения $\eta = O(\xi^2)$ и $\xi = O(\eta^2)$. Каждая связь определяет подстановку, которая сводит (3.3) к уравнению Брио и Буке первого приведенного типа с действительным отрицательным коэффициентом b при неизвестной функции [$b = \lambda - 2$ при $\eta = O(\xi^2)$ и $b = (1 - 2\lambda)/\lambda$ при $\xi = O(\eta^2)$]. Брио и Буке показали [10], что, за исключением специального случая, когда b — целое положительное число, полученное уравнение имеет один и только один голоморфный интеграл, проходящий через особую точку, причем в действительной области при условии $\operatorname{Re} b < 0$ не существует никакого другого интеграла, проходящего через эту точку, кроме голоморфного. Сходимость ряда, представляющего решение, доказывается введением мажоранты для правой части уравнения Брио и Буке. В переменных Z, W проходящие через точку $Z = W = 0$ решения уравнения (3.1) запишутся теперь в виде сходящихся рядов

$$W_j = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nj} Z^n \quad (j = 1, 2) \quad (3.4)$$

Высказанное утверждение, таким образом, доказано.

Вернемся к рассмотрению аппроксимирующей системы (2.4). Пусть на контуре тела особая точка находится при $\vartheta = \vartheta_0$, а на i -й промежуточной линии — при $\vartheta = \vartheta_i$. Будем считать, что

$$\vartheta_0 \neq \vartheta_2 \neq \vartheta_3 \neq \dots \neq \vartheta_N \quad (3.5)$$

чего можно, вообще говоря, добиться, проводя соответствующим образом промежуточные линии. Тогда в k -й особой точке

$$(\vartheta_k, \varepsilon^{(k)}, \sigma^{(k)}, \dots, \varphi_i^{(k)}) \quad (k = 0, 2, 3, \dots, N; i = 2, 3, \dots, N)$$

только у одного из $3N$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_k}{d\vartheta} = \frac{E_k}{\Delta_k} \quad (3.6)$$

правая часть будет неопределенной, но функции E_k, Δ_k , а также правые части оставшихся уравнений будут голоморфными по всем аргументам в некоторой окрестности этой точки.

Линеаризируем теперь оставшуюся систему, тогда уравнение (3.6) можно записать в виде (3.1) ($Z = \vartheta - \vartheta_k$, $W = v_k - v_k^{(k)}$), причем условия для существования действительного отрицательного λ выполняются. Следовательно, особая точка есть «седло» и уравнение (3.6) в действительной области не имеет никаких других интегралов, удовлетворяющих условию $v_k = v_k^{(k)}$ при $\vartheta = \vartheta_k$, кроме двух голоморфных (3.4).

Тогда в окрестности k -й особой точки существуют два и только два решения системы (2.4) с начальными данными

$$\vartheta = \vartheta_k, \quad \varepsilon = \varepsilon^{(k)}, \quad \sigma = \sigma^{(k)}, \dots, \varphi_i = \varphi_i^{(k)}$$

причем оба решения голоморфны в некоторой области, заключающей точку $\vartheta = \vartheta_k$. Одно из этих решений «склеиваем» с полученным обычным образом решением до особой точки (число условий склейки равно числу произволов в особой точке), но так как второе решение пересекается с первым только в самой особой точке, то условия склейки однозначно определяют интегральную кривую, проходящую через данную особую точку. Таким образом, аппроксимирующая система (2.4) во всей рассматриваемой области интегрирования имеет единственное решение, голоморфное всюду и удовлетворяющее условиям как при $\vartheta = 0$, так и на особой линии.

Решение аппроксимирующей системы проводится численно при разном количестве промежуточных линий: в первом приближении ($N = 1$) не проводится ни одной промежуточной линии и S, g, t аппроксимируются линейно по их значениям на теле и на волне. Три неизвестные функции ε, σ, v_0 находятся из трех дифференциальных уравнений. Во втором приближении ($N = 2$) вводится одна промежуточная линия, в третьем ($N = 3$) — две и т. д. Совпадение результатов с требуемой точностью в двух последних приближениях свидетельствует о практической сходимости расчета. Основные трудности расчета состоят в том, что, во-первых, часть краевых условий системы (2.4) задана на особой линии и, во-вторых, после удовлетворения в каждой особой точке соответствующего условия надо численно пройти эту точку (в решении необходимо пройти все N особых точек аппроксимирующей системы). Используя разложения решения в сходящиеся ряды как в окрестности особой, так и в окрестности неособой точек, а также учитывая свойство сходимости интегральных кривых, нам удалось построить технически простые способы прохождения особых точек аппроксимирующей системы.

4. Некоторые формулы для течения за ударной волной. Выясним локальные свойства взаимного расположения линий тока $\psi = \text{const}$ и линий постоянного модуля скорости $w = \text{const}$.

Выведем формулу для угла δ между этими линиями, а также для угла наклона линии $w = \text{const}$ к направлению набегающего потока (этот угол обозначим через Φ).

Знание таких углов дает нам возможность оценить в дальнейшем точность расчета в самых тонких его местах и позволяет получить без численного расчета качественное представление о характере области влияния при различных числах Маха набегающего потока.

Найдем сначала выражения этих углов на ударной волне. Вдоль линии $w = \text{const}$, уравнение которой пусть будет $y = y_w(x)$, имеем

$$\frac{dy_w}{dx} \equiv \text{tg } \Phi_* = - \frac{w_x \partial w_x / \partial x + w_y \partial w_y / \partial x}{w_x \partial w_x / \partial y + w_y \partial w_y / \partial y} \quad (4.1)$$

Для определения четырех производных $\partial w_x / \partial x$, $\partial w_x / \partial y$, $\partial w_y / \partial x$ и $\partial w_y / \partial y$ имеем систему четырех уравнений (уравнение вихря, преобразованное уравнение неразрывности и два выражения полных производных от w_x и w_y вдоль ударной волны):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \Omega \\ \left(1 - \frac{w_x^2}{c^2}\right) \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{w_x w_y}{c^2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right) + \left(1 - \frac{w_y^2}{c^2}\right) \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \text{tg } \sigma &= \frac{dw_x}{dx}, \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \text{tg } \sigma = \frac{dw_y}{dx} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь Ω — вихрь, c — скорость звука:

$$\Omega = \frac{1}{2\kappa} (1 - w^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{d \ln \varphi}{d\psi}, \quad c^2 = \frac{\kappa-1}{2} (1 - w^2)$$

Определим правые части системы (4.2). Вдоль ударной волны имеем

$$\frac{d \ln \varphi}{d\psi} = \frac{d \ln \varphi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dx} \frac{dx}{d\psi}, \quad \frac{d\psi}{dx} = \rho_\infty w_\infty \text{tg } \sigma$$

Поэтому, учитывая (1.6), находим

$$\begin{aligned} \Omega &= F_1 \frac{d\sigma}{dx} \\ F_1 &= \frac{1}{2\kappa} (1 - w^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \varphi^{-\frac{1}{\kappa-1}} \frac{2 [\omega - 1/2 (\kappa - 1)]^2 \text{ctg}^2 \sigma}{\rho_\infty w_\infty (\omega + 1) [\omega - 1/4 (\kappa - 1)^2 / \kappa]} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где ω и w^2 находятся из граничных условий на ударной волне.

Из соотношений (1.4) и (1.5) аналогично получаем

$$\frac{dw_x}{dx} = F_2 \frac{d\sigma}{dx}, \quad F_2 = -2 \frac{w_\infty}{\kappa + 1} \sin 2\sigma \quad (4.4)$$

$$\frac{dw_y}{dx} = F_3 \frac{d\sigma}{dx}, \quad F_3 = 2 \frac{w_\infty}{\kappa + 1} \left(\cos 2\sigma + \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right) \quad (4.5)$$

Определяя теперь из (4.2) неизвестные производные и подставляя их в (4.1), получим, что

$$\text{tg } \Phi_* = - \frac{m (w_x - w_y \text{ctg } \sigma) + (w_\infty - w_x) (F_1 + F_2 \text{ctg } \sigma)}{(F_2 - m \text{ctg } \sigma) (w_x - w_y \text{ctg } \sigma) + w_y (F_3 - F_1)} \quad (4.6)$$

Здесь

$$m = \frac{(c^2 - w_y^2) (F_1 + F_2 \text{ctg } \sigma - F_3) + w_x (w_\infty - w_x) (F_1 + 2F_2 \text{ctg } \sigma)}{c^2 (1 + \text{ctg}^2 \sigma) - (w_x - w_y \text{ctg } \sigma)^2}$$

На ударной волне угол $\Phi = \Phi_1$ определяется так:

$$\Phi_1 = \begin{cases} \Phi_* & \text{при } \Phi_* < \sigma \\ -(\pi - \Phi_*) & \text{при } \Phi_* > \sigma \end{cases} \quad (4.7)$$

При $\sigma = 1/2 \pi$ и $\sigma = \alpha = \arcsin M_\infty^{-1}$ линии $w = \text{const}$ касаются ударной волны.

Теперь легко можно определить угол δ_1 между линией тока и линией $w = \text{const}$:

$$\delta_1 = \Phi_1 - \beta_1, \quad \beta_1 = \arctg \frac{w_y}{w_x} \quad (4.8)$$

Углы Φ , δ и β положительны при отсчете против часовой стрелки.

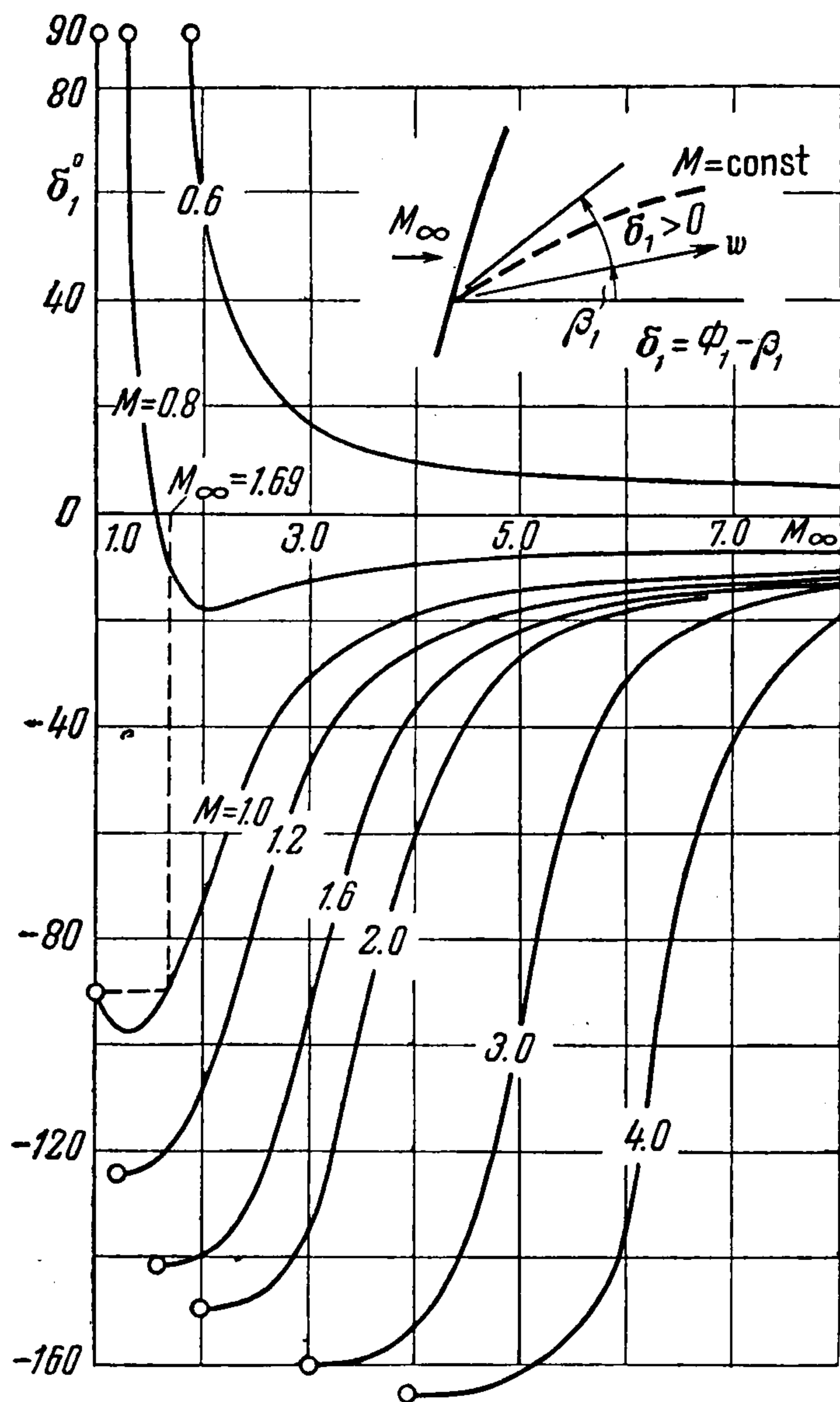
Как известно, на ударной волне σ и β_1 являются функциями M_∞ и w ; тогда из выражений (4.6) — (4.8) следует, что $\Phi_1 = \Phi_1(M_\infty, w)$ и $\delta_1 = \delta_1(M_\infty, w)$, т. е. в плоском случае на ударной волне угол наклона линии $w = \text{const}$ к линии тока или к направлению набегающего потока (а следовательно, и угол подхода линии $w = \text{const}$ к ударной волне) зависит для данной величины скорости w только от числа Маха набегающего потока. M_∞ — форма тела, таким образом, на этот угол не влияет. Для осесимметричных течений эти углы будут зависеть еще и от кривизны волны, а следовательно, и от формы тела.

Используя граничные условия на теле, можно аналогичным путем получить выражения для этих углов и на контуре профиля $r = r_0(\vartheta)$:

$$\text{tg } \Phi_0 = - \frac{[r_0 r_0' \text{tg } \vartheta + r_0^2 - r_0 r_0'' + r_0'^2] v_0 + (r_0 \text{tg } \vartheta - r_0') r_0 v_0'}{[r_0 r_0' - (r_0^2 - r_0 r_0'' + r_0'^2) \text{tg } \vartheta] v_0 + (r_0 + r_0' \text{tg } \vartheta) r_0 v_0'} \quad (4.9)$$

но $\delta_0 = \Phi_0 - \beta_0$, тогда

$$\text{tg } \delta_0 = \frac{R_0 w_0'}{w_0 \sqrt{r_0^2 + r_0'^2}} \quad (4.10)$$



Фиг. 2

Здесь w_0 — модуль скорости на теле, R_0 — радиус кривизны тела. Штрихом обозначены производные по ϑ .

Для кругового цилиндра ($r_0 = 1$) получаются совсем простые формулы:

$$\text{tg } \Phi_0 = \frac{v_0 + \text{tg } \vartheta v_0'}{v_0 \text{tg } \vartheta - v_0'} \quad (4.11)$$

$$\text{tg } \delta_0 = \frac{v_0'}{v_0}$$

Из выражения (4.10) видно, что $\delta_0 = 1/2 \pi$ при $R_0 = \infty$ и $0 < \delta_0 < 1/2 \pi$ при $0 < R_0 < \infty$, $w_0' > 0$, т. е. линии $w = \text{const}$ будут подходить ортогонально к телу только на его прямолинейных участках и под острым углом к тем точкам тела, в которых поток ускоряется и радиус кривизны тела конечен.

Величины углов Φ_1 и δ_1 на ударной волне при $\kappa = 1.40$ и разных значениях $M = w/c$ и M_∞ приводятся в табл. 1 и на фиг. 2. На звуковой линии ($M = 1$) получили, что $|\delta_1| = 1/2 \pi$ при $M_\infty = 1.00$ и 1.69 ($\kappa = 1.40$),

$|\delta_1| > 1/2\pi$ при $1 < M_\infty < 1.69$ и $|\delta_1| < 1/2\pi$ при $M_\infty > 1.69$. Формы звуковых линий для кругового цилиндра приведены на фиг. 3. Отсюда сразу можно установить характер областей влияния при разных M_∞ : при $M_\infty \leq 1.69$ минимальная область влияния будет ограничена характеристикой первого семейства, приходящей от тела в звуковую точку волны; при $M_\infty > 1.69$ из звуковой точки волны не выходит ни одна характеристика и минимальная область влияния будет ограничена характеристиками первого и второго семейств, которые выходят из точек тела и волны с $M > 1$ и касаются при этом звуковой линии (фиг. 4). Эти результаты дают представление о форме областей влияния и для профилей.

5. Расчет обтекания кругового цилиндра. В качестве примера к изложенному методу на быстродействующей электронной счетной машине «БЭСМ» АН СССР были произведены расчеты обтекания кругового цилиндра ($r_0 = 1$) при разных числах M_∞ и с различной степенью точности ($N = 1, 2, 3$).

На фиг. 3 построены ударные волны и звуковые линии для случаев $M_\infty = 3.0$ ($N = 3$), 4.0 и 5.0 ($N = 2$); там же для $M_\infty = 4.0$ нанесены экспериментальные точки Кима [1]. В этой работе Ким указывает между прочим на выпуклый характер звуковой линии при $M_\infty = 4.0$; таким образом, полученный нами результат качественно совпадает с результатом Кима. Более того, углы наклона звуковых линий в точках волны и тела хорошо согласуются с точными значениями, полученными по формулам (4.6)—(4.8) и (4.11).

На фиг. 4 для случая $M_\infty = 3.0$ по третьему приближению ($N = 3$) построены: ударная волна, звуковая линия и граничные характеристики, вырезающие минимальную область влияния. Картина обтекания, полученная по второму приближению, очень близка к построенной.

На фиг. 5 показано, как изменяется распределение давления на цилиндре при возрастании M_∞ от 2.13 до 5.0, где по оси ординат отложено отношение давления на теле $p_0(\vartheta)$ к давлению в критической точке $p_0(0)$.

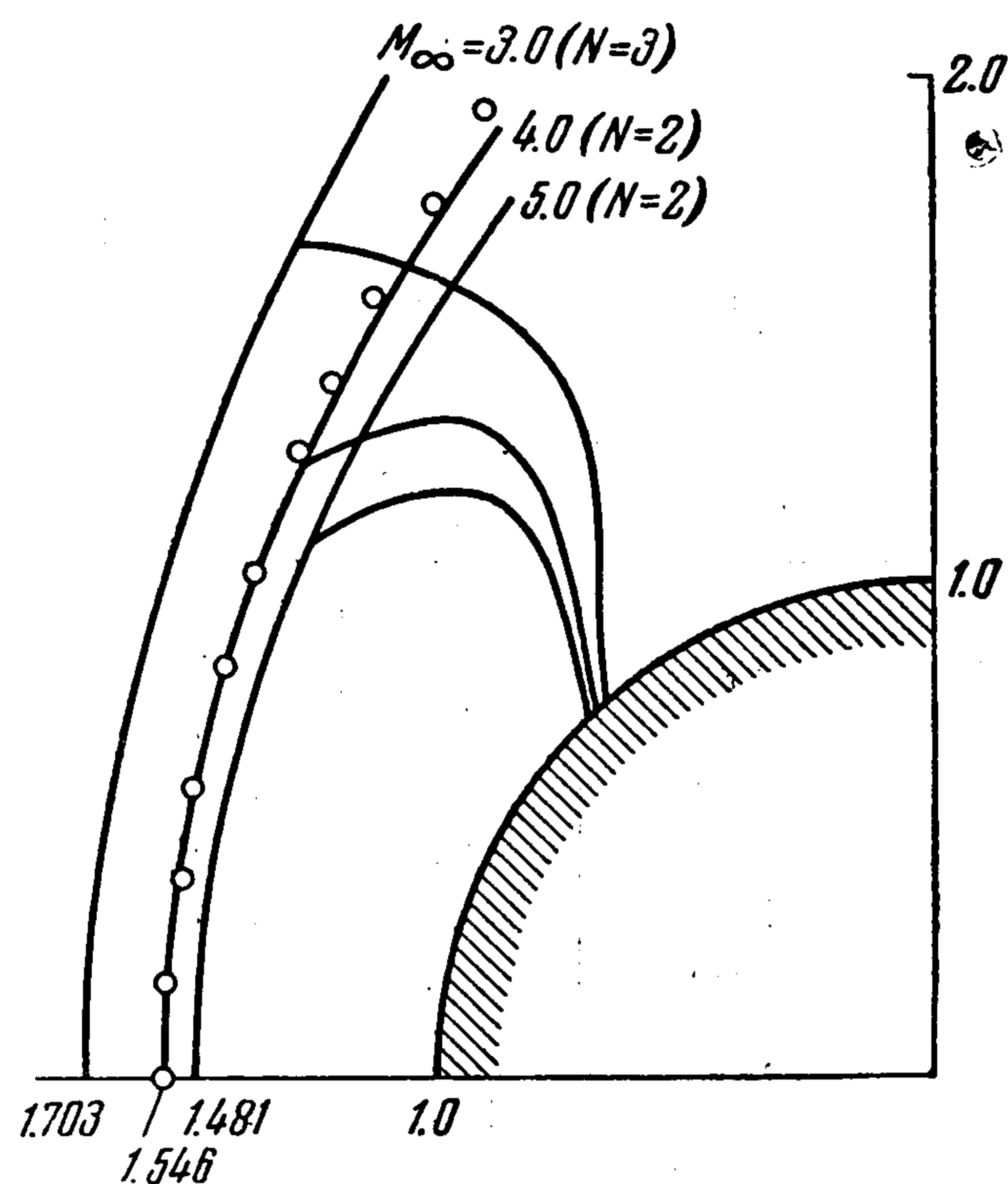
Фиг. 6 и табл. 2 иллюстрируют сходимость метода по приближениям ($N = 1, 2, 3$) для $M_\infty = 3.0$; там же дано сравнение с результатами эксперимента, проведенного Г. М. Рябинковым.

Наибольшее число работ у нас и за границей было посвящено определению расстояния ϵ_0 от тела до волны вдоль оси симметрии. На фиг. 7 представлены экспериментальные данные из статьи Кима (1), куда для сравнения нанесены результаты наших расчетов (5) и теоретические результаты К. Тамада (2), К. Хида (3) и Г. С. Смурова (4). Из фиг. 7 видно, что наши результаты довольно хорошо согласуются с экспериментальными данными Кима (например, для $M_\infty = 4.0$ Ким приводит значение $\epsilon_0 = 0.54$, а у нас $\epsilon_0 = 0.546$).

В табл. 3 и 4 приводятся численные результаты расчета обтекания кругового цилиндра при $M_\infty = 3.0$ ($N = 3$, $\kappa = 1.40$).

В табл. 3 приводятся значения составляющих скорости u , v , давления p и функции тока ψ в пяти точках луча $\vartheta = \text{const}$: расстояние от цилиндра до ударной волны вдоль $\vartheta = \text{const}$ делится на четыре равные части:

$$\xi = \frac{r-1}{\epsilon(\vartheta)} = 0 \text{ (цилиндр), } 0.25, 0.50, 0.75 \text{ и } 1.00 \text{ (волна)}$$



Фиг. 3

ϑ	Таблица					
	$N = 1$		$N = 2$		$N = 3$	
	ε	μ_0	ε	μ_0	ε	μ_0
0.0000	0.696	1.000				
0625	698	997	0.708	1.000	0.703	1.000
1250	701	991	710	997	704	996
1875	708	980	715	989	709	987
2500	717	964	724	974	716	970
0.3125	0.730	0.942	737	952	727	947
3750	746	914	0.752	0.923	0.741	0.918
4375	767	880	770	887	759	883
5000	793	841	792	847	780	844
5625	825	797	818	803	805	801
0.6250	0.862	0.749	847	757	834	754
6875	906	697	0.881	0.708	0.868	0.706
7500	959	642	919	658	907	655
8125	1.020	581	963	607	952	605
8750	—	—	1.012	557	1.002	554
0.9375	—	—	068	508	057	503
1.0000	—	—	1.130	0.460	1.121	0.455
0625	—	—	201	414	193	408
1250	—	—	280	371	273	364
			369	331	365	321

Таблица 3

$\xi = 0.00 (u \equiv 0; \psi \equiv 0)$			$\xi = 0.25$			
$\vartheta 10^4$	$v 10^3$	$p 10^3$	$u 10^4$	$v 10^3$	$p 10^3$	$\psi 10^4$
0	0	328				
625	30	327	-706	0	322	0
1250	61	324	-703	29	321	17
1875	92	318	-697	57	319	34
2500	123	311	-685	85	314	51
3125	155	301	-667	112	309	67
3750	186	290	-643	140	302	84
4375	217	277	-612	167	294	100
5000	247	263	-574	193	285	116
5625	277	247	-529	219	274	132
6250	307	231	-477	245	264	148
6875	336	215	-417	270	252	164
7207	352	206	-348	294	240	179
7520	366	198	-308	306	234	187
7832	380	189	-268	317	228	194
8145	394	181	-226	329	222	201
8379	405	175	-181	339	216	209
8750	421	165	-146	348	211	214
9062	435	157	-88	360	204	223
9375	448	149	-35	370	198	230
9688	462	141	19	380	193	237
1 0000	475	134	77	390	187	244
1 0312	488	126	137	399	181	251
1 0625	501	119	199	408	176	257
1 0938	513	112	265	417	170	264
1 1250	526	105	334	426	165	271
1 1562	538	99	405	434	159	278
			479	442	154	285

$\xi = 0.50$					$\xi = 0.75$			
$\vartheta \cdot 10^4$	$u \cdot 10^4$	$v \cdot 10^3$	$p \cdot 10^3$	$\psi \cdot 10^4$	$u \cdot 10^4$	$v \cdot 10^3$	$p \cdot 10^3$	$\psi \cdot 10^4$
0	-1228	0	311	0	-1662	0	297	0
625	-1224	28	311	33	-1650	29	297	48
1250	-1211	56	309	65	-1629	59	295	97
1875	-1188	84	306	98	-1596	88	293	145
2500	-1155	111	301	130	-1549	118	290	194
3125	-1113	138	296	163	-1490	146	286	242
3750	-1059	164	290	195	-1417	175	281	291
4375	-996	191	283	227	-1330	202	276	340
5000	-921	216	275	260	-1230	229	270	389
5625	-835	241	267	292	-1117	255	263	439
6250	-738	264	258	324	-990	280	256	489
6875	-629	288	249	355	-850	304	248	538
7207	-566	299	244	372	-771	317	244	566
7520	-503	310	239	388	-692	328	240	592
7832	-438	321	235	404	-611	339	236	618
8145	-369	331	230	420	-526	350	232	644
8379	-316	339	226	432	-461	358	229	664
8750	-227	350	221	451	-354	370	225	695
9062	-149	360	216	467	-260	380	220	722
9375	-068	369	212	484	-164	389	216	750
9688	16	378	207	500	64	398	212	777
1 0000	103	387	202	516	38	407	208	806
1 0312	194	395	198	533	142	415	204	834
1 0625	288	403	193	550	250	424	200	863
1 0938	385	411	189	567	360	431	196	893
1 1250	485	418	184	584	472	439	192	924
1 1562	588	425	180	601	585	446	188	955

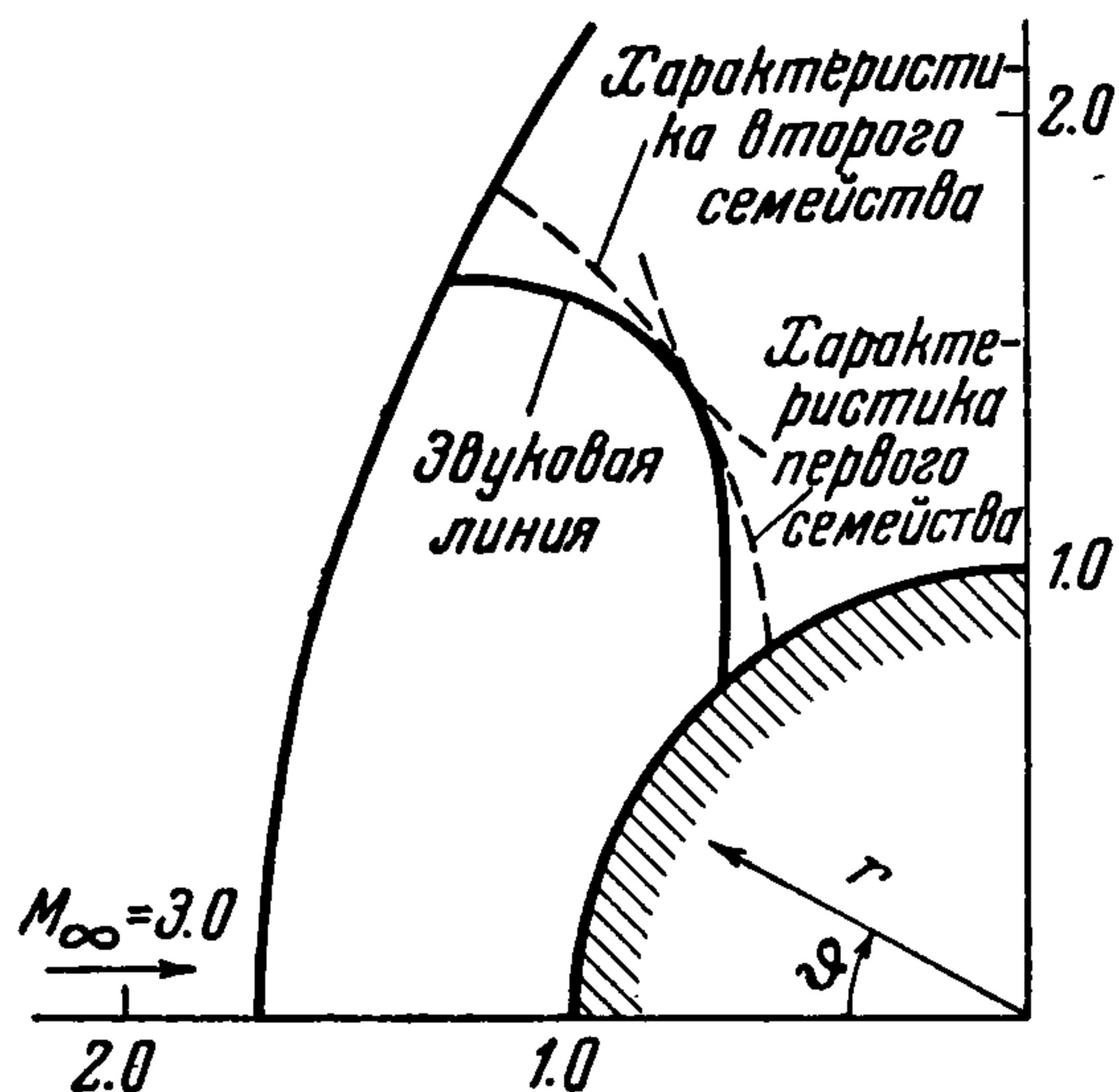
 $\xi = 1.00$

$\vartheta \cdot 10^4$	$u \cdot 10^4$	$v \cdot 10^3$	$p \cdot 10^3$	$\psi \cdot 10^4$	$\varepsilon \cdot 10^3$	$N \cdot 10^3$	$v_1 \cdot 10^3$	$v_2 \cdot 10^3$
0	-2079	0	281	0	703	0	3046	0
625	-2070	34	280	65	704	35	3041	-486
1250	-2043	67	279	130	709	69	3027	-926
1875	-1999	99	278	195	716	102	3004	-1323
2500	-1935	131	276	261	727	135	2975	-1714
3125	-1855	162	273	327	741	167	2937	-2102
3750	-1759	192	269	393	759	200	2893	-2461
4375	-1643	222	266	461	780	232	2843	-2774
5000	-1512	251	261	529	805	263	2787	-3038
5625	-1365	278	257	598	834	294	2727	-3256
6250	-1202	305	252	668	868	324	2664	-3432
6875	-1023	329	246	739	907	354	2598	-3565
7207	-922	342	243	778	930	369	2562	-3619
7520	-823	353	241	815	952	384	2528	-3658
7832	-720	364	238	852	977	398	2593	-3685
8145	-615	375	235	890	1003	412	2459	-3699
8379	-533	383	233	919	1023	422	2433	-3699
8750	-400	394	229	965	1057	439	2391	-3724
9062	-285	404	226	1004	1088	452	2356	-3719
9375	-167	413	223	1045	1121	466	2321	-3706
9688	-47	421	220	1086	1156	479	2286	-3682
1 0000	76	429	217	1127	1193	493	2251	-3650
1 0312	203	437	214	1170	1232	506	2217	-3587
1 0625	331	444	210	1214	1274	518	2183	-3501
1 0938	463	451	207	1258	1318	531	2149	-3408
1 1250	596	457	204	1304	1365	543	2117	-3322
1 1562	732	462	201	1351	1415	555	2084	-3230

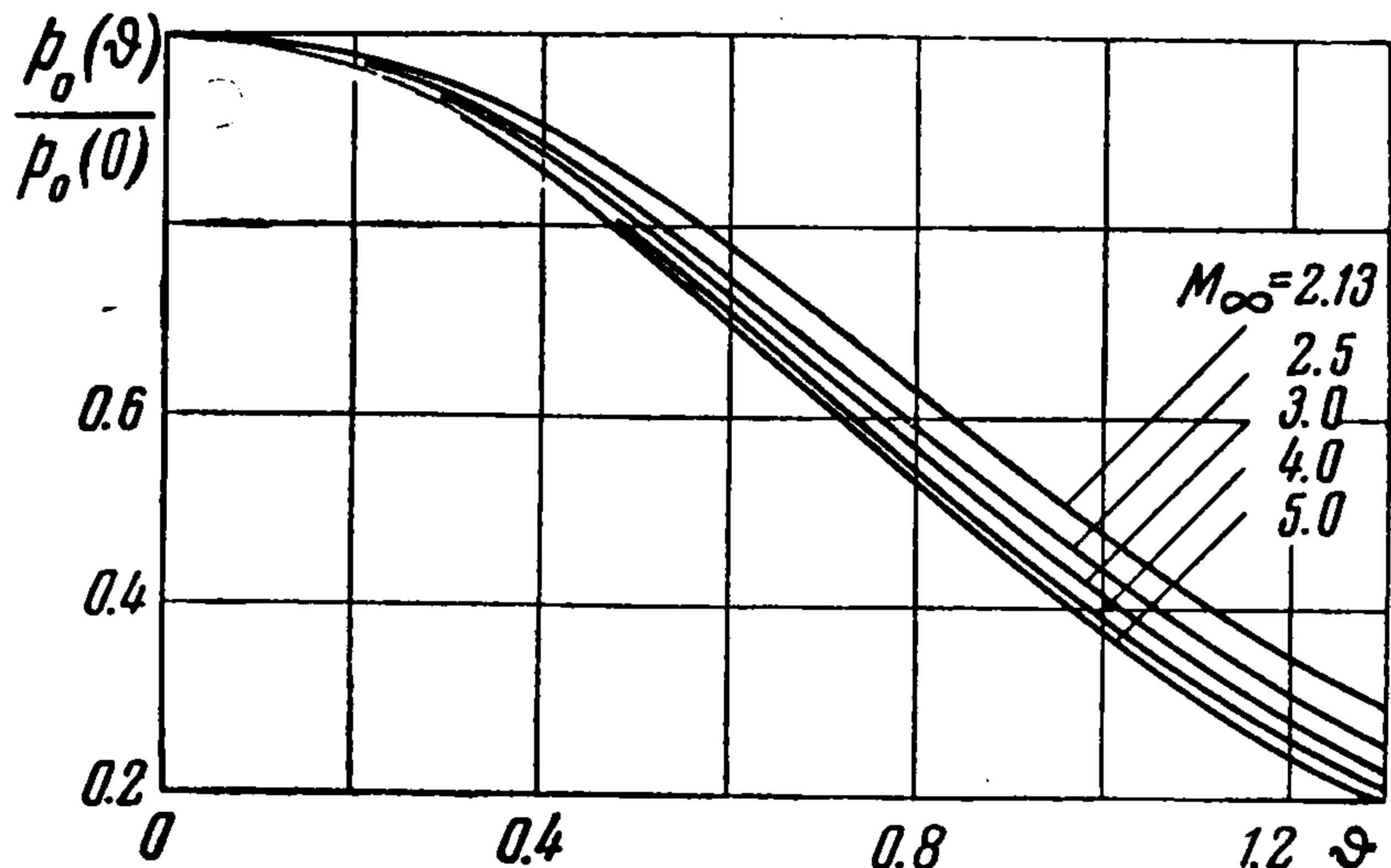
При $\xi = 1.00$, помимо этих величин, приводятся также значения

$$\varepsilon, \quad \chi = \frac{\pi}{2} - \sigma, \quad v_1 = \varphi^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad v_2 = \frac{d \ln \varphi^{\frac{1}{\kappa-1}}}{d\psi}$$

Безразмерные величины плотности, температуры (отнесенной к температуре тор-



Фиг. 4



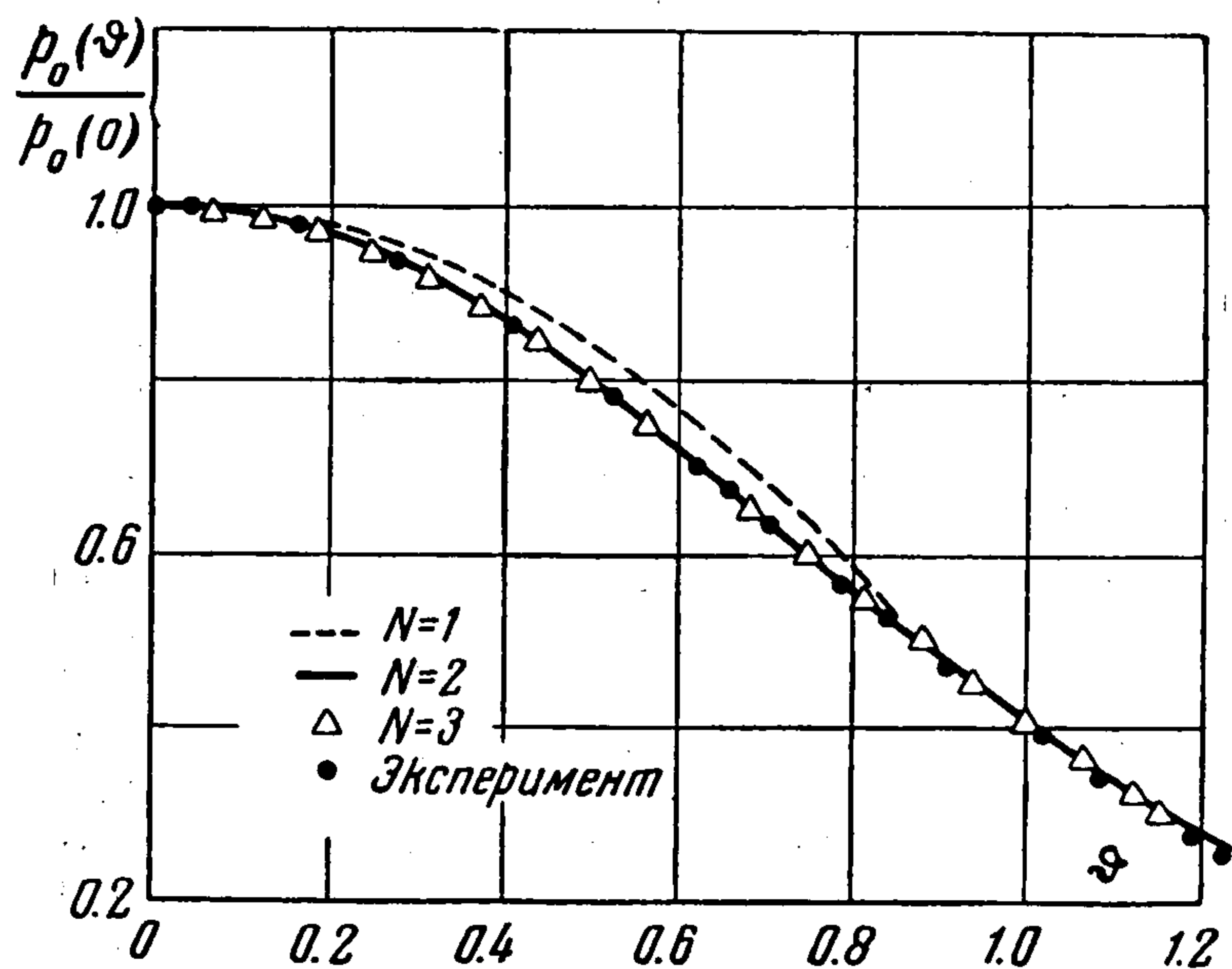
Фиг. 5

можения до ударной волны) и энтропии могут быть найдены в тех же точках по следующим формулам:

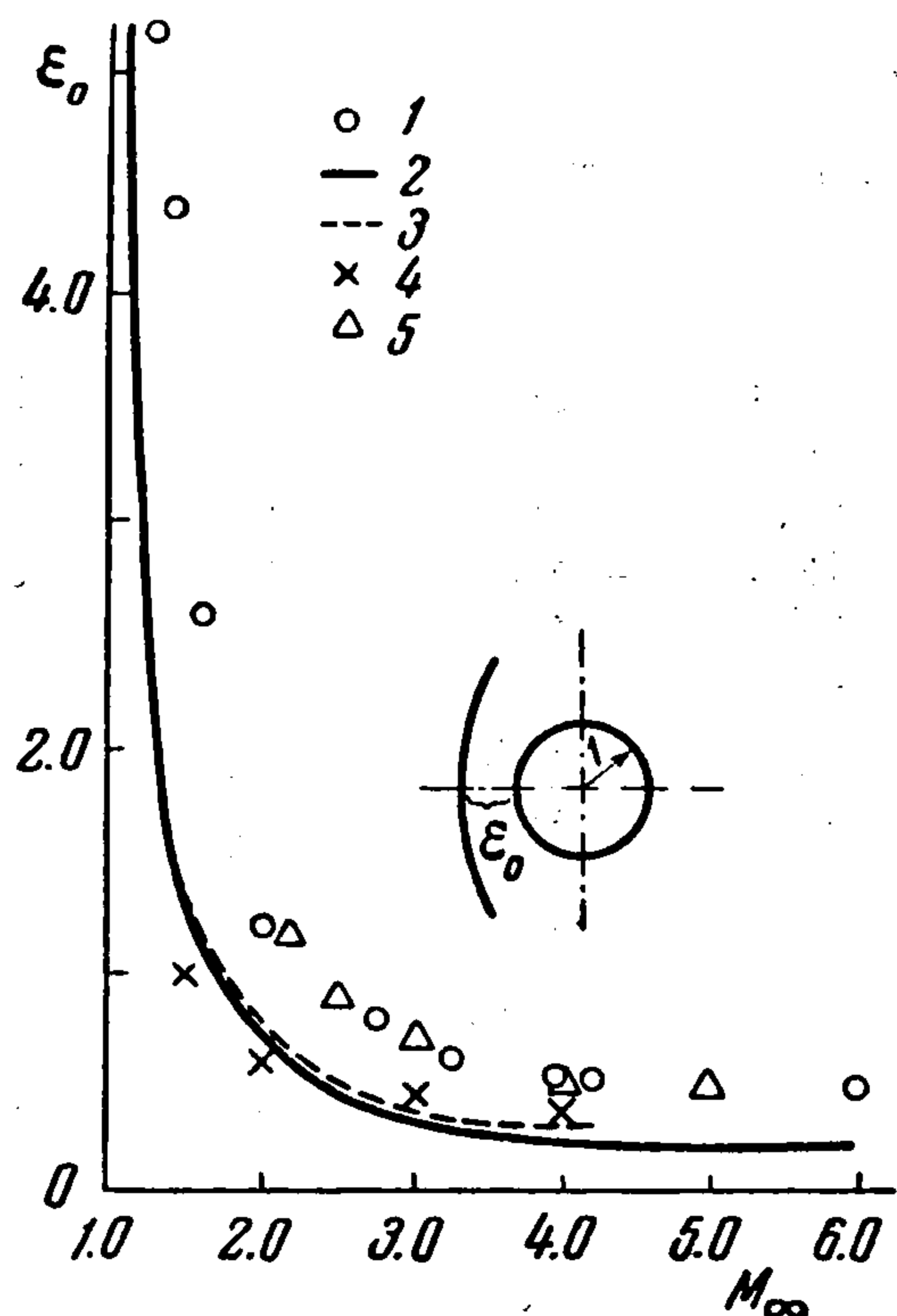
$$\rho = \frac{\rho}{1-w^2}, \quad T = 1 - w^2, \quad s = c_v (\kappa - 1) \ln v_1$$

где $w^2 = u^2 + v^2$, а $v_1 = v_1(\psi)$; величина $v_2 = v_2(\psi)$ используется при определении вихря.

В табл. 4 приводятся координаты звуковой линии и граничных характеристик для этого же случая.



Фиг. 6



Фиг. 7

Анализ расчетов и сравнение полученных результатов с экспериментом показывают, что в окрестности оси симметрии уже первое приближение дает неплохие результаты; распределение давления на теле и на волне, форма и положение ударной волны достаточно точно определяются во всей области интегрирования вторым приближением, а для нахождения поля скоростей и, следовательно, для построения звуковых линий при $M_\infty \leq 3.0 - 3.5$ надо считать по крайней мере три приближения, в то время как при $M_\infty > 3.5$ достаточно двух.

Таблица 4

Звуковая линия		Граничные характеристики			
		I семейство		II семейство	
-x	y	-x	y	-x	y
0.664	0.748	0.575	0.818	0.777*	1.433
666	798	576	834	813	494
668	852	584	904	853	544
669	911	593	972	896	592
670	974	605	1.038	941	638
0.671	1.045	0.620	1.101	0.988	1.683
677	135	638	163	1.037	726
692	246	660	222	089	768
720	340	684	280	141	809
777*	443	711	336	186	843
0.841	1.510	0.742	1.391		
940	569	777*	443		
1.029	602				
117	626				
276	668				

Примечание. Звездочкой отмечена точка, где характеристики касаются звуковой линии.

Данные расчетов дают возможность построить в области влияния картину давления на контуре и вне тела, звуковую линию, характеристики, ударную волну и т. д. Аналогичным путем решается задача обтекания осесимметричного тела с отошедшей ударной волной.

Поступила 30 XI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. С м у р о в Г. С. Цилиндр в сверхзвуковом стационарном плоскопараллельном потоке газа. Труды ВВИА им. Жуковского, вып. 191, 1947.
2. M e l k u s H. Über den abgelösten Verdichtungsstoss, Ingenieur - Archiv., v. 19, No. 3, 1951.
3. B u s e m a n n A. A Review of Analytical Methods for the Treatment of Flows with Detached Shocks. N.A.C.A. T. N. 1858, 1949.
4. T a m a d a K. On Detached Shock Wave of Circular Cylinder and Sphere Moving with Supersonic Velocities. Tomotica Lab., Tech. Memo., № 25, 1950.
5. H i d a K. An Approximate Study on the Detached Shock Wave in front of a Circular Cylinder and a Sphere. Journal of the Physical Society of Japan, No. 8, 1053, v. 10, No. 1, 1955.
6. U c h i d a S. and Y a s u h a r a M. The Rotational Field Behind a Curved Shock Wave Calculated by the Method of Flux Analysis. Journal of the Aeronautical Sciences, v. 23, No. 9, 1956.
7. M i t c h e l l A. R. Application of Relaxation to the Rotational Field of Flow behind a Bow Shock Wave. Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 4, p. 3, 1951.
8. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых задач аэрогидродинамики. Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, т. 2, 1956.
9. Х р и с т и а н о в и ч С. А. О сверхзвуковых течениях газа. Труды ЦАГИ, вып. 543, 1941.
10. Г у р с а Э. Курс математического анализа. ГТТИ, т. 2, 1933.
11. K i m, C h u l — S o o. Experimental Studies of Supersonic Flow past a Circular Cylinder. Journal of the Physical Society of Japan, v. 11, No. 4, 1956.