Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ

Я. З. Клейман

(Москва)

Движения многокомпонентной среды рассматриваются в виде взаимнопроникающих движений компонент, составляющих данную среду, как было предложено Х. А. Рахматулиным [1]. Движение каждой компоненты аналогично движению в пористой среде. Наряду с понятием истинной плотности n-й компоненты $\rho_n{}^\circ$ пользуемся также понятием приведенной $\rho_n = M_n / W$ плотности n-й компоненты. Здесь M_n — масса n-й компоненты в объеме W среды.

Ограничиваемся рассмотрением таких сред, в которых давление в каждой точке может быть принято общим для всех компонент.

1. Соотношения на сильном разрыве. Пусть в пространстве, занятом смесью, состоящей из N компонент, распространяется поверхность сильного разрыва. Рассмотрим элемент dS поверхности разрыва в неподвижной прямоугольной системе координат, причем ось y направим параллельно нормали к рассматриваемому элементу в данный момент времени t. Обозначим через u_n, v_n, w_n проекции скорости $\mathbf{V}_n$ частиц n-й компоненты на оси координат, а через D — скорость перемещения элемента по нормали к нему.

Параметры среды перед поверхностью разрыва и за ней обозначим соответственно индексами $+$ и $-$. Выделим перед элементом dS поверхности разрыва в момент t элементарный объем среды $(D - v_{n+})\, dSdt$. Тогда через время dt все частицы n-й компоненты, содержавшиеся в момент времени t в выделенном объеме, окажутся за поверхностью разрыва.

Выделим теперь за элементом dS поверхности разрыва элементарный объем $(D - v_{n-})\, dSdt$ среды, содержащий те же самые частицы n-й компоненты. Очевидно, что масса n-й компоненты в обоих выделенных элементарных объемах одинакова, хотя массы остальных $N - 1$ компонент, вообще говоря, различны. Закон сохранения массы n-й компоненты на поверхности сильного разрыва можно написать в виде

$$(D - v_{n+})\, \rho_{n+} = (D - v_{n-})\, \rho_{n-} \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{1.1}$$

где ρ_{n+}, ρ_{n-} — приведенные плотности n-й компоненты до поверхности разрыва и за ней.

Напишем уравнения сохранения количества движения для выделенной массы n-й компоненты в проекциях на оси координат. Имея в виду, что при действии давления p на какую-либо площадку dS, выделенную в смеси, на долю n-й компоненты приходится сила $p(\rho_n/\rho_n^\circ)\,dS$, получим

$$\begin{aligned} &\rho_{n+}(D-v_{n+})^2+p_+\rho_{n+}/\rho_{n+}^\circ=\rho_{n-}(D-v_{n-})^2+p_-\rho_{n-}/\rho_{n-}^\circ \\ &\rho_{n+}(D-v_{n+})\,u_{n+}=\rho_{n-}(D-v_{n-})\,u_{n-} \qquad (n=1,\ldots,N) \\ &\rho_{n+}(D-v_{n+})\,w_{n+}=\rho_{n-}(D-v_{n-})\,w_{n-} \end{aligned} \tag{1.2}$$

В полученные соотношения не входят силы воздействия на n-ю компоненту со стороны остальных компонент, поскольку эти силы являются бесконечно малыми.

Систему уравнений (1.1), (1.2) дополним зависимостями

$$p_-=\varphi_n(\rho_{n-}^\circ,\ p_0,\ \rho_{0n}^\circ) \qquad (n=1,\ldots,N) \tag{1.3}$$

которые считаем известными, и соотношением

$$\sum_{n=1}^N\frac{\rho_{n-}}{\rho_{n-}^\circ}=1 \tag{1.4}$$

вытекающим из того, что величина $\rho_{n-}/\rho_{n-}^\circ$ есть часть объема среды, занимаемая n-й компонентой.

Необходимо иметь в виду, что такими же соотношениями связаны параметры компонент до поверхности разрыва:

$$\sum_{n=1}^N\frac{\rho_{n+}}{\rho_{n+}^\circ}=1, \qquad p_+=\varphi_n(\rho_{n+}^\circ,\ p_0,\ \rho_{0n}^\circ) \tag{1.5}$$

Величины p_0, ρ_{0n}° являются некоторыми начальными значениями давления и плотности, и, в частности, может быть

$$p_0=p_+,\quad \rho_{0n}^\circ=\rho_{n+}^\circ$$

Рассмотрим возможные типы разрывов в многокомпонентной среде. В случае, когда через поверхность разрыва нет потока среды, имеем

$$v_{n+}=v_{n-}=D \qquad (n=1,\ldots,N)$$

Тогда уравнение (1.1), а также последние два уравнения из системы (1.2) удовлетворяются при любых значениях ρ_{n+}, ρ_{n-}, u_{n+}, u_{n-}, w_{n+}, w_{n-}, а первое из уравнений (1.2) дает

$$p_-\rho_{n-}/\rho_{n-}^\circ=p_+\rho_{n+}/\rho_{n+}^\circ \qquad (n=1,\ldots,N)$$

Суммируя эти соотношения для всех N компонент и учитывая (1.4) и первое уравнение (1.5), получаем $p_-=p_+$. Тогда из предыдущего соотношения следует

$$\rho_{n-}/\rho_{n-}^\circ=\rho_{n+}/\rho_{n+}^\circ \qquad (n=1,\ldots,N) \tag{1.6}$$

Если проекции скоростей, касательные к поверхности разрыва, одинаковы по обеим сторонам разрыва: $u_{n+}=u_{n-}$, $w_{n+}=w_{n-}$ $(n=1,\ldots,N)$, а истинные плотности всех N компонент или некоторых из них (N_1) различны: $\rho_{n-}^\circ\neq\rho_{n+}^\circ$ $(n=1,\ldots,N_1)$, то разрыв по аналогии со случаем однокомпонентной среды можно назвать особым разрывом в многокомпонентной среде. В этом случае приведенные плотности соответствующих компонент также различны и удовлетворяют соотношениям (1.6).

Если значения хотя бы одной из касательных проекций скоростей не равны между собой с обеих сторон разрыва, то имеет место тангенциальный разрыв в многокомпонентной среде. При этом плотности могут быть как различными, так и одинаковыми.

Рассмотренные разрывы вполне аналогичны соответствующим разрывам в однокомпонентной среде. Однако в отличие от однокомпонентной среды в смеси могут распространяться разрывы, которые, будучи тангенциальными (по отношению к некоторым компонентам), являются в то же время ударными волнами. Действительно, пусть через поверхность разрыва нет потока некоторых компонент (N_1); тогда $v_{n+} = v_{n-} = D$ ($n = 1, \ldots, N_1$) и в силу последних двух уравнений из (1.2) для рассматриваемых N_1 компонент по-прежнему могут иметь место неравенства $u_{n-} \neq u_{n+}$, $w_{n-} \neq w_{n+}$ ($n = 1, \ldots, N_1$), т. е. имеем тангенциальный разрыв. Поскольку, однако, поток остальных компонент через данную поверхность разрыва имеет место, то эта поверхность является ударной волной и, в частности, можно получить, что $p_- \neq p_+$. Разрывы такого типа будем называть комбинированными разрывами.

Рассмотрим, например, случай движения двухкомпонентной среды, в которой имеется поток 1-й компоненты через поверхность разрыва и нет потока 2-й компоненты. Тогда из системы (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), написанной для этого случая, можно получить следующие соотношения:

$$(v_{2+} - v_{1+})^2 = \frac{p_- - p_+}{\rho_{1+}(1 - \rho_{1+}/\rho_{1-})} \tag{1.7}$$

$$\rho_{1-} = (1 - \varkappa)\rho_{1-}^{\circ}, \qquad \rho_{2-} = \varkappa\rho_{2-}^{\circ} \qquad \left(\varkappa = \frac{p_+\rho_{2+}}{p_-\rho_{2+}^{\circ}}\right) \tag{1.8}$$

$$(v_{2+} - v_{1+})^2 = \frac{(p_- - p_+)(1 - \varkappa)}{\rho_{1+}(1 - \varkappa - \rho_{1+}/\rho_{1-}^{\circ})} \tag{1.9}$$

$$v_{1-} - v_{1+} = (v_{2+} - v_{1+})\,\frac{1 - \varkappa - \rho_{1+}/\rho_{1-}^{\circ}}{1 - \varkappa} \tag{1.10}$$

Из (1.9) очевидно, что любому значению $p_- > p_+$ соответствует положительное значение $(v_{2+} - v_{1+})^2$ и, следовательно, при любом давлении $p_- > p_+$ можно указать величину разности скоростей компонент перед поверхностью разрыва $|v_{2+} - v_{1+}|$, при которой может распространяться комбинированный разрыв. При возрастании p_- величина $(v_{2+} - v_{1+})^2$ увеличивается, причем существует некоторое минимальное по абсолютной величине значение разности скоростей компонент $|v_{2+} - v_{1+}|_{\min}$, при котором возможно существование комбинированного разрыва. Это значение получим из (1.9), полагая $p_- \to p_+$ и раскрывая неопределенность типа $0/0$; тогда имеем

$$(v_{2+} - v_{1+})_{\min} = \pm\left(\frac{p_+\rho_{2+}^{\circ}\rho_{1+}^{\circ}}{\rho_{2+}\rho_{1+}^{\circ 2} + \rho_{1+}\rho_{2+}^{\circ}p_+/a_{1+}^2}\right)^{1/2} \tag{1.11}$$

где $a_{1+}^2 = \varphi_1'(\rho^{\circ}_{1+}, p_0, \rho_{01}^{\circ})$ является известной функцией, поскольку зависимость $p = \varphi_1(\rho_1^{\circ}, p_0, \rho_{01}^{\circ})$ задана.

В случае $|v_{2+} - v_{1+}| < |v_{2+} - v_{1+}|_{\min}$ существование комбинированного разрыва становится невозможным. Из (1.10) очевидно, что в случае $v_{2+} > v_{1+}$ ($v_{2+} < v_{1+}$) будем иметь

$$v_{1-} > v_{1+} \; (v_{1-} < v_{1+})$$

Поскольку $p_{-}/p_{+} > \rho_{2-}^{\circ}/\rho_{2+}^{\circ}$, то из второго выражения (1.8) следует

$$\rho_{2-} < \rho_{2+}$$

Из (1.7) очевидно, что $\rho_{1-} > \rho_{1+}$, так как в ином случае значение $v_{2+} - v_{1+}$ оказалось бы мнимым.

Еще одной особенностью смеси по сравнению с однокомпонентной средой является принципиальная возможность[1] существования в ней разрывов, по обе стороны которых давления и истинные плотности всех компонент одинаковы, хотя и существует поток компонент через поверхность разрыва. В этом случае приведенные плотности и скорости движения будут иметь разрыв.

Ограничимся для простоты случаем равенства скоростей всех компонент перед поверхностью разрыва ($v_{n+} = v_{+}$, $n = 1, \ldots, N$). Тогда, суммируя первые уравнения из системы (1.2) для всех N компонент и учитывая (1.1), (1.4) и первое уравнение (1.5), получим при $p_{-} = p_{+}$ соотношение

$$\sum_{n=1}^{N} \rho_{n+}(v_{n-} - v_{+}) = 0$$

Видим, что для части компонент на поверхности разрыва происходит увеличение скорости, а для остальных компонент — уменьшение ее.

Для двухкомпонентной среды из (1.1), (1.2), (1.4) легко получить

$$\begin{aligned}
v_{1-} - v_{+} &= \pm \frac{\rho_{2+}}{\rho_{1+}^{\circ}}\left(1 - \frac{\rho_{1+}^{\circ}}{\rho_{2+}^{\circ}}\right)\sqrt{\frac{p_{+}}{\rho_{1+} + \rho_{2+}}} \\
v_{2-} - v_{+} &= \mp \frac{\rho_{1+}}{\rho_{1+}^{\circ}}\left(1 - \frac{\rho_{1+}^{\circ}}{\rho_{2+}^{\circ}}\right)\sqrt{\frac{p_{+}}{\rho_{1+} + \rho_{2+}}} \\
D - v_{+} &= \mp \sqrt{\frac{p_{+}}{\rho_{1+} + \rho_{2+}}} \\
\rho_{1-} - \rho_{1+} &= -\frac{\rho_{2+}\rho_{1+}}{\rho_{2+} + \rho_{1+}}\left(1 - \frac{\rho_{1+}^{\circ}}{\rho_{2+}^{\circ}}\right) \\
\rho_{2-} - \rho_{2+} &= \frac{\rho_{2+}\rho_{1+}\rho_{2+}^{\circ}}{\rho_{1+}^{\circ}(\rho_{2+} + \rho_{1+})}\left(1 - \frac{\rho_{1+}^{\circ}}{\rho_{2+}^{\circ}}\right)
\end{aligned} \qquad (1.12)$$

Пусть для определенности $\rho_{2+}^{\circ} > \rho_{1+}^{\circ}$. Тогда $\rho_{1-} - \rho_{1+} < 0$, $\rho_{2-} - \rho_{2+} > 0$. Таким образом, на поверхности разрыва равного давления приведенная плотность более плотной компоненты увеличивается, а плотность менее плотной компоненты уменьшается. Увеличению скорости 1-й компоненты соответствует уменьшение скорости 2-й компоненты, и наоборот.

Из рассмотренных примеров можно заметить, что скорости и приведенные плотности компонент на поверхности разрыва в случае $p_{-} \geqslant p_{+}$, $\rho_{n-}^{\circ} \geqslant \rho_{n+}^{\circ}$ $(n = 1, \ldots, N)$ могут в многокомпонентной среде как увеличиваться, так и уменьшаться, хотя истинные плотности обеих компонент увеличиваются или не изменяются.

[1] Реальная возможность существования в течение какого-либо значительного промежутка времени этого разрыва связана с трудностями практического осуществления тех граничных условий, которые необходимы (см. далее) для его существования.

Из дальнейшего будет видно, что это справедливо не только для исследованных выше частных случаев разрывов.

Переходим теперь к рассмотрению ударных волн в многокомпонентной среде, т. е. таких разрывов, при которых имеет место поток всех компонент через поверхность разрыва, причем $p_- > p_+$.

Тогда из последних двух уравнений (1.2) следует

$$u_{n-} = u_{n+}, \qquad w_{n-} = w_{n+} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

Из системы оставшихся $3N + 1$ уравнений (1.1), (1.2), (1.3), (1.4)

$$(D - v_{n+})\rho_{n+} = (D - v_{n-})\rho_{n-}$$

$$\rho_{n+}(D - v_{n+})^2 + p_+\rho_{n+} / \rho_{n+}^\circ = \rho_{n-}(D - v_{n-})^2 + p_-\rho_{n-} / \rho_{n-}^\circ$$

$$p_- = \varphi_n(\rho_{n-}^\circ, \; p_0, \; \rho_{0n}^\circ) \quad (n = 1, \ldots, N) \tag{1.13}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_{n-}}{\rho_{n-}^\circ} = 1$$

определяются остальные $3N + 1$ параметров смеси за поверхностью разрыва (p_-, ρ_{n-}, ρ_{n-}°, v_{n-}; $n = 1, \ldots, N$) и скорость перемещения разрыва, если задано граничное условие, равносильное заданию одного какого-либо параметра за поверхностью разрыва.

Однако при изучении движений многокомпонентной среды часто возникают задачи, в которых граничное условие равносильно заданию нескольких параметров (задачи о поршне, о проникании тел в многокомпонентную среду и т. д.). В этом случае следует ожидать возникновения системы нескольких волн.

Рассмотрим подробнее случай ударных волн малой интенсивности; в этом случае соотношения на ударной волне можно линеаризировать.

2. Ударные волны малой интенсивности. Представим параметры среды за поверхностью ударной волны в виде $(n = 1, \ldots, N)$

$$p_- = p_+ + p', \quad \rho_{n-} = \rho_{n+} + \rho_n', \quad \rho_{n-}^\circ = \rho_{n+}^\circ + \rho_n^{\circ\prime}, \quad v_{n-} = v_{n+} + v_n'$$

где p', ρ_n', $\rho_n^{\circ\prime}$, v_n' считаем настолько малыми, что их произведениями можно пренебречь. Подставляя эти выражения в (1.13), отбрасываем произведения и квадраты малых величин. Тогда, имея в виду соотношения (1.5), получим следующую систему $3N + 1$ уравнений, однородных относительно $3N + 1$ неизвестных p', ρ_n', $\rho_n^{\circ\prime}$, v_n' $(n = 1, \ldots, N)$:

$$\rho_n'(D - v_{n+}) = v_n'\rho_{n+} \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

$$\rho_n'[(D - v_{n+})^2 + p_+ / \rho_{n+}^\circ] - 2v_n'\rho_{n+}(D - v_{n+}) + p'\rho_{n+} / \rho_{n+}^\circ -$$

$$- \rho_n^{\circ\prime} p_+\rho_{n+} / \rho_{n+}^{\circ 2} = 0 \tag{2.2}$$

$$p' = a_{n+}^2\rho_n^{\circ\prime} \qquad (a_{n+}^2 = \varphi_n'(\rho_{n+}^\circ, \; p_0, \; \rho_{0n}^\circ)) \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\rho_{n+}^\circ}\left(\rho_n' - \frac{\rho_{n+}}{\rho_{n+}^\circ}\rho_n^{\circ\prime}\right) = 0 \tag{2.4}$$

Условием существования ненулевых решений этой системы является равенство нулю ее определителя. Из этого условия определяются значения D, соответствующие ненулевым решениям. Получим это условие более просто. Подставим значение $\rho_n{}^{\circ\prime}$, получаемое из (2.3), в уравнения (2.4) и (2.2). Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\rho_{n+}{}^{\circ}} \left(\rho_n{}' - \frac{\rho_{n+}}{\rho_{n+}{}^{\circ} a_{n+}{}^2} p'\right) = 0 \tag{2.5}$$

$$\rho_n{}' \left[(D - v_{n+})^2 + \lambda_n{}^2\right] - 2 v_n{}' \rho_{n+} (D - v_{n+}) + p' \nu_n \rho_{n+} / \rho_{n+}{}^{\circ} = 0$$

где

$$\lambda_n{}^2 = \frac{p_+}{\rho_{n+}{}^{\circ}}, \qquad \nu_n = 1 - \frac{p_+}{\overset{\circ}{\rho}_{n+} a_{n+}{}^2}$$

Из последнего уравнения ввиду (2.1) будем иметь

$$\rho_n{}' = p' \frac{\rho_{n+} \nu_n}{\rho_{n+}{}^{\circ} \left[(D - v_{n+})^2 - \lambda_n{}^2\right]} \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{2.6}$$

Подставляя это выражение в (2.5), получим уравнение, являющееся условием существования ненулевых решений рассматриваемой системы:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_{n+}}{\rho_{n+}{}^{\circ 2}} \left[\frac{\nu_n}{(D - v_{n+})^2 - \lambda_n{}^2} - \frac{1}{a_{n+}{}^2}\right] = 0 \tag{2.7}$$

Это уравнение дает, вообще говоря, $2N$ значений D, причем количество действительных решений зависит от параметров среды перед поверхностью разрыва.

Из (2.1) и (2.6) получим соотношение, связывающее давление и скорость n-й компоненты за поверхностью разрыва:

$$p' = v_n{}' \frac{\rho_{n+}{}^{\circ} \left[(D - v_{n+})^2 - \lambda_n{}^2\right]}{\nu_n (D - v_{n+})} \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{2.8}$$

Из соотношения (2.1) видим, что если для n-й компоненты выполняется условие $D = v_{n+}$, то $v_n{}' = 0$. Из предыдущего параграфа очевидно, что в этом случае разрыв может быть комбинированным.

Из соотношения (2.8) следует, что если для n-й компоненты выполняется соотношение

$$D - v_{n+} = \pm \lambda_n \tag{2.9}$$

то $p' = 0$, т. е. имеет место разрыв равного давления. Но тогда в силу (2.8) выражение (2.9) справедливо для всех компонент.

Рассмотрим подробнее случай среды, состоящей из двух компонент. Тогда, вводя обозначения $D - v_{2+} = y$, $v_{2+} - v_{1+} = \Delta v$, получим на основании (2.7)

$$\Delta v = -y \pm \sqrt{\frac{Ay^2 - E}{Cy^2 - B}} \tag{2.10}$$

где

$$A=\frac{1}{\rho_{1+}{}^{\circ}}\left(\frac{\rho_{1+}}{\rho_{1+}{}^{\circ}}+\frac{p_{+}\rho_{2+}}{\rho_{2+}{}^{\circ 2}a_{2+}{}^{2}}\right),\qquad C=\frac{\rho_{2+}}{\rho_{2+}{}^{\circ 2}a_{2+}{}^{2}}+\frac{\rho_{1+}}{\rho_{1+}{}^{\circ 2}a_{1+}{}^{2}}$$

$$B=\frac{1}{\rho_{2+}{}^{\circ}}\left(\frac{\rho_{2+}}{\rho_{2+}{}^{\circ}}+\frac{p_{+}\rho_{1+}}{\rho_{1+}{}^{\circ 2}a_{1+}{}^{2}}\right),\qquad E=\frac{p_{+}}{\rho_{2+}{}^{\circ}\rho_{1+}{}^{\circ}} \tag{2.11}$$

Исследуем функцию (2.10). Ее асимптоты

$$y=-\Delta v\pm\sqrt{A/C},\qquad y=\pm\sqrt{B/C}$$

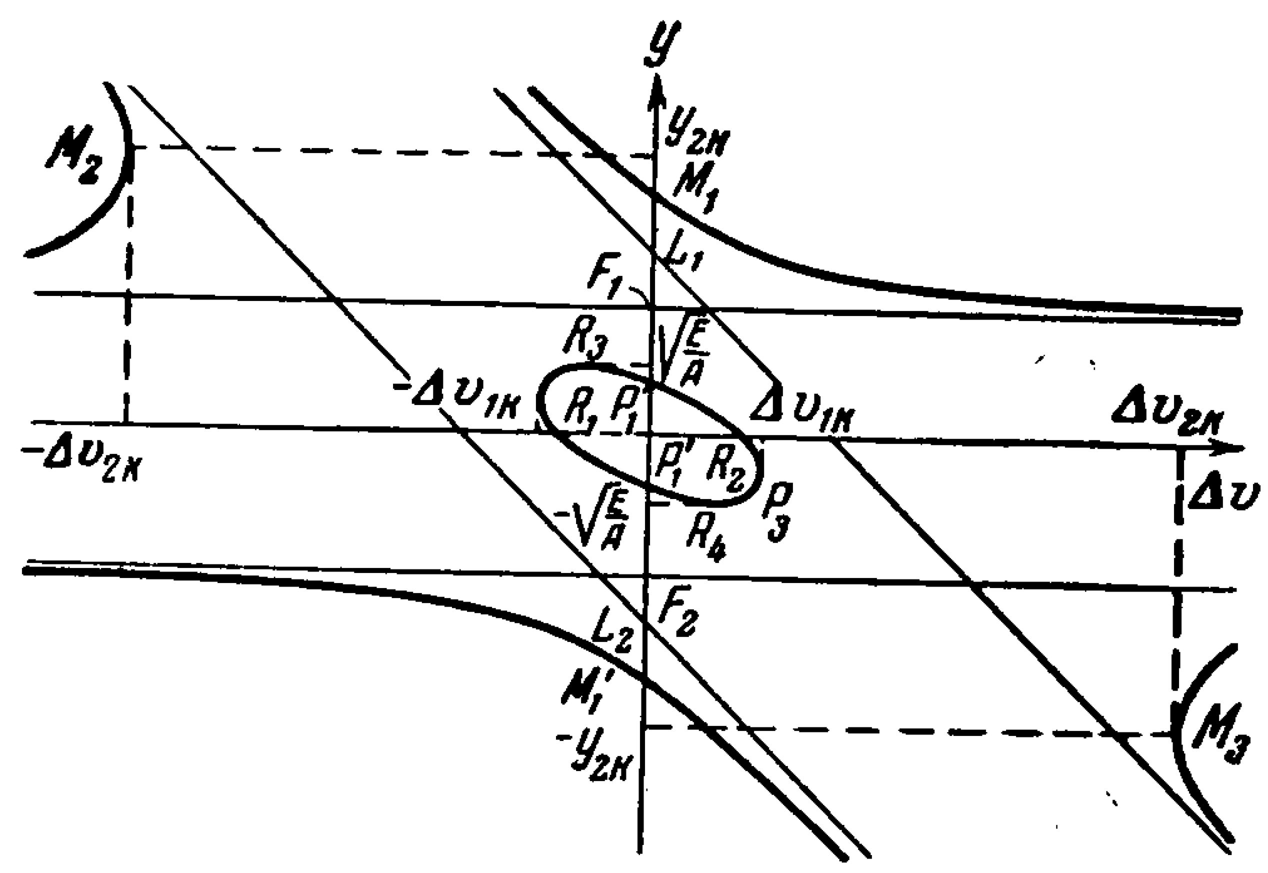
График, представленный на фигуре, изображает функцию (2.10) в случае выполнения неравенства

$$B/C>E/A \tag{2.12}$$

Легко показать, что это неравенство выполняется во всех случаях, представляющих практический интерес.

Для определения значений y, соответствующих случаю $\Delta v=0$, приравняем величине y^2 подкоренное выражение в формуле (2.10). Тогда получим

$$y^2=\frac{A+B\pm\sqrt{(A+B)^2-4EC}}{2C} \tag{2.13}$$



Из (2.12) вытекает, что $(A+B)^2>4EC$ и, следовательно, формула (2.13) дает четыре действительных значения скорости перемещения ударной волны малой интенсивности (точки M_1, M_1', P_1, P_1' на фигуре).

Из фигуры видим, что при значениях Δv, удовлетворяющих неравенствам

$$|\Delta v_{1k}|>|\Delta v|>0,\qquad |\Delta v|>|\Delta v_{2k}|$$

возможны четыре скорости перемещения ударных волн малой интенсивности, а в диапазоне

$$|\Delta v_{2k}|>|\Delta v|>|\Delta v_{1k}|$$

существуют только два действительных значения этой скорости. Значениям $|\Delta v|=|\Delta v_{1k}|$ и $|\Delta v|=|\Delta v_{2k}|$ соответствуют три различные величины y.

Эти критические значения разности скоростей $\pm\Delta v_{1k}$ и $\pm\Delta v_{2k}$ (точки P_2, P_3, M_2, M_3 на фигуре) являются экстремумами функции (2.10). Для их определения приравниваем нулю производную функции (2.10), откуда получим

$$\frac{A}{C}\left(\frac{B}{C}-\frac{E}{A}\right)^2 y_k{}^2=\left(y_k{}^2-\frac{E}{A}\right)\left(y_k{}^2-\frac{B}{C}\right)^3$$

Легко видеть, что существуют только два действительных значения y^2, удовлетворяющих этому уравнению. Из них $y_{1k}{}^2<E/A$ и $y_{2k}{}^2>B/C$, как и представлено на фигуре.

Точки R_1, $R_2(\Delta v = \mp\sqrt{E/B},\ y=0)$ и R_3, $R_4(\Delta v = \mp\sqrt{E/A},\ y = \pm\sqrt{E/A})$ соответствуют комбинированным разрывам малой интенсивности.

Выясним, как изменяются скорости перемещения ударных волн малой интенсивности в зависимости от количественного соотношения компонент в смеси. Рассмотрим случай равных скоростей компонент перед поверхностью волны (в частности, случай распространения волны в неподвижной смеси). Тогда из соотношений (2.8) для 1-й и 2-й компонент имеем

$$\frac{v_2'}{v_1'} = \frac{\rho_{1+}{}^\circ \nu_2 [(D-v_+)^2 - \lambda_1^2]}{\rho_{2+}{}^\circ \nu_1 [(D-v_+)^2 - \lambda_2^2]} \tag{2.14}$$

Нетрудно проверить, что при изменении величины $m = \rho_{1+}/\rho_{1+}{}^\circ$ в диапазоне

$$0 < m < 1 \tag{2.15}$$

функция (2.13) изменяется монотонно. Предельные значения функции (2.13), соответствующие переходу к однокомпонентной среде, следующие: $y_1^2 = a_{2+}^2$, $y_2^2 = \lambda_1^2$ для $m = 0$ и $y_1^2 = a_{1+}^2$, $y_2^2 = \lambda_2^2$ для $m = 1$.

Таким образом, с ростом содержания 1-й компоненты в смеси значение $y_1 = D_1 - v_+$ большей скорости распространения волн монотонно изменяется от величины, равной скорости звука в среде, состоящей только из 2-й компоненты, до величины скорости звука в среде, состоящей только из 1-й компоненты.

Существование предельных значений (при $m \to 0$, $m \to 1$) для меньшей скорости распространения волн $y_2 = D_2 - v_+$ не означает, разумеется, возможности существования в однокомпонентной среде второй скорости распространения возмущений, поскольку интенсивность волны, движущейся со скоростью D_2, стремится к нулю при переходе к предельным случаям.

Действительно, в случае, например, $m \to 0$, т. е. $(D_2 - v_+)^2 \to \lambda_1^2$, будем иметь $p' \to 0$, что вытекает из уравнения (2.8) для 1-й компоненты, и тогда из уравнения (2.8) для 2-й компоненты следует $v_2' \to 0$. Уравнения (2.1) и (2.3) в этом случае дают $\rho_2' \to 0$, $\rho_2{}^{\circ\prime} \to 0$.

Поскольку при значениях m, лежащих в диапазоне (2.15), величина $(D_2 - v_+)^2$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_1^2 > (D_2 - v_+)^2 > \lambda_2^2 \quad (\text{или } \lambda_1^2 < (D_2 - v_+)^2 < \lambda_2^2)$$

(ввиду ее монотонного изменения в рассматриваемом диапазоне), из соотношения (2.14) имеем $v_2'/v_1' < 0$. Следовательно, если на волне, распространяющейся со скоростью $D_2 - v_+$, происходит увеличение скорости одной из компонент, то скорость другой компоненты уменьшается. Но тогда из соотношения (2.1) следует, что при увеличении приведенной плотности одной из компонент происходит уменьшение приведенной плотности другой компоненты. Заметим, что уменьшение приведенной плотности компоненты не означает уменьшения ее истинной плотности: при $p' > 0$ всегда имеем $\rho_n{}^{\circ\prime} > 0$.

Очевидно, что для волны, распространяющейся со скоростью $D_1 - v_+$, имеет место $v_2'/v_1' > 0$ (поскольку $(D_1 - v_+)^2 > \lambda_1^2$, $(D_1 - v_+)^2 > \lambda_2^2$).

Пользуясь (2.13), найдем предельные значения производной для случая верхнего знака (соответствующего скорости D_1):

$$\left[\frac{d(y^2)}{dm}\right]_0 = -a_{2+}{}^4 \frac{\rho_{2+}{}^\circ}{\rho_{1+}{}^\circ}\left(\frac{1}{a_{1+}{}^2} - \frac{1}{a_{2+}{}^2}\right)\frac{a_{2+}{}^2 - \lambda_2{}^2}{a_{2+}{}^2 - \lambda_1{}^2} \qquad \text{для } m = 0$$

$$\left[\frac{d(y^2)}{dm}\right]_1 = -a^4{}_{1+} \frac{\rho_{1+}{}^\circ}{\rho_{2+}{}^\circ}\left(\frac{1}{a_{1+}{}^2} - \frac{1}{a_{2+}{}^2}\right)\frac{a_{1+}{}^2 - \lambda_1{}^2}{a_{1+}{}^2 - \lambda_2{}^2} \qquad \text{для } m = 1$$

Пусть 1-я компонента является газом, а 2-я компонента — плотной малосжимаемой средой (вода, песок и т. д.). Тогда $a_{2+} \gg a_{1+}$, $\rho_{2+}{}^\circ \gg \rho_{1+}{}^\circ$ и, следовательно, значение $[d(y^2)/dm]_0$ очень велико по абсолютной величине, причем $[d(y^2)/dm]_0 \gg [d(y^2)/dm]_1$. Это означает, что при наличии в плотной среде даже незначительного количества газа (воздуха) величина $D_1 - v_+$ скорости распространения волн очень резко падает по сравнению со скоростью звука в данной плотной среде, свободной от примеси газа; при сравнительно небольшом объемном содержании газа в плотной среде величина скорости распространения волны в данной двухкомпонентной среде уже приближается к величине скорости звука в газе. Если среда является смесью двух плотных компонент, то изменение величины $D_1 - v_+$ от значения a_{2+} до значения a_{1+} происходит более равномерно.

Для исследования зависимости величины $y^2 = (D - v_{2+})^2$ от количественного состава двухкомпонентной смеси при любых значениях Δv достаточно проследить, как деформируется график на фигуре 1 при изменении величины m в диапазоне (2.15).

Нетрудно показать, что характерные точки, указанные на графике, перемещаются монотонно, причем в предельных случаях график вырождается в прямые линии, соответствующие предельным положениям асимптот.

Рассмотрим теперь случай N-компонентной среды. Из уравнения (2.7), вводя обозначения

$$z_n = y + v_{N+} - v_{n+} \qquad (y = D - v_{N+}) \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{2.16}$$

получим

$$y = \pm\left(\frac{l_N}{\Phi} + \lambda_N{}^2\right)^{1/2} \tag{2.17}$$

где

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_{n+}}{\rho_{n+}{}^{\circ 2} a^2{}_{n+}} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{l_n}{z_n{}^2 - \lambda_n{}^2}, \qquad l_n = \frac{\rho_{n+}}{\rho_{n+}{}^{\circ 2}}\nu_n \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

Уравнения (2.16) и (2.17) описывают соответственно прямую линию и поверхность в N-мерном пространстве, заданном при помощи системы координат $(z_1, \ldots z_{N-1}, y)$. Точки их пересечения дают значения $z_1, \ldots, z_{N-1}, y$, по которым определяются скорости D перемещения волн.

Поверхность (2.17) легко исследовать, рассекая ее плоскостями, проходящими через ось y. Нетрудно, в частности, обнаружить, что существование наибольшего числа волн ($2N$) возможно при достаточно малых и при достаточно больших значениях разностей скоростей компонент.

Поступила 9 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.