

**ЗАДАЧА КОШИ И ЗАДАЧА О ПОРШНЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ
НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА
(АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ)**

С. С. Григорян

(Москва)

Рассматриваются начальная автомодельная задача для уравнений одномерных неустановившихся движений идеального, нетеплопроводного, совершенного газа (задача Коши) и задача об автомодельных движениях газа с теми же свойствами, порождаемых симметричным расширяющимся в газе поршнем. Автомодельная постановка первой задачи была впервые дана Л. И. Седовым^[1], ее частные случаи рассматривались Л. И. Седовым^[2] (задача о фокусировании газа в точке и о разлете его от точки), А. С. Компанейцем^[4]. Вторая задача рассматривалась Л. И. Седовым^[2] для случая, когда скорость поршня постоянна, Н. Л. Крашенинниковой^[3] для случая, когда скорость поршня является степенной функцией времени.

В работе показано, что: 1) при некоторых заданиях начальных функций решение задачи Коши невозможно продолжить на все моменты времени t и 2) при некоторых значениях показателя степени в формуле для скорости поршня решение второй задачи не существует.

1. Задача Коши. Имеем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial r} + \frac{(\nu - 1) \rho u}{r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\rho \gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{\rho \gamma} \right) = 0$$

Начальные данные возьмем в виде

$$P(r, 0) = L_1 A r^\alpha, \quad \rho(r, 0) = N_1 B r^\beta, \quad u(r, 0) = M_1 \sqrt{\frac{A}{B}} r^{\frac{\alpha - \beta}{2}} \quad (r > 0) \quad (1.2)$$

а для движений с плоскими волнами еще

$$P(r, 0) = L_2 A (-r)^\alpha, \quad \rho(r, 0) = N_2 B (-r)^\beta$$

$$u(r, 0) = M_2 \sqrt{\frac{A}{B}} (-r)^{\frac{\alpha - \beta}{2}} \quad (r < 0) \quad (1.3)$$

где $\alpha, \beta, L_i, N_i, M_i$ ($i = 1, 2$) — отвлеченные постоянные числа, а A и B — размерные постоянные.

Задача (1.1), (1.2), (1.3) автомодельна^[1,2], и ее решение сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z}{(V - q)W} \{ [2(V - 1) + \nu(\gamma - 1)V](V - q)^2 - (\gamma - 1)V(V - 1)(V - q) - [2(V - 1) + \kappa(\gamma - 1)]z \} \quad (1.4)$$

$$q \frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{(V - q)^2 - z}{W} \quad (1.5)$$

$$(V - q) \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = q \frac{W}{z - (V - q)^2} + q(\beta + \nu)V \quad (1.6)$$

где

$$W = V(V-1)(V-q) + (\kappa - \nu V)z, \quad q = \frac{2}{2 - (\alpha - \beta)}, \quad \kappa = -\frac{\alpha}{\gamma}q, \quad (1.7)$$

$$u(r_1 t) = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad p(r_1 t) = B |r|^{\beta+2} t^{-2} P(\lambda) \quad (1.8)$$

$$\rho(r_1 t) = B |r|^{\beta} R(\lambda), \quad z = \gamma \frac{P}{R}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{A}{B}} t |r|^{\frac{\alpha-\beta}{2}}^{-1}$$

В силу теоремы Ковалевской исходная задача Коши, т. е. задача (1.1), (1.2) или (1.1), (1.2), (1.3), вблизи любой конечной точки оси $t = 0$, кроме, быть может, точки $r = 0$, имеет единственное аналитическое решение, поэтому решение системы (1.4), (1.5), (1.6) вблизи $\lambda = 0$ существует, единственно и аналитично по λ . При $t \rightarrow 0$ из (1.8) должны получаться формулы (1.2), т. е. функции V, P, R при $\lambda \rightarrow 0$ имеют следующие разложения:

$$V = M_1 \lambda + V_2 \lambda^2 + \dots, \quad P = L_1 \lambda^2 + P_3 \lambda^3 + \dots, \quad R = N_1 + R_1 \lambda + \dots \quad (1.9)$$

откуда следует, что интегральная кривая уравнения (1.4), соответствующая решению задачи Коши, должна проходить через точку $V = z = 0$ и иметь там асимптотическое представление

$$z = \frac{\gamma L_2}{N_1 M_1^2} V^2 + \dots \quad \text{при } M_1 \neq 0, \quad N_1 \neq 0 \quad (1.10)$$

$$z = -\frac{\gamma}{\alpha} V + \dots \quad \text{при } M_1 = 0, \quad \text{или } N_1 = 0$$

Для движений с плоскими волнами будем иметь еще

$$V = -M_2 \lambda + \dots, \quad P = L_2 \lambda^2 + \dots, \quad R = N_2 + \dots \quad (1.11)$$

$$z = \frac{\gamma L_2}{N_2 M_2^2} V^2 + \dots, \quad \text{или } z = -\frac{\gamma}{\alpha} V + \dots \quad (1.12)$$

Таким образом, решению задачи Коши должны соответствовать две интегральные кривые, которые вблизи точки $V = z = 0$ имеют асимптотические представления (1.10) и (1.12).

2. Для построения решения задачи необходимо произвести предварительное качественное изучение поля интегральных кривых уравнения (1.4) с тем, чтобы установить, куда возможно провести интегральную кривую, описываемую при малых V и z формулой (1.10) или (1.12), и где ее следует оборвать, чтобы исчерпать решение задачи.

Если интегральная кривая известна, то при помощи уравнения (1.5) можно рассчитать распределение λ вдоль этой кривой. Параметр λ должен при перемещении вдоль интегральной кривой из точки $V = z = 0$ монотонно возрастать до ∞ или до какого-нибудь значения, соответствующего движущейся границе области, занятой газом, если таковая в процессе движения возникает (поршень). Таким образом, задача Коши будет решена, если будет построена соответствующая интегральная кривая так, чтобы вдоль нее параметр λ , изменяясь монотонно, пробежал все множество значений, указанное выше.

Поле интегральных кривых и характер изменения λ вдоль них в самом общем случае автомодельного движения определяются при фикси-

рованных γ и ν лишь двумя параметрами q и κ [см. (1.4), (1.5)]. В случае автомодельной задачи Коши эти параметры выражаются через α и β по формулам (1.7), которые однозначно разрешаются относительно α и β

$$\alpha = -\gamma\kappa/q, \quad \beta = -\gamma\kappa/q - 2(1 - 1/q)$$

показывая, что поле интегральных кривых и распределение λ вдоль них для произвольного автомодельного движения являются одновременно таковыми для некоторой автомодельной задачи Коши. Поэтому можно, воспользовавшись хорошо изученными полями интегральных кривых некоторых специальных автомодельных задач, легко описать соответствующие задачи Коши.

Для задачи о сильном взрыве имеем $q = 2/(2 + \nu)$, $\kappa = 2\nu/\gamma(2 + \nu)$, что дает $\alpha = -\nu$, $\beta = 0$. В случае задач о распаде произвольного разрыва, о поршне, движущемся с постоянной скоростью, о распространении фронта горения и детонации, о фокусировании в точке и о разлете от точки газа [2] имеем $q = 1$, $\kappa = 0$, что дает $\alpha = \beta = 0$. Задача Коши в этом случае — это первая в случае движений с плоскими волнами и последняя из только что перечисленных. Она подробно и до конца изучена Н. Е. Кочиным и Л. И. Седовым [2].

В случае сильного взрыва в среде с переменной плотностью [2] имеем $q = 2/(5 - \omega)$, $\kappa = 6/\gamma(5 - \omega)$, что дает $\alpha = -3$, $\beta = -\omega$. Здесь $-\omega$ — показатель степени в формуле для начального степенного распределения плотности по координате. В случае задачи о движении газа [3], вытесняемого симметричным поршнем, расширяющимся со скоростью $U = ct^n$, будем иметь $q = n + 1$, $\kappa = -2n/\gamma$, что дает $\alpha = 2n/(n + 1)$, $\beta = 0$. Наконец, в работе [4] рассмотрена задача Коши в случае движения с плоскими волнами при $\alpha = \alpha$, $\beta = 0$ и специальных значениях отвлеченных постоянных чисел в формулах (1.2), [(1.3): $M_1 = M_2 = L_2 = 0$, $N_1 = N_2 = L_1 = 1$].

Исследование поля интегральных кривых без конкретизирования значений параметров q и κ при $\nu \neq 1$ — весьма громоздкая задача, ибо для отыскания координат некоторых из особых точек необходимо установить, сколько существует действительных корней у некоторого кубического уравнения, коэффициенты которого сложным образом зависят от q и κ , и найти эти корни. Однако в случае $\nu = 1$ кубическое уравнение вырождается в квадратное, и корни находятся в простом виде. Таким образом, для движений с плоскими волнами координаты всех особых точек известны в виде функций q и κ , и задача исследования поля интегральных кривых сильно упрощена. Характерными изоклинами являются:

$$\text{для } dz/dV = 0 \tag{2.1}$$

$$z = 0, \quad z = (V - q) \frac{(V - q) [2(V - 1) + \nu(\gamma - 1)V] - (\gamma - 1)V(V - 1)}{2(V - 1) + \kappa(\gamma - 1)} = f(V)$$

$$\text{для } dz/dv = \infty$$

$$V = q, \quad z = \frac{V(V - 1)(V - q)}{\nu V - \kappa} = f_2(V) \tag{2.2}$$

Точки пересечения этих изоклин являются особыми. В частности, таковыми являются точки перенесения кривых $z = f_1(V)$ и $z = f_2(V)$ (координаты остальных особых точек очевидны). Соотношение $f_1(V) = f_2(V)$ и дает после сокращения на $V - q$ кубическое уравнение.

В случае $\nu = 1$ это уравнение имеет следующие корни:

$$V_1 = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad V_2 = \frac{q\kappa}{q + \kappa - 1} \quad (2.3)$$

Соответствующими значениями z являются:

$$z_1 = -\frac{2(\gamma - 1)[2 - (\gamma + 1)q]}{(\gamma + 1)^2[2 - (\gamma + 1)\kappa]}, \quad z_2 = \left[\frac{q(q - 1)}{q + \kappa - 1} \right]^2 \quad (2.4)$$

Отметим, что особая точка $V = z = 0$ является узлом в самом общем случае. Пучок интегральных кривых, выходящих из этой точки, в силу асимптотики (1.10), (1.12) соответствует всевозможным заданиям начальных распределений. Поэтому, чтобы решить задачу Коши для всех начальных распределений, нужно довести каждую интегральную кривую этого пучка до точки, в которой либо $\lambda = \infty$, либо $\lambda = \lambda_\pi$, где λ_π — значение λ , соответствующее возникающей в процессе движения границе газа. Известно [2], что в плоскости V, Z точками, соответствующими такой границе, могут быть лишь точки прямой $V = q$. Значит, задача состоит в том, чтобы довести интегральные кривые пучка либо до особых точек $V = q$, $z = 0$, $z = \infty$, либо до таких особых точек, в которых $\lambda = \infty$ (включая бесконечно удаленные особые точки). При этом λ должно меняться вдоль интегральных кривых монотонно.

Известно [2], что на плоскости V, Z существует парабола

$$z = z_1 = (V - q)^2 \quad (2.5)$$

на которой при перемещении вдоль интегральных кривых, пересекающих ее, параметр λ достигает стационарного значения, т. е. $\partial\lambda/\partial s = 0$ (s — длина дуги интегральной кривой). Это значит, что если λ принимает на параболе (2.5) максимальное или минимальное значение λ_0 , то, так как при фиксированном r (или t) изменение λ соответствует изменению t (или r), переход вдоль интегральной кривой через параболу (2.5) соответствует загибанию интегральных поверхностей $u = u(r, t)$, $p = p(r, t)$, $\rho = \rho(r, t)$ обратно в область предшествовавшего переходу через параболу (2.5) изменения параметра t (или r), т. е. имеет место явление непродолжимости непрерывного решения на все моменты времени $t > 0$. Линия $\lambda = \lambda_0$ является границей области определения соответствующих непрерывных решений, «предельной линией». Но пересечение интегральной кривой, соответствующей решению задачи, с параболой (2.5) не всегда означает, что решение нельзя продолжить за линию $\lambda = \lambda_0$. Часто оказывается возможным перейти через параболу (2.5) скачком, что соответствует разрывным решениям — движениям с ударными волнами. Во всех рассмотренных до сих пор автомодельных движениях [2–4] это оказывалось возможным, причем разрывное решение строилось однозначным образом. Однако может случиться, что невозможно построить ни непрерывное, ни разрывное решение, в частности, это может иметь место при решении задачи Коши, в чем мы ниже убедимся.

3. Рассмотрим задачу Коши, для которой полем интегральных кривых является поле задачи о сильном взрыве.

1. *Случай $\nu \neq 1$.* Тщательное изучение поля интегральных кривых для $z > 0$ рисует нам следующую картину (фиг. 1). Все интегральные

кривые, выходящие пучком из начала координат, входят в особую точку $V = q = 2/(2 + \nu)$, $z = 0$, имея там наклон $-\gamma/(2 + \nu)$. Все остальные интегральные кривые, проходящие через точку $V = 2/(2 + \nu)$, $z = 0$, кроме прямых $z = 0$ и $V = 2/(2 + \nu)$, имеют в этой точке тот же наклон, причем все они, кроме одной, идут в особую точку $V = 2/(2 + \nu)$, $z = \infty$. Отмеченная исключительная интегральная кривая соответствует решению задачи о сильном взрыве и при $z \rightarrow \infty$ уходит в особую точку (седло) $V = 2/\gamma(2 + \nu)$, $z = \infty$. Уравнением этой кривой является ^[2]

$$z = \frac{(\gamma - 1) V^2 [V - 2/(2 + \nu)]}{2 [2/\gamma(2 + \nu) - V]} \quad (3.1)$$

Стрелки на интегральных кривых показывают направление роста λ вдоль них. Фиг. 1 показывает, что, поскольку все интегральные кривые, выходящие из начала координат, пересекают параболу (2.5), на которой λ достигает максимума, оставаясь конечной величиной, непрерывное решение задачи Коши непродолжимо на все значения $t > 0$.

Можно было бы построить разрывное решение задачи, продолжимое на все значения $t > 0$, если бы можно было скачком, согласным с условиями на ударной волне, перейти с интегральных кривых, выходящих из начала координат, на интегральные кривые, выходящие из точки $V = 2/(2 + \nu)$, $z = 0$ и идущие в точку $V = 2/(2 + \nu)$, $z = \infty$. Покажем, что это невозможно.

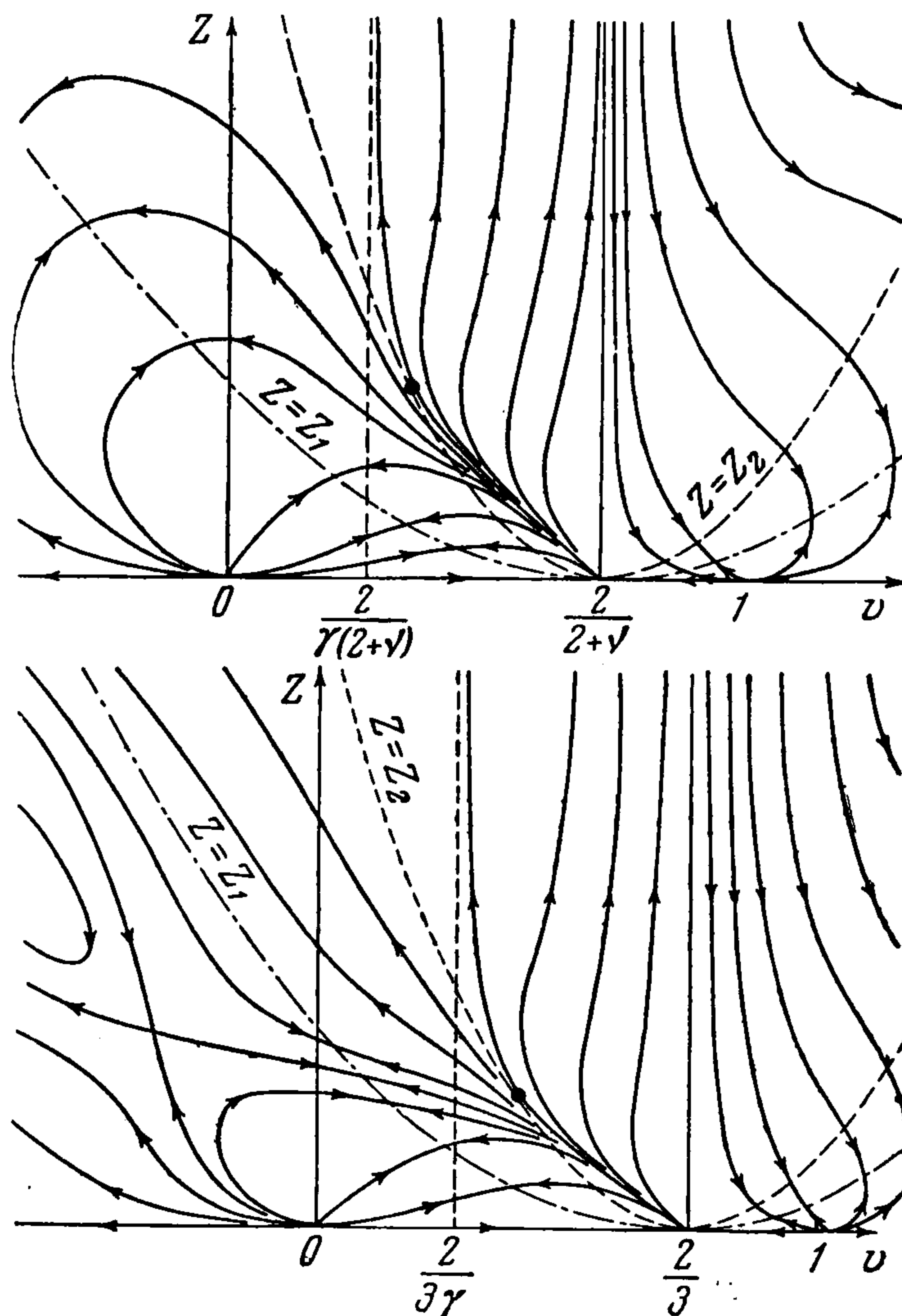
Так как соотношения на ударной волне отображают область между осью $z = 0$ и параболой (2.5) в область между этой же параболой и параболой

$$z = z_2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(V - \frac{2}{2 + \nu} \right)^2 \quad (3.2)$$

то достаточно показать, что указанные выше интегральные кривые, на которые нужно перейти скачком, целиком проходят вне этой последней области. Область, заполненная этими интегральными кривыми, слева ограничена интегральной кривой задачи о сильном взрыве (3.1), которая имеет только одну точку, общую с параболой (3.2), отличную от точки $V = 2/(2 + \nu)$, $z = 0$:

$$V = 4/(\gamma + 1)(2 + \nu), \quad z = 8\gamma(\gamma - 1)/(\gamma + 1)^2(2 + \nu)^2$$

что и доказывает наше утверждение.



Фиг. 1 и 2

2. *Случай* $\nu = 1$. Поле интегральных кривых для этого случая при условии $1 < \gamma < 2$ представлено на фиг. 2. Отличием его от поля случая $\nu \neq 1$ является наличие кривых, выходящих из точек $V = z = 0$ и $V = 2/3, z = 0$ и идущих в бесконечность при $V \rightarrow -\infty$, причем справедливы асимптотические формулы

$$z \approx CV^2, \quad \lambda \approx C_1 V^{\frac{3}{2}} \quad (C, C_1 = \text{const}) \quad (3.3)$$

Однако, ограничиваясь случаем симметричных начальных распределений, замечаем, что в этом случае решения задачи, продолжимого на все моменты $t > 0$, невозможно построить, так как по указанным кривым изображающая точка не может уйти в бесконечность, ибо в силу (3.3) и (1.8) было бы $u(0, t) \neq 0$, что противоречит очевидному условию симметрии.

Таким образом, приходим к выводу о том, что автомодельная задача Коши в случае, когда поле интегральных кривых совпадает с таковым для задачи о сильном взрыве, не имеет решения, продолжимого на все моменты времени $t > 0$.

4. Рассмотрим задачу об автомодельных движениях газа, вытесняемого расширяющимся по степенному закону симметричным поршнем [3]. Поле интегральных кривых для задачи о поршне совпадает с таковым для задачи о сильном взрыве, если $n = -\nu/(2 + \nu)$. Чтобы построить решение задачи о поршне, нужно найти интегральную кривую (непрерывную или с разрывом), проходящую через точку $V = z = 0$ (соответствующую области в физическом пространстве, в которую еще не пришли возмущения) и некоторую точку прямой $V = 2/(2 + \nu)$ (соответствующую поршню) [2, 3], и чтобы параметр λ изменялся вдоль нее монотонно. Однако, обращаясь к фиг. 1, 2, можно заметить, что таких интегральных кривых не существует. В самом деле, как мы выше установили, область, в которую можно попасть скачком с интегральных кривых, выходящих из начала координат, соприкасается с интегральной кривой задачи о сильном взрыве только в одной точке, являющейся образом начала координат, поэтому интегральные кривые, по которым можно было бы прийти на прямую $V = 2/(2 + \nu)$, остаются вне этой области.

Таким образом, задача о поршне в случае $n = n_0 = -\nu/(2 + \nu)$ не имеет решения.

Выясним, что будет происходить с вопросом о разрешимости задачи о поршне, если n будет меняться в окрестности $n = n_0$. Изучение поля интегральных кривых задачи о поршне показывает, что при n , близком к n_0 , характер особых точек и расположения интегральных кривых сохраняются такими, каковы они при $n = n_0$. При $n = n_0$ кривые (3.1) и (3.2) касаются в точке

$$V = V_0 = \frac{4}{(\gamma + 1)(2 + \nu)}, \quad z = z_0 = \frac{8\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2(2 + \nu)^2}$$

При n , близких к n_0 , существует интегральная кривая (единственная), проходящая через точки $V = n + 1, z = 0$ и $V = -2n/\nu\gamma, z = \infty$; эта кривая при $n = n_0$ совпадает с кривой (3.1). Как и при $n = n_0$, эта

кривая отделяет слева область, заполненную интегральными кривыми, выходящими из точки $V = n + 1$, $z = 0$ и уходящими в точку $V = n + 1$, $z = \infty$. Парабола

$$z = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} [V - (n + 1)]^2 \quad (4.1)$$

совпадающая с (3.2) при $n = n_0$, отделяет справа область, в которую можно попасть скачком с интегральных кривых, выходящих из начала координат. При $n = n_0$ эти кривые имеют общую точку касания, и поскольку правые части уравнений этих кривых являются аналитическими функциями параметра n при n , близких к n_0 [для первой кривой это следует из аналитичности дифференциального уравнения (1.4), определяющего ее ^[5], для второй это видно из ее явного уравнения (4.1)], то разность этих правых частей имеет при $V = V_0$ в точке $n = n_0$ изолированный нуль. Если бы можно было доказать, что этот нуль простой, то это означало бы, что при изменении n в одну сторону от n_0 (именно при возрастании, как показывают расчеты, проведенные в работе ^[3]) кривые пересекаются, т. е. у указанных выше областей возникает общая часть и становится возможным построить единственное разрывное решение задачи; при изменении n в другую сторону (уменьшении) кривые более не имеют общих точек, а области — общей части, поэтому решение задачи перестает существовать.

В работе ^[3] для некоторых значений $n > n_0$ построено решение, а при двух значениях $n \leq n_0$ ($n = -0.5$, $\nu = 1$, $\nu = 2$) решение построить оказалось невозможным. В этой работе, в частности, построено решение (численным интегрированием) при $n = -0.5$, $\nu = 3$, т. е. при $n - n_0 = 0.1$; это показывает, что указанный выше нуль, если и не простой и не первый, встречающийся при убывании n , то следующий нуль, больший n_0 , достаточно близок к нему (не дальше, чем на 0.1).

В работе Г. Г. Черного ^[6] при решении этой задачи его приближенным методом было установлено, что при приближении n к n_0 сверху члены ряда, дающего решение задачи, становятся одного порядка, т. е. ряд начинает расходиться. Это, как мы теперь можем видеть, говорит не о том, что приближенный метод делается при $n = n_0$ непригодным для построения решения задачи, а связано с тем, что решения задачи при $n \leq n_0$ вообще не существует. С другой стороны, так как расходимость ряда наступает именно при $n = n_0$, а не раньше (при приближении n к n_0 сверху), то это показывает (хотя и не доказывает строго), что рассматриваемый нуль является простым и первым сверху, т. е. решение задачи перестает существовать именно с $n = n_0$, а не раньше.

Таким образом, можем сформулировать следующее утверждение.

Решения задачи о движении идеального нетеплопроводного совершенного газа, вытесняемого симметричным поршнем, имеющим скорость $U = Ct^n$, при $-1 < n \leq -\nu/(2 + \nu)$ не существует. При $n > -\nu/(2 + \nu)$ существует единственное разрывное решение задачи.

5. Предыдущие рассуждения показывают, что при решении некоторых начальных и начально-краевых задач о движении идеального, нетеплопроводного, совершенного газа решение построить оказывается не-

возможным. В этих случаях для начальной задачи решение существует лишь вблизи оси $t = 0$. В пространстве переменных r, t возникают предельные линии, как мы можем их назвать [в силу аналогии с подобным явлением, известным для адиабатических установившихся плоских движений газа, и за эти линии решение задачи невозможно продолжить.

В рассматриваемом классе начальных задач начальные функции неограниченны при $r = \infty$ или при $r = 0$. Л. И. Седовым было высказано предположение, что в случае, когда при неограниченных в точке $r = 0$ начальных функциях задача Коши не имеет решения, продолжимого на все моменты времени $t > 0$, это связано с тем, что либо начальная масса, либо начальная энергия газа в окрестности точки $r = 0$ неограниченны. Рассмотрение частных случаев подтверждает это предположение, в чем мы сейчас убедимся. Было бы интересным проверить это предположение в общем случае.

Легко установить, что условия ограниченности начальных массы и энергии в окрестности точки $r = 0$ сводятся к $\alpha > -\nu, \beta > -\nu$.

Рассмотрим задачу Коши с полем интегральных кривых, совпадающим с полем задачи о поршне, для n , близких к n_0 . Выше мы установили, что решения этой задачи не существует при $n = n_0$. Из рассуждений относительно характера поля интегральных кривых вблизи $n = n_0$, проведенных выше, следует, что решение задачи Коши не существует также и при $n < n_0$, но при $n > n_0$ можно сделать скачок на интегральные кривые, идущие в точку $V = n + 1, z = \infty$, и на единственную кривую, идущую в точку $V = -2n/\nu\gamma, z = \infty$. При этом, если указаны кривая, с которой делается скачок, и кривая, на которую делается скачок, то этот скачок возможно сделать единственным образом. Рассмотрение асимптотических формул для решения около точки $V = n + 1, z = \infty$ показывает, что решения со скачком на кривые, приводящие в эту точку, соответствуют не задаче Коши, а задаче Коши с поршнем, раздвигающимся из центра симметрии по закону $\lambda(r, t) = \lambda^*$, ибо в точке $V = n + 1, z = \infty$ получают конечные значения для λ и давления. Задаче Коши соответствует скачок на упомянутую единственную кривую, ибо по асимптотическим формулам [вблизи точки $V = -2n/\nu\gamma, z = \infty$ получается, что в этой точке $\lambda = \infty$, т. е. $r = 0$, и $u(0, t) = 0$. Таким образом, мы видим, что при $n > n_0$ задача Коши имеет единственное разрывное решение и не имеет решения при $n \leq n_0$. В этом случае $n = n_0$ соответствует $\alpha = -\nu$, т. е. решение перестает существовать, когда нарушается условие ограниченности начальной энергии в окрестности $r = 0$, т. е. подтверждается гипотеза Л. И. Седова.

Выясним, что происходит с решением, когда $n \rightarrow n_0 + 0$. Легко показать, что при этом точки на интегральных кривых, с которых делается скачок, стягиваются к точке $V = z = 0$. λ меняется на скачке непрерывно, в точке $V = z = 0$ $\lambda = 0$, значит, и в образе этой точки тоже $\lambda = 0$. Но этот образ не есть особая точка, поэтому $\lambda = 0$ на всей интегральной кривой, на которую делается скачок при $n = n_0$, кроме особой точки $V = -2n_0/\nu\gamma, z = \infty$. Пользуясь условиями на ударной волне, можно найти распределения $z(V), R(V), P(V)$ при $n = n_0$ (они находятся в элементарных функциях и даны в [2]). Для перехода от

аргумента V к λ используем функцию $V(\lambda)$. При $n = n_0$ она такова: $V = -2n_0/\nu\gamma$, $\lambda \neq 0$ и $V = V$, $\lambda = 0$. Значит, во всем пространстве Z, P, R не зависят от λ . Чтобы найти эти величины, нужно подставить в $Z(V), R(V), P(V)$ (формулы (7.15)—(7.17), (7.14), гл. 4 книги [2]) $V = -2n_0/\nu\gamma$, что дает $Z = \infty, R = 0, P = \infty$. Это и есть тот предел, к которому стремится решение при $n \rightarrow n_0 + 0$.

Аналогично можно проследить за поведением решения задачи о поршне при $n \rightarrow n_0 + 0$. Предельная интегральная кривая состоит из (3.1) и отрезка $z = \infty, -2n_0/\nu\gamma \leq V \leq n_0 + 1$, распределения λ и R по нему:

$$\lambda = \lambda_{n_0} = (n_0 + 1) (n_0 + 1 + 2n_0/\nu\gamma)^{-\frac{1}{\nu}} (V + 2n_0/\nu\gamma)^{\frac{1}{\nu}} \quad (5.1)$$

$$R = c [(n_0 + 1 - V)/(V + 2n_0/\nu\gamma)]^{\frac{1}{\nu-1}} \quad (C = \text{const}) \quad (5.2)$$

причем удовлетворено условие $\lambda_{\text{поршня}} = n_0 + 1$.

Из (5.1) видно, что $\lambda = 0$ при $V = -2n_0/\nu\gamma, z = \infty$. А поскольку λ должно расти монотонно вдоль всей интегральной кривой, описывающей решение, то $\lambda = 0$ и всюду на части этой кривой, совпадающей с (3.1). Распределения $Z(V), R(V), P(V)$ вдоль (3.1) нужно непрерывно сопрячь с распределениями вдоль отрезка $z = \infty, -2n_0/\nu\gamma \leq V \leq n_0 + 1$, что дает для постоянной C значение $C = 0$, ибо из $R(V)$ вдоль (3.1) следует $R(-2n_0/\nu\gamma) = 0$. Предельным решением является $Z = \infty, P = \infty, R = 0, \lambda = \lambda_{n_0}$.

Смысл этого решения следующий. Поскольку на ударной волне $\lambda = 0$, ударная волна мгновенно уходит в бесконечность, оставляя за собой распределение параметров в виде

$$u = \frac{r}{t} V(\lambda)|_{t \rightarrow +0} = \infty, \quad p = \infty, \quad \rho = 0$$

Поскольку при этом давление на поршне, как [и всюду, равно бесконечности, то для осуществления его движения по предписанному закону с $n = n_0$ требуется затрачивать бесконечную работу. Таким образом, при $n \leq n_0$ двигать поршень по закону $r = [c/(n+1)] t^{n+1}$ невозможно, т. е. постановка задачи при этих значениях n теряет смысл. В этом смысле отсутствия решения задачи о поршне при $n \leq n_0$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Л. И. Седову за проявленное внимание к настоящей работе.

Поступила 27 VII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, т. 9, вып. 4, 1945.
2. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеоретиздат, М., 1954.
3. К р а ш е н и н н и к о в а Н. Л. О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1955.
4. К о м п а н е е ц А. С. Автомодельная задача о развитии ударной волны из волны сжатия. ДАН СССР, т. 107, № 1.
5. С т е п а н о в В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1950.
6. Ч е р н ы й Г. Г. Одномерные неустановившиеся движения совершенного газа с сильными ударными волнами. ДАН СССР, т. 107, № 5.