Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

К. Магнус

(Фрайбург, ГФР)

Условия устойчивости вертикального положения тяжелого симметричного гироскопа (случай Лагранжа) выведены Н. Г. Четаевым [1] по второму методу Ляпунова без каких-либо приближенных допущений, как это имеет место, например, в методе малых колебаний. В. В. Румянцев [2] нашел соответственные условия для случая Ковалевской. Эти результаты в настоящей заметке дополняются нахождением устойчивости вертикального положения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. Эта задача является обобщением случая Лагранжа, и мы покажем, что существуют новые эффекты, о которых в частном случае астатического быстро вращающегося гироскопа уже упоминал Е. Л. Николаи[3].

1. Постановка задачи. Предполагаем, что гироскоп лежит в кардановом подвесе (см. фигуру) таким образом, что внешняя ось кардановой системы вертикальна, т. е. совпадает с направлением силы тяжести. Трением в подвесах кардановой системы пренебрегаем. Система состоит из ротора, внутреннего и внешнего колец и имеет три степени свободы. Ее положение вполне может быть определено при помощи трех координат. Возьмем в качестве координат углы Эйлера φ, ψ, ϑ, которые можно непосредственно видеть у кардановой системы, если принять за исходное положение то, при котором плоскости обоих кардановых колец совпадают. Предполагаем, соответственно случаю Лагранжа, что центр тяжести частной системы ротор + внутреннее кольцо лежит на оси ротора на расстоянии s от неподвижной точки подвеса. Считаем это расстояние положительным, если в нулевом положении системы центр тяжести лежит выше неподвижной точки; что касается центра тяжести внешнего кольца, то о нем ничего не надо предполагать. В нулевом положении $\psi = \vartheta = 0$ моментами инерции вокруг осей x, y, z координатной системой, показанной на фигуре, являются главные моменты инерции, которые обозначаем следующим образом:

A_1,	$B_1 = A_1$,	C_1	для ротора
A_2,	B_2	C_2	для внутреннего кольца
—	—	C_3	для внешнего кольца

2. Исходные интегралы. Задача Лагранжа о движении тяжелого симметричного гироскопа приводит к квадратурам потому, что удается найти три первых интеграла уравнений движения. Эти интегралы имеют наглядный физический смысл. Они выражают:

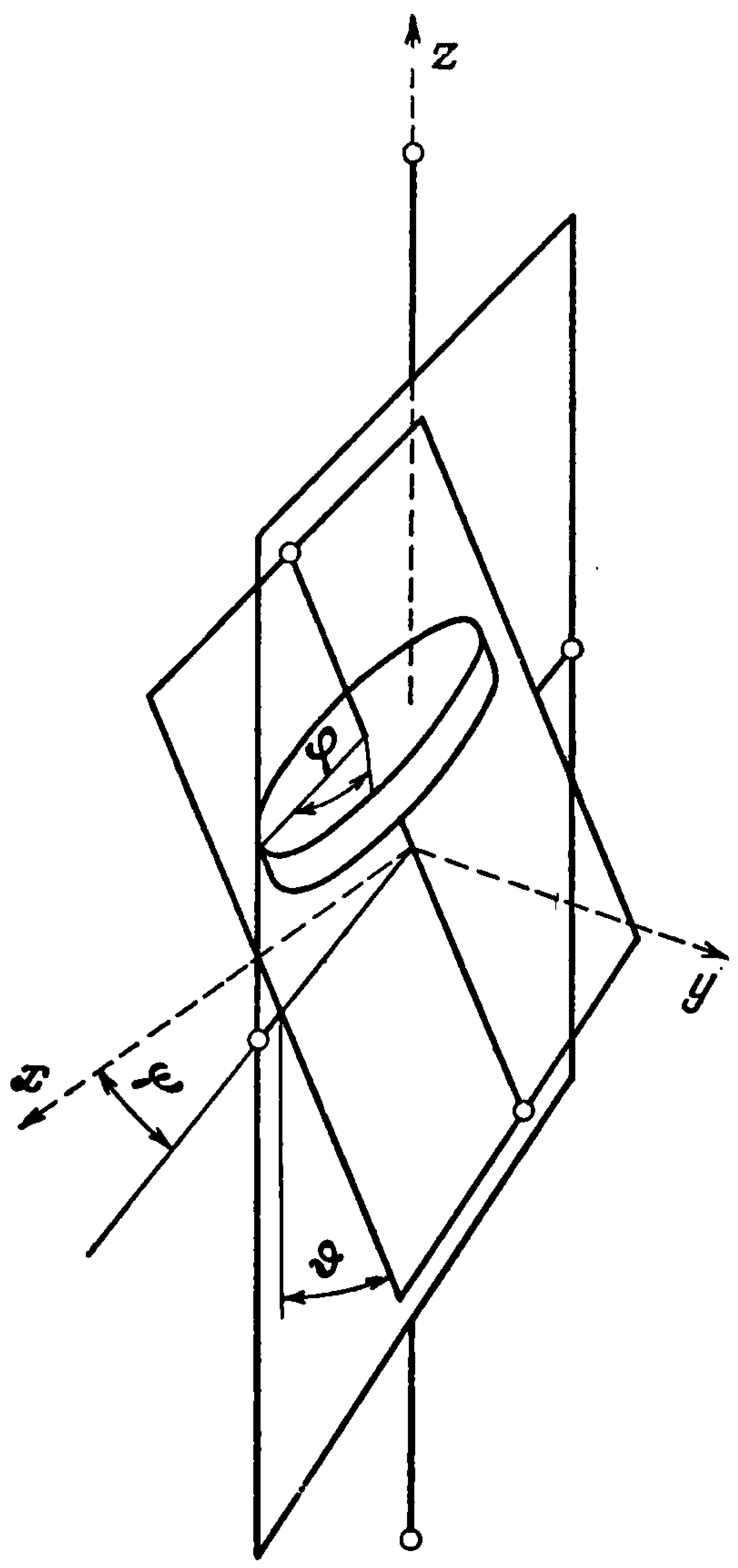
1) постоянство вертикальной составляющей кинетического момента;

2) постоянство составляющей кинетического момента в направлении оси гироскопа;

3) постоянство полной энергии системы.

Соответствующие три интеграла можно найти и в обобщенном случае тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе.

Так как мы пренебрегаем моментами трения в подшипниках кардановой системы, то ввиду отсутствия других диссипативных сил система консервативна и справедлив закон сохранения энергии.



Кроме того, легко видеть, что и для гироскопа в кардановом подвесе вертикальная составляющая кинетического момента постоянна. По закону кинетического момента временное изменение вектора кинетического момента равно сумме векторов моментов внешних сил. На систему действуют момент сил тяжести и момент, который передается через внешнюю ось кардановой системы. Направление обоих векторов может быть только горизонтальным, и поэтому конец вектора кинетического момента тоже может двигаться только в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая полного кинетического момента остается постоянной.

Третьим интегралом является постоянство составляющей кинетического момента ротора (непостоянство полного кинетического момента!) в направлении оси ротора. Вокруг этой оси действуют момент сил тяжести, вектор которого падает в направлении внутренней оси кардановой системы (так называемая линия узлов), и, кроме того, момент, который передается между ротором и внутренним кольцом. За счет допущения отсутствия трения этот момент направлен перпендикулярно к оси ротора. Закон кинетического момента в координатной системе, неизменно связанной с ротором, можно написать следующим образом:

$$\frac{d\bar{D}_1}{dt} + [\bar{\omega}_1 \bar{D}_1] = \Sigma \bar{M}$$

($\bar{D}_1$ — вектор кинетического момента ротора, $\bar{\omega}_1$ — вектор угловой скорости ротора). Так как из-за допущения симметрии ротора член Кориолиса $[\bar{\omega}_1 \bar{D}_1]$ тоже, как оба момента, не имеет составляющей в направлении оси ротора, конец вектора кинетического момента $\bar{D}_1$ может двигаться только в плоскости, перпендикулярной к оси ротора, и, следовательно, его составляющая в направлении оси ротора остается постоянной.

Три указанных интеграла в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta = r_0 \tag{2.1}$$

$$\dot\psi\,[(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2)\cos^2\vartheta] + C_1 r_0 \cos\vartheta = D_z \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\dot\vartheta^2 (A_1 + A_2) + \dot\psi^2[(A_1 + B_2 + C_3) - (A_1 + B_2 - C_2)\cos^2\vartheta] + \\ + C_1 r_0^2 + 2\,mgs\cos\vartheta = E\end{aligned} \tag{2.3}$$

где r_0 — составляющая угловой скорости ротора по оси ротора, D_z — вертикальная составляющая полного кинетического момента, E — двойная сумма кинетической и потенциальной энергии. Конечно, три интеграла (2.1)—(2.3) переходят в известные интегралы в случае Лагранжа, если массы кардановых колец исчезают ($A_2 = B_2 = C_2 = C_3 = 0$). Можно показать, что при помощи этих трех интегралов решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе, как и в случае Лагранжа, приводится к квадратурам. Но в этой заметке мы занимаемся только проблемой устойчивости.

Введем новую переменную

$$u = \cos\vartheta \tag{2.4}$$

и для сокращения записи следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&\frac{C_1 r_0}{A_1 + A_2} = k_1, \quad &&\frac{2mgs}{A_1 + A_2} = k_3, \quad &&\frac{A_1 + B_2 + C_3}{A_1 + A_2} = k_5\\ &\frac{D_z}{A_1 + A_2} = k_2, \quad &&\frac{E - C_1 r_0^2}{A_1 + A_2} = k_4, \quad &&\frac{A_1 + B_2 - C_2}{A_1 + A_2} = k_6\end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда исходные интегралы принимают вид:

$$\dot\varphi + \dot\psi u = r_0 \tag{2.6}$$

$$\dot\psi\,(k_5 - k_6 u^2) + k_1 u = k_2 \tag{2.7}$$

$$\dot\vartheta^2 + \dot\psi^2 (k_5 - k_6 u^2) + k_3 u = k_4 \tag{2.8}$$

Нас здесь интересует устойчивость вертикального положения оси ротора. Это положение характеризуется условиями

$$\vartheta = 0 \quad (u = 1), \qquad \dot\vartheta = 0, \qquad \dot\varphi = \dot\varphi_0, \qquad \dot\psi = \dot\psi_0 \tag{2.9}$$

Этими значениями определяются из (2.6), (2.7), (2.8) постоянные r_0, k_2 и k_4, которые зависят от начальных условий. Постоянная k_1 тоже зависит от начальных условий, но она уже определена через r_0.

Для исследования устойчивости нужно теперь выписать интегралы (2.6), (2.7) и (2.8) для возмущенного движения. Поэтому вводим вариации x_i переменных:

$$\dot\vartheta = 0 + x_1, \qquad \dot\varphi = \dot\varphi_0 + x_2, \qquad \dot\psi = \dot\psi_0 + x_3, \qquad u = 1 - x_4 \tag{2.10}$$

Для возмущенного движения из-за изменения начальных условий и постоянные могут принимать другие значения:

$$r_0 = r_{00} + R, \quad k_1 = k_{10} + K_1, \quad k_2 = k_{20} + K_2, \quad k_4 = k_{40} + K_4$$

Теперь получаем следующие интегралы для возмущенного движения

$$x_2 + x_3 - \dot{\psi}_0 x_4 - x_3 x_4 = R \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} &- x_3 x_4^2 k_6 + x_3 x_4 2k_6 - x_4^2 \dot{\psi}_0 k_6 + x_3 (k_5 - k_6) + \\ &+ x_4 (2\dot{\psi}_0 k_6 - k_1) = K_2 - K_1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &x_1^2 - x_3^2 x_4^2 k_6 + x_3^2 x_4 2k_6 - x_3 x_4^2 2\dot{\psi}_0 k_6 + x_3^2 (k_5 - k_6) + x_3 x_4 4\dot{\psi} k_6 - \\ &- x_4^2 \dot{\psi}^2{}_0 k_6 + x_3 2\dot{\psi}_0 (k_5 - k_6) + x_4 (2\dot{\psi}_0^2 k_6 - k_3) - K_4 \end{aligned} \tag{2.13}$$

3. Построение ляпуновской функции. Ляпуновскую функцию V переменных x_i ищем в виде линейной связки первых интегралов (2.11), (2.12), (2.13) уравнений возмущенного движения. При этом целесообразно ввести новую переменную x_5 через

$$x_5^2 = 2x_4 - x_4^2 = 1 - u^2 > 0 \tag{3.1}$$

Вводя новую постоянную K_0, можно переписать (3.1) в виде:

$$x_4^2 + x_5^2 - 2x_4 = K_0 = 0 \tag{3.2}$$

Теперь построим ляпуновскую функцию V в виде

$$V = K_4 + \alpha_1 (K_2 - K_1) + \alpha_2 K_0 + \alpha_3 R^2 \tag{3.3}$$

с постоянными α_1, α_2, α_3, величины которых можем еще произвольно выбирать. Производная по времени функции V тождественно исчезает, так как (3.4) состоит только из постоянных. Если мы можем найти условия, при которых V определенно-положительна, тогда по теореме Ляпунова найдены достаточные условия устойчивости движений исследуемой системы.

После подстановки (2.11)—(2.13) и (3.2) в (3.3) имеем

$$\begin{aligned} V = {} & x_1^2 + x_2^2 \alpha_3 + x_3^2 (\alpha_3 + k_5 - k_6) + x_4^2 (\alpha_2 + \alpha_3 \dot{\psi}_0^2) + \\ & + x_5^2 (\dot{\psi}_0^2 k_6 + \alpha_1 \dot{\psi}_0 k_6 + \alpha_2) + x_2 x_3 2\alpha_3 - x_2 x_4 2\dot{\psi}_0 \alpha_3 - \\ & - x_3 x_4 2\alpha_3 \dot{\psi}_0 + x_3 (2\dot{\psi}_0 + \alpha_1)(k_5 - k_6) - x_4 (k_3 + \alpha_1 k_1 + 2\alpha_2) + \\ & + x_3 x_4^2 2\dot{\psi}_0 \alpha_3 - x_3^2 x_4 2\alpha_3 + x_3 x_5^2 (2\dot{\psi}_0 k_6 + \alpha_1 k_6) - \\ & - x_2 x_3 x_4 2\alpha_3 + x_3^2 x_4^2 \alpha_3 + x_3^2 x_5^2 k_6 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Линейные члены этого выражения превращаются в нуль, если

$$\alpha_1 = -2\dot{\psi}_0, \qquad \alpha_2 = \dot{\psi}_0 k_1 - \tfrac{1}{2} k_3 \tag{3.5}$$

Ляпуновская функция (3.4) тогда переходит в

$$\begin{aligned} V = {} & x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 \alpha_3 + x_3^2 (k_5 - k_6) + x_4^2 (\dot{\psi}_0 k_1 - \tfrac{1}{2} k_3 + \alpha_3 \dot{\psi}_0^2) + \\ & + x_5^2 (\dot{\psi}_0 k_1 - \tfrac{1}{2} k_3 - \dot{\psi}_0^2 k_6 - (x_2 + x_3) x_4 2\dot{\psi}_0 \alpha_3 + \\ & + [x_3 x_4^2 2\dot{\psi}_0 \alpha_3 - x_3^2 x_4 2\alpha_3 - x_2 x_3 x_4 2\alpha_3 + x_3^2 x_4^2 \alpha_3 + x_3^2 x_5^2 k_6] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Функция V, таким образом, состоит из квадратичной формы переменных x_i и членов третьего и четвертого порядков.

Квадратичная часть будет определенно-положительной при выполнении следующих неравенств:

$$\alpha_3 > 0, \quad k_5 - k_6 > 0, \quad \dot\psi_0 k_1 - \tfrac{1}{2} k_3 > 0, \quad \dot\psi_0 k_1 - \tfrac{1}{2} k_3 - \dot\psi_0{}^2 k_6 > 0 \qquad (3.7)$$

Эти условия не только гарантируют положительные значения для множителей чисто квадратичных членов, но и выполнение неравенства Сильвестера для квадратичной формы переменных $x_2 + x_3$ и x_4:

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & \dot\psi_0 \alpha_3 \\ \dot\psi_0 \alpha_3 & (\dot\psi_0 k_1 - \tfrac{1}{2} k_3 + \alpha_3 \dot\psi_0^2) \end{vmatrix} = \alpha_3 (\dot\psi_0 k_1 - \tfrac{1}{2} k_3) > 0 \qquad (3.8)$$

Первое условие (3.7) можем всегда выполнить выбором постоянной α_3; второе условие (3.7) выполняется в силу (2.5), так как $k_6 > 0$; третье условие (3.7), очевидно, выполнено, если выполняется последнее условие (3.7). Таким образом, (3.7) является достаточным условием устойчивости вертикального положения оси гироскопа по отношению к переменным ϑ, $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$.

4. Условия устойчивости. Неравенство (3.8) можно рассматривать определяющим уравнением для допускаемых значений величины $\dot\psi_0$. Границы допускаемой области следующие:

$$\left.\begin{matrix} \dot\psi_{01} \\ \dot\psi_{02} \end{matrix}\right\} = \frac{k_1}{2k_6}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2k_3k_6}{k_1^2}}\right] \qquad (4.1)$$

или с первоначальными обозначениями

$$\left.\begin{matrix} \dot\psi_{01} \\ \dot\psi_{02} \end{matrix}\right\} = \frac{C_1 r_0}{2(A_1 + B_2 - C_3)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgs\,(A_1 + B_2 - C_2)}{C_1{}^2 r_0{}^2}}\right] \qquad (4.2)$$

Решения действительны и, следовательно, соответствуют реальным физическим движениям, если имеет место неравенство

$$C_1{}^2 r_0{}^2 > 4mgs\,(A_1 + B_2 - C_2) \qquad (4.3)$$

Из этого выражения прямо видно, что (4.3) с $B_2 = C_2 = 0$ переходит в знакомое условие устойчивости в случае Лагранжа. Но если это условие необходимо и достаточно для устойчивости гироскопа Лагранжа, то оно только необходимое условие для гироскопа в кардановом подвесе. Чтобы имела место устойчивость, надо еще удовлетворить условию

$$\dot\psi_{02} \leqslant \dot\psi_0 \leqslant \dot\psi_{01} \qquad (4.4)$$

Скорость, с которой карданова система вращается при вертикальном положении оси ротора, является решающим фактором для устойчивости гироскопа в кардановом подвесе. Этот результат физически понятен, учитывая, что в случае Лагранжа величины ψ и $\dot\psi$ — неопределенные при вертикальном положении оси ротора. Линия узлов и ее азимутальная скорость вращения в случае Лагранжа — только расчетные величины. Но в случае гироскопа в кардановом подвесе угол ψ имеет реальное значение потому, что он определяет движения кардановой системы.

Если предполагаем $r_0 > 0$ (без ограничения общности наших рассуждений), тогда получаем для случая «стоящего гироскопа» ($s > 0$)

$$0 < \dot{\psi}_{02} < \dot{\psi}_{01}$$

Следовательно, стоящий гироскоп в кардановом подвесе может терять устойчивость без начального толчка на кардановое кольцо в направлении собственного вращения ротора. Наоборот, получаем для «висящего гироскопа» ($s < 0$)

$$\dot{\psi}_{02} < 0 < \dot{\psi}_{01}$$

В этом случае движение с $\dot{\psi}_0 = 0$ устойчиво. В случае Лагранжа висящий гироскоп всегда устойчив, но висящий гироскоп в кардановом подвесе может терять устойчивость, если ему дается толчок против направления собственного вращения больше $|\dot{\psi}_{02}|$, или толчок в направлении собственного вращения больше $|\dot{\psi}_{01}|$; доказательство неустойчивости движения в этих случаях здесь не рассматривается.

Влияние величины $\dot{\psi}_0$ на устойчивость можно легко демонстрировать при помощи удобных моделей. Мы хотим еще отметить, что граничные значения (4.2) для скорости азимутального вращения соответствуют скоростям, которые получаются для «регулярной прецессии» тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, если сделается переход $\vartheta \to 0$.

Поступила 14 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954, стр. 123—124.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954, стр. 457—458.
3. Николаи Е. Л. О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, т. III, вып. 4, 1939, стр. 3—34.