Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

О БЕГУЩИХ ВОЛНАХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Ю. Я. Погодин, В. А. Сучков, Н. Н. Яненко
(Челябинск)

1. В работе [1] были рассмотрены простые бегущие волны системы квазилинейных уравнений вида

$$a_{ijk}(u_1, \ldots, u_m)\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

Назовем бегущей волной ранга r решение системы (1.1), удовлетворяющее $m - r$ функциональным зависимостям

$$\varphi_\alpha(u_1, \ldots, u_m) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m - r) \tag{1.2}$$

В данном определении бегущая волна ранга 1 совпадает с простой бегущей волной заметки [1].

В настоящей работе рассмотрены бегущие волны ранга $m - 1$. Может быть предложен следующий алгоритм для их нахождения. Пусть

$$u_m = \varphi(u_1, \ldots, u_{m-1}) \tag{1.3}$$

есть функциональная зависимость, определяющая бегущую волну ранга $m - 1$.

Из равенства (1.3) следует, что функции $u_\alpha(x_1, \ldots, x_m)$, $\alpha = 1, \ldots, m$ имеют общие линии уровня. Пусть эти линии удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_i}{\Delta_i} = \frac{dx_m}{1} \qquad (i = 1, \ldots, m - 1) \tag{1.4}$$

где Δ_i — некоторые функции от $x_1, \ldots, x_m$. Для любой функции $f(u_1, \ldots, u_m)$ должны иметь

$$\frac{\partial f}{\partial x_m} + \Delta_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m - 1) \tag{1.5}$$

Соотношения (1.3), (1.5) позволяют исключить в системе (1.1) функцию u_m и производные по x_m.

Подставляя (1.3), (1.5) в (1.1), получаем систему

$$L_i \equiv A_{i\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ \alpha, \beta = 1, \ldots, m - 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

где

$$A_{i\alpha\beta} = a_{i\alpha\beta} - a_{i\alpha m}\Delta_\beta + a_{im\beta}\varphi_\alpha - a_{imm}\varphi_\alpha\Delta_\beta, \quad \varphi_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \tag{1.7}$$

Система (1.6) представляет собой переопределенную систему, в коэффициенты которой входит как параметр переменное x_m. Выражая условие, что уравнения (1.6) имеют место при любом x_m, к (1.6) следует присоединить уравнения

$$\partial L_i / \partial x_m = 0 \tag{1.8}$$

Учитывая, что соотношения

$$\Delta_\gamma \frac{\partial L_i}{\partial x_\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots, m-1) \tag{1.9}$$

являются следствиями (1.6), уравнения (1.8) можно записать в виде

$$\delta L_i = 0 \tag{1.10}$$

$$\delta = \frac{\partial}{\partial x_m} + \Delta_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \qquad (\gamma = 1, \ldots, m-1) \tag{1.11}$$

Принимая во внимание (1.5), получаем соотношение

$$\delta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial \Delta_\gamma}{\partial x_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma} \tag{1.12}$$

После этого уравнения (1.10) представляются в виде

$$A_{i\alpha\beta}{}^{(1)} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \equiv \left(\delta A_{i\alpha\beta} - A_{i\alpha\gamma} \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial x_\gamma}\right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = 0 \tag{1.13}$$

Дальнейшие следствия

$$\frac{\partial^s L_i}{\partial x_m{}^s} = 0 \qquad (s = 2, \ldots) \tag{1.14}$$

приводят к уравнениям

$$A_{i\alpha\beta}{}^{(s)} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = 0 \tag{1.15}$$

где

$$A_{i\alpha\beta}{}^{(s)} = \delta A_{i\alpha\beta}{}^{(s-1)} - A_{i\alpha\gamma}{}^{(s-1)} \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial x_\gamma} \tag{1.16}$$

Если Δ_γ рассматриваются как явные функции от $x_1, \ldots, x_m$, то условия (1.15) представляют собой квазилинейные уравнения для u_α. Если Δ_γ являются функциями от $u_1, \ldots, u_{m-1}$, $x_1, \ldots, x_m$, то уравнения (1.15) будут степени $s+1$ относительно производных $\partial u_\alpha / \partial x_\beta$. В частности, когда Δ_γ — функции $u_1, \ldots, u_{m-1}$, выражения $A_{i\alpha\beta}{}^{(s)} \partial u_\alpha / \partial x_\beta$ будут формами степени $s+1$ относительно производных $\partial u_\alpha / \partial x_\beta$.

Дальнейшей задачей является исследование совместности системы (1.15), где можно формально положить

$$A_{i\alpha\beta}{}^{(0)} = A_{i\alpha\beta}$$

Таким образом, система (1.15) будет включать в себя уравнения (1.6), все следствия из них и определять бегущую волну.

В зависимости от степени произвола, который мы будем требовать от решения $u_i = u_i(x_1, \ldots, x_m)$, мы будем получать различные ограничения на φ_α, Δ_β и тем самым различные системы (1.15).

Произвол решения будет существенным образом зависеть от ранга системы (1.15). Под этим мы подразумеваем число существенно независимых уравнений в системе (1.15).

Аналогичный алгоритм может быть предложен в случае бегущих волн произвольного ранга.

2. Рассмотрим уравнения газовой динамики политропного газа:

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \qquad \left(p=\frac{a^2\rho^\gamma}{\gamma}\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \tag{2.2}$$

В адиабатическом случае, когда $a^2=a^2(s)\equiv\mathrm{const}$, переходя к переменным u_i, $\theta=[a^2/(\gamma-1)]\rho^{\gamma-1}$, получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}+u_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+(\gamma-1)\,\theta\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \tag{2.3}$$

В изотермическом случае $p=a^2\rho$, $a^2=RT=\mathrm{const}$, $\gamma=1$, $\theta=\ln\rho$ и уравнения (2.3) принимают вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+a^2\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}+u_k\frac{\partial\theta}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \tag{2.4}$$

Системы (2.3), (2.4) относятся к типу (1.1), поэтому к ним может быть применен алгоритм нахождения бегущей волны.

Рассмотрим бегущую волну ранга 2 плоского движения ($m=3$) политропного газа.

В нашем случае θ играет роль переменной u_3, а t — переменной x_3; система (1.6) принимает вид:

$$\begin{gathered}
(u_1-\Delta_1+\varphi_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+(u_2-\Delta_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\varphi_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+0\,\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0\\
0\,\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\varphi_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+(u_1-\Delta_1)\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+(u_2-\Delta_2+\varphi_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0\\
[(\gamma-1)\varphi+\varphi_1(u_1-\Delta_1)]\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\varphi_1(u_2-\Delta_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\varphi_2(u_1-\Delta_1)\frac{\partial u_2}{\partial u_1}+\\
+[(\gamma-1)\varphi+\varphi_2(u_2-\Delta_2)]\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Потребуем, чтобы при фиксированной функции $\varphi(u_1, u_2)$ бегущая волна обладала произволом двух функций одного аргумента. Для этого необходимо, чтобы ранг системы (2.5) равнялся 2. Из этого условия приходим к двум возможностям:

$$\begin{aligned}
&(\text{а}) \qquad \varphi_\alpha=\Delta_\alpha-u_\alpha=a_\alpha\ (\alpha=1,2)\\
&(\text{б}) \qquad a_1\varphi_1+a_2\varphi_2=0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$(a_1{}^2+a_2{}^2)[\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2-(\gamma-1)\varphi]-(\gamma-1)\varphi(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)=0 \tag{2.7}$$

Ограничимся случаем (а), который является основным. Из (2.6) следует, что линии уровня прямые и

$$\Delta_\alpha=\frac{\partial\Delta}{\partial u_\alpha}, \qquad \Delta=\varphi+\frac{u_1{}^2+u_2{}^2}{2} \tag{2.8}$$

Система (2.5) сводится к двум уравнениям:

$$L_i=A_{i\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}=0 \qquad (i,\ \alpha,\ \beta=1,\ 2) \tag{2.9}$$

где

$$A_{111} = A_{122} = 0, \qquad A_{112} = -A_{121} = 1$$

$$A_{2\alpha\beta} = (\gamma - 1)\,\varphi\delta_{\alpha\beta} - \varphi_\alpha\varphi_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \qquad (\delta_{\alpha\beta} \text{ — символ Кронекера}) \tag{2.10}$$

Уравнение $L_1 = 0$ означает, что движение является потенциальным. Условия $\delta L_i = 0$ дают

$$A_{i\alpha\beta}\Delta_{\gamma\sigma}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\gamma}\frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\beta} = 0, \qquad \Delta_{\gamma\sigma} = \frac{\partial^2\Delta}{\partial u_\gamma \partial u_\sigma} \tag{2.11}$$

Или, полагая $\partial\psi / \partial x_\alpha = u_\alpha$, где ψ — потенциальная функция, имеем

$$A_{i\alpha\beta}\Delta_{\gamma\sigma}\psi_{\alpha\gamma}\psi_{\sigma\beta} = 0 \tag{2.12}$$

Условия $\delta^2 L_i = 0$ имеют вид:

$$A_{i\alpha\beta}\Delta_{\gamma\sigma}\Delta_{\rho\omega}\psi_{\alpha\gamma}\psi_{\beta\rho}\psi_{\sigma\omega} = 0 \tag{2.13}$$

Нетрудно видеть, что все условия

$$\delta^s L_1 = 0 \tag{2.14}$$

выполняются тождественно.

Потребуем, чтобы уравнение $\delta L_2 = 0$ следовало из (2.9). Для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма δL_2 делилась на линейную L_2. Пользуясь уравнениями (2.9), условие $\delta L_2 = 0$ можно привести к виду

$$KL(\varphi) = 0 \tag{2.15}$$

где

$$K = \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}^2 \tag{2.16}$$

$$L(\varphi) = (\varphi_{11} + 1)[(\gamma - 1)\varphi - \varphi_2^2] + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_{12} + [(\gamma - 1)\varphi - \varphi_1^2](\varphi_{22} + 1) = 0 \tag{2.17}$$

Случай $K = 0$, как легко видеть, приводит к простым бегущим волнам (волны ранга 1). Таким образом, получаем для φ квазилинейное уравнение второго порядка

$$L(\varphi) = 0 \tag{2.18}$$

Условие $\delta^2 L_2 = 0$ с учетом уравнений $L_2 = 0$, $\delta L_2 = 0$ принимает вид:

$$KK_1L_2 = 0 \qquad (K_1 = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2) \tag{2.19}$$

Отсюда сразу следует, что условия

$$\delta^s L_2 = 0, \qquad s > 1$$

ничего нового не дают и уравнение (2.18) является достаточным условием того, что решение $u_i(x_1, x_2, t)$ обладает произволом двух функций одного аргумента.

Движение, соответствующее данному решению $\varphi(u_1, u_2)$ уравнения (2.18), может быть получено следующим образом. Пусть $U_1 = U_1(x_1, x_2)$, $U_2 = U_2(x_1, x_2)$ — решение системы (2.9), $\Delta(U_1, U_2)$ — функция, соответствующая $\varphi(U_1, U_2)$.

Проведем через каждую точку x_{10}, x_{20} плоскости $t = t_0$ луч

$$\frac{x_1 - x_{10}}{\Delta_1[U_1(x_{10}, x_{20}), U_2(x_{10}, x_{20})]} = \frac{x_2 - x_{20}}{\Delta_2]U_1(x_{10}, x_{20}), U_2(x_{10}, x_{20})]} = \frac{t - t_0}{1} \tag{2.20}$$

Вдоль каждого луча, проходящего через точку x_{10}, x_{20}, t_0, будем полагать

$$u_\alpha(x_1, x_2, t) = U_\alpha(x_{10}, x_{20}) \tag{2.21}$$

При этом всюду $\theta = \varphi(U_1, U_2)$. Тогда функции

$$u_\alpha(x_1, x_2, t), \qquad \theta(x_1, x_2, t) = \varphi[u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2(x_1, x_2, t)]$$

определяют искомую бегущую волну. В силу предположения $K \neq 0$ к уравнениям (2.9) можно применить преобразование годографа

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_\beta} = (-1)^{\alpha+\beta}\frac{1}{K}\frac{\partial u_{3-\alpha}}{\partial x_{3-\beta}} \tag{2.22}$$

Так как движение потенциальное, то $\partial x_1 / \partial u_2 = \partial x_2 / \partial u_1$ и можно ввести потенциальную функцию $X(u_1, u_2)$ такую, что

$$\frac{\partial X}{\partial u_\alpha} = x_\alpha(u_1, u_2) \tag{2.23}$$

Ясно, что $X(u_1, u_2)$ удовлетворяет уравнению

$$[(\gamma-1)\varphi - \varphi_1^2]\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} + 2\varphi_1\varphi_2\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} + [(\gamma-1)\varphi - \varphi_2^2]\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} = 0 \tag{2.24}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $\varphi(u_1, u_2)$ удовлетворяет уравнению (2.18), то соответствующая бегущая волна обладает произволом двух функций одного аргумента и выражается при помощи формул (2.20) — (2.23) через интеграл $X(u_1, u_2)$ уравнения (2.24).

3. Назовем коническим течением бегущую волну ранга 2, у которой прямые линии уровня проходят через одну и ту же точку x_{10}, x_{20}, t_0 фазового пространства x_1, x_2, t. Иными словами, конгруэнция прямых линий уровня является конической. Докажем, что полученные бегущие волны не являются, вообще говоря, коническими течениями.

Коническая конгруэнция имеет следующую инфинитезимальную характеристику: любая прямая конгруэнции пересекается любой прямой из полной бесконечно малой ее окрестности. Выражая этот факт, получаем следующие условия конического течения:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_2} \tag{3.1}$$

Отсюда следуют уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Delta_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \\ \Delta_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \Delta_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \Delta_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \Delta_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для того чтобы условия коничности соблюдались для любой бегущей волны, соответствующей данной функции $\varphi(u_1, u_2)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (3.2) являлись следствиями уравнений (2.9), т. е. равнялся 2 ранг матрицы $\|M\|$:

$$\|M\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ (\gamma-1)\varphi - \varphi_1^2 & -\varphi_1\varphi_2 & -\varphi_1\varphi_2 & (\gamma-1)\varphi - \varphi_2^2 \\ \Delta_{12} & 0 & \Delta_{22} & 0 \\ 0 & \Delta_{11} & 0 & \Delta_{12} \\ \Delta_{11} & 0 & 0 & -\Delta_{22} \end{Vmatrix}$$

Это возможно только при $\Delta_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha, \beta = 1{,}2$. Откуда, имея в виду (2.6), получаем

$$\varphi_{11} + 1 = 0, \qquad \varphi_{12} = 0, \qquad \varphi_{22} + 1 = 0 \tag{3.3}$$

$$\varphi = c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 - \tfrac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2), \qquad \Delta = c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 \tag{3.4}$$

В общем случае φ не удовлетворяет условиям (3.3) и условия коничности (3.2) представляют собой существенно новые уравнения. Для того чтобы коническое течение не было тривиальным, необходимо выполнение условия: ранг $\|M\| = 3$.

Нетрудно видеть, что все определители четвертого порядка матрицы M обращаются в нуль в силу условия (2.18).

Таким образом, для любого решения φ уравнения $L(\varphi) = 0$, кроме (3.4), матрица коэффициентов уравнений (2.9), (3.2) имеет ранг 3. Отсюда имеем

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} \Delta_{3-\alpha, 3-\beta}\ \mu \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{3.5}$$

где μ — некоторый множитель.

Применяя преобразование годографа из (3.5), получаем

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_\beta} = \mu_1 \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial u_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{3.6}$$

Отсюда сразу следует $\mu_1 = \mathrm{const} = c$, и

$$x_\alpha = c\Delta_\alpha + c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2), \qquad X = c\Delta + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 \tag{3.7}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (2.18), (2.24) удовлетворяются. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. В случае, когда $\varphi = c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 - {}^1/_2 (u_1^2 + u_2^2)$, все бегущие волны — конические течения. Для остальных решений φ уравнения $L(\varphi) = 0$ движения не являются, вообще говоря, коническими, но для любого φ в классе соответствующих бегущих волн имеется коническое течение, вполне определенное.

4. Применим полученные результаты к решению задачи о движении газа, ограниченного двумя плоскостями. Пусть в пространстве x_1, x_2, x_3 имеется бесконечный объем покоящегося газа, заключенный в момент $t \leqslant 0$ внутри угла между плоскостями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. В момент $t = 0$ плоскости начинают двигаться по закону

$$x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2) \tag{4.1}$$

Ясно, что движение будет двумерным, не зависящим от координаты x_3. В дальнейшем будем совмещать плоскость $x_3 = 0$ с плоскостью чертежа, плоскости $x_i = \mathrm{const}$ соответственно изобразятся координатными линиями.

В первом рассмотрении будем предполагать функции $f_i(t)$ такими, что до момента времени T в движении не появляются сильные разрывы. Тогда в некоторый момент времени $t < T$ в плоскости x_1, x_2 будем иметь следующую картину движения (фиг. 1).

В области I имеем покоящийся газ

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad \theta = \theta_0 = c_0^2 / (\gamma - 1) \tag{4.2}$$

В области II (вертикальная полоса выше AC) имеем одномерное движение, не зависящее от x_2 и являющееся простой бегущей волной (волна ранга 1), т. е. волной Римана, для которой имеют место известные соотношения:

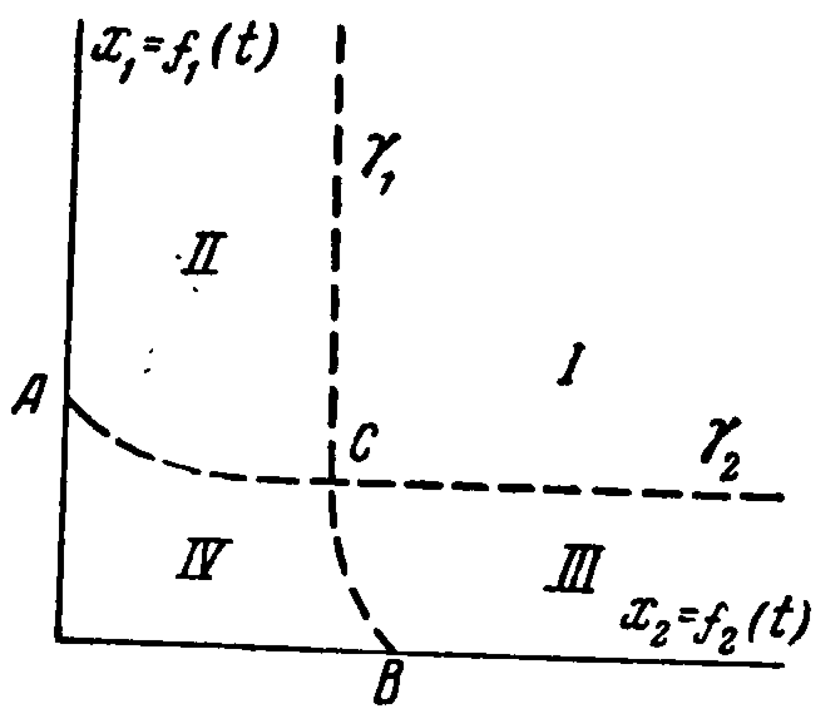
$$u_2 = 0, \qquad u_1 = g_1[x_1 - (u_1 + c)t], \qquad u_1 - \frac{2}{\gamma - 1} c = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0 \tag{4.3}$$

Линия γ_1, отделяющая область II от области I, будет прямой $x_1 = c_0 t$. В области III (горизонтальная полоса правее BC) также имеем одномерное движение, не зависящее от x_1 и являющееся волной Римана:

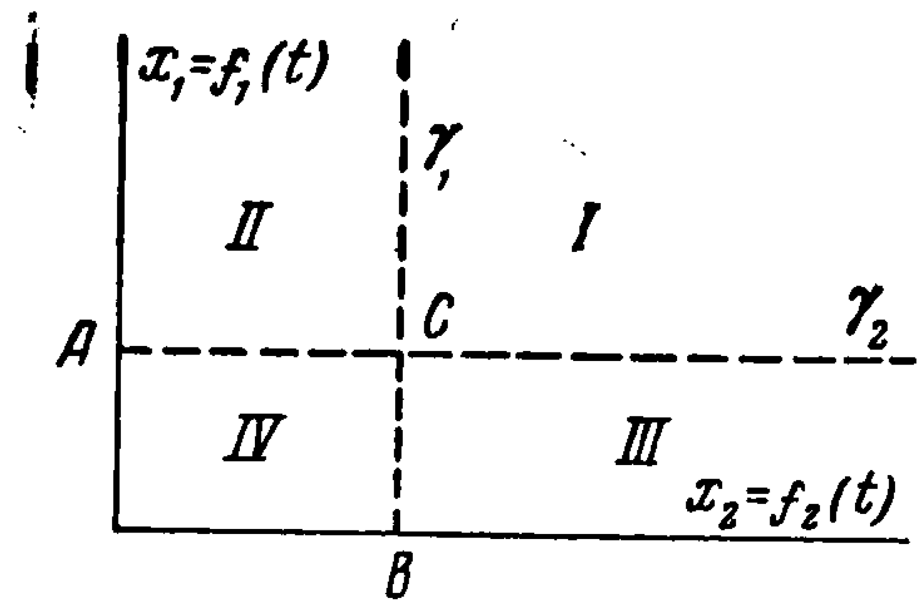
$$u_1 = 0, \qquad u_2 = g_2\,[x_2 - (u_2 + c)\,t], \qquad u_2 - \frac{2}{\gamma - 1}\,c = -\frac{2}{\gamma - 1}\,c_0 \tag{4.4}$$

Линия γ_2 — граница между областями I и III, есть прямая $x_2 = c_0 t$. В области IV будем искать движение в виде бегущей волны ранга 2.

Так как для любой функции $\varphi(u_1, u_2)$, являющейся решением уравнения $L(\varphi)=0$, бегущая волна ранга 2 обладает двухфункциональным произволом, то мы можем



Фиг. 1



Фиг. 2

удовлетворить краевым условиям $u_i = f_i(t)$, обладающим тем же произволом. Условием, фиксирующим функцию $\varphi(u_1, u_2)$, является условие непрерывного примыкания решения IV к решению II и III.

Нетрудно видеть, что они имеют вид:

$$\varphi(u_1, 0) = \frac{1}{\gamma - 1}\left[\frac{\gamma - 1}{2}\,u_1 + c_0\right]^2, \qquad \varphi(0, u_2) = \frac{1}{\gamma - 1}\left[\frac{\gamma - 1}{2}\,u_2 + c_0\right]^2 \tag{4.5}$$

Таким образом, φ должно определиться как решение уравнения $L(\varphi) = 0$, удовлетворяющее краевым условиям (4.5). Мы имеем задачу Гурса для квазилинейного уравнения второго порядка.

5. Рассмотрим изотермический газ. Тогда $\gamma = 1$, $\theta = \ln\rho$, $a^2 = RT = \mathrm{const}$. Для простоты мы положим $a^2 = 1$. Все результаты предыдущих пунктов автоматически переносятся на изотермический газ.

Краевая задача предыдущего пункта принимает вид:

$$L(\varphi) = (1 - \varphi_2^2)(\varphi_{11} + 1) + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_{12} + (1 - \varphi_1^2)(\varphi_{22} + 1) = 0 \tag{5.1}$$

$$\varphi(u_1, 0) = u_1 + \theta_0, \qquad \varphi(0, u_2) = u_2 + \theta_0 \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что решением этой задачи является функция

$$\varphi = u_1 + u_2 + \theta_0 \tag{5.3}$$

Функция $X(u_1, u_2)$ должна удовлетворять уравнению

$$(1 - \varphi_2^2)\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + 2\varphi_1\varphi_2\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} + (1 - \varphi_1^2)\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} = 0 \tag{5.4}$$

которое в случае (5.3) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \tag{5.5}$$

Отсюда сразу следует $x_i = x_i(u_i, t)$. Картина движения принимает вид, представленный на фиг. 2.

Отрезки AC и BC являются продолжением линий γ_2 и γ_1 соответственно; таким образом, области I — IV ограничены взаимно-ортогональными прямыми.

Уравнения прямых γ_1 и γ_2 соответственно

$$x_1 = t, \qquad x_2 = t \tag{5.6}$$

Далее имеем

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad \text{в обл. } I \tag{5.7}$$

$$u_2 = 0, \qquad u_1 = g_1(x_1, t) \qquad \text{в обл. } II \tag{5.8}$$

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = g_2(x_2, t) \qquad \text{в обл. } III \tag{5.9}$$

$$u_1 = g_1(x_1, t), \qquad u_2 = g_2(x_2, t) \qquad \text{в обл. } IV \tag{5.10}$$

$$\theta = u_1 + u_2 + \theta_0 \qquad \text{в обл. } I—IV \tag{5.11}$$

Функции $g_i(x_i, t)$ суть решения уравнений

$$u_i = F_i\,[x_i - (u_i + 1)\,t] \tag{5.12}$$

где функции $F_i(t)$ связаны с $f_i(t)$ соотношениями

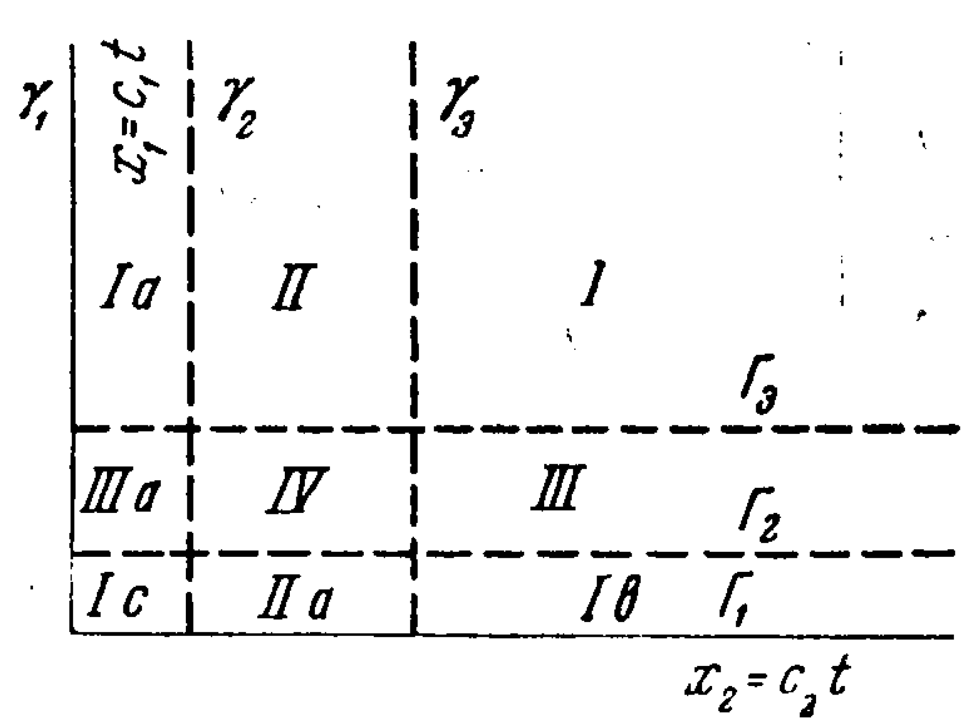
$$f_i'(t) = F_i\,[f_i(t) - (f_i' + 1)\,t] \tag{5.13}$$

Формулы (5.6) — (5.13) дают полное решение рассматриваемой задачи о движении изотермического газа, заключенного внутри прямого угла, в предположении отсутствия сильных разрывов. Прямые γ_1, γ_2 являются линиями слабого разрыва (разрыва производных $\partial u_i / \partial x_j$, $\partial u_i / \partial t$, $\partial\theta / \partial x_j$, $\partial\theta / \partial t$).

Конечно, при этом в областях II, III, IV могут быть еще и другие линии разрыва. Например, когда

$$f_i(t) = c_i < 0 \tag{5.14}$$

Картина движения имеет вид, представленный на фиг. 3.



Фиг. 3

В областях I, Ia, Ib, Ic имеем движение с постоянными параметрами:

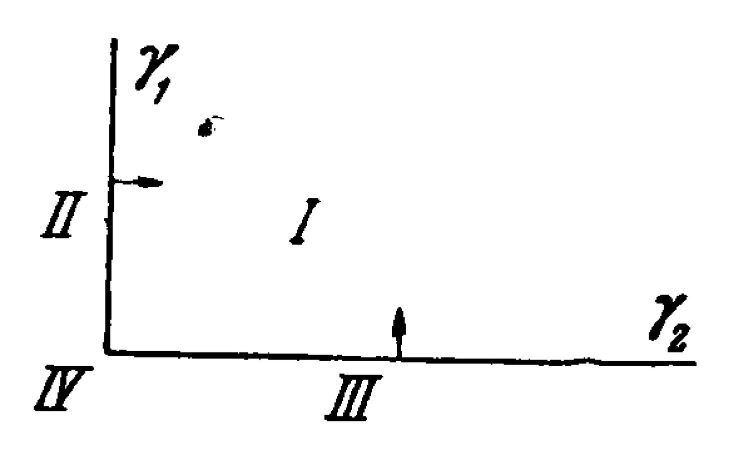
$$\begin{array}{llllll} (I) & u_1 = 0 & u_2 = 0; & (Ib) & u_1 = 0, & u_2 = c_2 \\ (Ia) & u_1 = c_1, & u_2 = 0; & (Ic) & u_1 = c_1, & u_2 = c_2 \end{array} \tag{5.15}$$

В областях II, IIa, III, $IIIa$ имеем простые бегущие волны (волны Римана):

$$\begin{array}{lll} (II) & u_1 = x_1/t - 1, & u_2 = 0 \\ (IIa) & u_1 = x_1/t - 1, & u_2 = c_2 \\ (III) & u_1 = 0, & u_2 = x_2/t - 1 \\ (IIIa) & u_1 = c_1, & u_2 = x_2/t - 1 \end{array} \tag{5.16}$$

В области IV имеем бегущую (коническую) волну ранга 2:

$$u_1 = x_1/t - 1, \qquad u_2 = x_2/t - 1 \tag{5.17}$$



Фиг. 4

Во всех областях имеет место соотношение (5.11). Линии γ_i, Γ_i, разделяющие указанные области, движутся по законам

$$\begin{array}{llll} (\gamma_1) & x_1 = c_1 t, & (\Gamma_1) & x_2 = c_2 t \\ (\gamma_2) & x_1 = (c_1 + 1)t, & (\Gamma_2) & x_2 = (c_2 + 1)\,t \\ (\gamma_3) & x_1 = t, & (\Gamma_3) & x_2 = t \end{array} \tag{5.18}$$

В целом движение является коническим (автомодельная или центрированная волна).

6. Рассмотрим теперь движения, содержащие сильные разрывы, ограничившись случаем изотермического газа.

Условия Гюгонио для изотермического газа с $a^2 = 1$ имеют вид:

$$u_1 - u_0 = M_0 - \frac{1}{M_0}, \qquad \theta_1 - \theta_0 = \ln M_0^2, \qquad M_0 = D - u_0 \tag{6.1}$$

Здесь индекс (0) относится к состоянию перед фронтом, (1) — за фронтом ударной волны. Нетрудно видеть, что устойчива и совместна конфигурация двух ударных фронтов, движущихся с постоянной скоростью по покоящемуся газу ортогонально друг другу (фиг. 4).

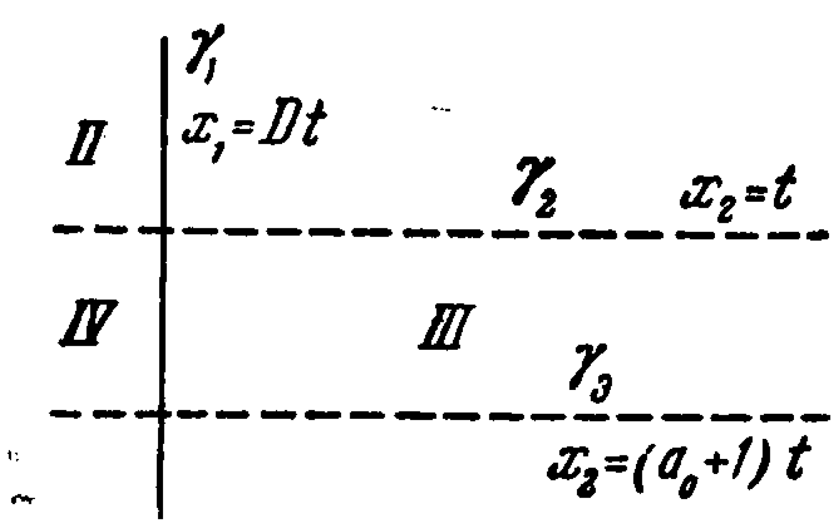
Если скорость фронта γ_1 равна D_1, а скорость фронта γ_2 равна D_2, то в силу (6.1) имеем

$$
\begin{array}{llll}
u_1 = D_1 - \dfrac{1}{D_1}, & u_2 = 0, & \theta = \theta_0 + \ln D_1^2 & \text{в обл. } II \\
u_1 = 0, & u_2 = D_2 - \dfrac{1}{D_2}, & \theta = \theta_0 + \ln D_2^2 & \text{в обл. } III \\
u_1 = D_1 - \dfrac{1}{D_1}, & u_2 = -\dfrac{1}{D_2} + D_2, & \theta = \theta_0 + \ln D_1^2 + \ln D_2^2 & \text{в обл. } IV
\end{array} \qquad (6.2)
$$

При этом условия совместности на всех ударных фронтах сохраняются.

Устойчивой и совместной является также конфигурация ударная волна (γ_1) — бегущая волна Римана (γ_2, γ_3) в случае, когда они распространяются во взаимно-ортогональных направлениях (фиг. 5).

Движение в этом случае характеризуется следующим образом:



Фиг. 5

$$
\begin{array}{llll}
(I) & u_1 = 0, & u_2 = 0, & \theta = \theta_0 \\
(II) & u_1 = D - \dfrac{1}{D}, & u_2 = 0, & \theta = \theta_0 + \ln D^2 \\
(III) & u_1 = 0, & u_2 = \dfrac{x_2}{t} - 1, & \theta = \theta_0 + u_2 \\
(IV) & u_1 = D - \dfrac{1}{D}, & u_2 = \dfrac{x_2}{t} - 1, & \theta = u_2 + \ln D^2 + \theta_0
\end{array} \qquad (6.3)
$$

Условия сопряжения выполняются на всех границах.

Движения, представленные на фиг. 4, 5, могут быть получены, когда одна из граней прямого угла движется с постоянной положительной скоростью, а другая или также с постоянной положительной скоростью, или по некоторому закону $x = f(t)$, обеспечивающему отсутствие сильного разрыва. Резюмируя исследования пп. 5, 6, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть грани прямого угла движутся по закону $x_i = f_i(t)$, $i = 1,2$. Тогда плоскость x_1, x_2 разбивается двумя взаимно-ортогональными прямыми γ_1, γ_2 на четыре области I — IV (фиг. 2), так что имеет место следующий закон движения:

$$
\begin{array}{llll}
u_1 = 0, & u_2 = 0 & \theta = \theta_0 & \text{в обл. } I \\
u_1 = g_1(x_1, t), & u_2 = 0 & \theta = \theta_0 + u_1 + c_1 & \text{в обл. } II \\
u_1 = 0, & u_2 = g_2(x_2 t) & \theta = \theta_0 + u_2 + c_2 & \text{в обл. } III \\
u_1 = g_1(x_1, t), & u_2 = g_2(x_2, t) & \theta = \theta_0 + u_1 + u_2 + c_3 & \text{в обл. } IV
\end{array}
$$

Это представление справедливо и в случае, когда хотя бы для одного i $f_i(t) = c_i > 0$. Тогда соответствующая граница γ_i есть ударная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью; в остальных случаях γ_i — линия слабого разрыва. Когда ударные волны отсутствуют, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Поступила 8 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, т. 109, № 1, 1956, стр. 44—47.