Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Я. Н. Ройтенберг

(Москва)

Эффективные методы построения функций Ляпунова для систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами разработаны в трудах Н. Г. Четаева [1]. Границы получаемых при помощи этих методов областей устойчивости рассмотрены Б. С. Разумихиным [2].

Ниже предлагается примыкающий к этим методам возможный метод построения функций Ляпунова для систем указанного вида.

1. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{jk}(D)\, x_k = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.1}$$

$$\varphi_{jk}(D) = b_{jk}^{(0)}(t)\, D^L + b_{jk}^{(1)}(t)\, D^{L-1} + \ldots + b_{jk}^{(L-1)}(t)\, D + b_{jk}^{(L)}(t) \tag{1.2}$$

Вводя некоторые функции

$$l_{jk}^{(s)}(t) = b_{jk}^{(s)}(t) - a_{jk}^{(s)} \qquad (a_{jk}^{(s)} = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

операторы $\varphi_{jk}(D)$ можно представить в таком виде:

$$\varphi_{jk}(D) = f_{jk}(D) + L_{jk}(D) \tag{1.4}$$

где

$$f_{jk}(D) = a_{jk}^{(0)} D^L + a_{jk}^{(1)} D^{L-1} + \ldots + a_{jk}^{(L-1)} D + a_{jk}^{(L)} \tag{1.5}$$

$$L_{jk}(D) = l_{jk}^{(0)}(t)\, D^L + l_{jk}^{(1)}(t)\, D^{L-1} + \ldots + l_{jk}^{(L-1)}(t)\, D + l_{jk}^{(L)}(t) \tag{1.6}$$

Система дифференциальных уравнений (1.1) может быть теперь записана так:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, x_k = -\sum_{k=1}^{n} L_{jk}(D)\, x_k \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

Наряду с системой уравнений (1.7) рассмотрим еще следующую систему линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, x_k = y_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Через $\Delta(D)$ обозначим определитель операционной $f(D)$ матрицы:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & \ldots & f_{n}\ (D) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ f_{n1}(D) & \ldots & f_{nn}(D) \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

Корни характеристического уравнения

$$\Delta(D) = 0 \tag{1.10}$$

обозначим так: действительные корни $\varkappa_g$ $(g = 1, \ldots, N')$, комплексные сопряженные корни $\varepsilon_h \pm i\omega_h$ $(h = N' + 1, \ldots, N' + N'')$. Число корней характеристического уравнения $N = N' + 2N''$. Для простоты будем считать, что все корни характеристического уравнения являются простыми. (Можно было бы допустить и наличие кратных корней, но с линейными элементарными делителями.)

Систему дифференциальных уравнений (1.8) можно преобразовать, переходя от исходных координат x_j к нормальным координатам ξ_g, ξ_h, η_h $(g = 1, \ldots, N',\ h = N' + 1, \ldots, N' + N'')$. Формулы, связывающие исходные и нормальные координаты, будут [3] следующими:

$$\overset{\vartheta}{x}_j = \sum_{g=1}^{N'} X_{j\vartheta}^{(g)}\xi_g + \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} (X_{j\vartheta}^{(h)}\xi_h + Y_{j\vartheta}^{(h)}\eta_h) \qquad \left(\begin{matrix} j = 1,2, \ldots, n \\ \vartheta = 0,1, \ldots, m_j - 1 \end{matrix}\right) \tag{1.11}$$

$$X_{j\vartheta}^{(g)} = X_j^{(g)}\varkappa_g^{\vartheta}, \qquad X_{j\vartheta}^{(h)} = N_{j\vartheta}^{(h)} \cos(\gamma_j^{(h)} + \vartheta\zeta_h)$$

$$Y_{j\vartheta}^{(h)} = N_{j\vartheta}^{(h)} \sin(\gamma_j^{(h)} + \vartheta\zeta_h) \tag{1.12}$$

причем $N_{j\vartheta}^{(h)} = N_j^{(h)}c_h^{\vartheta}$; величины c_h и ζ_h определяются соотношением

$$\varepsilon_h + i\omega_h = c_h e^{i\zeta_h} \tag{1.13}$$

Величина $X_j^{(g)}$ есть j-й элемент отличного от нуля столбца X_g присоединенной матрицы $F(\varkappa_g)$, построенной для действительного корня $\varkappa_g$. Величина $N_j^{(h)}e^{i\gamma_j^{(h)}} = X_j^{(h)} + iY_j^{(h)}$ есть j-й элемент отличного от нуля столбца X_h присоединенной матрицы $F(\varepsilon_h + i\omega_h)$, построенной для комплексного корня $\varepsilon_h + i\omega_h$. Величина m_j есть порядок старшей производной от x_j, встречающейся в системе дифференциальных уравнений (1.8). Нормальные координаты ξ_g, ξ_h, η_h, как показано в цитированной работе [3] Б. В. Булгакова, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\xi_g}{dt} = \varkappa_g\xi_g + \left[\frac{D - \varkappa_g}{\Delta(D)}\right]_{D=\varkappa_g} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(g)} y_k(t) \qquad (g = 1, \ldots, N')$$

$$\frac{d\xi_h}{dt} = \varepsilon_h\xi_h - \omega_h\eta_h + 2\mathrm{Re}\left[\frac{D - \varepsilon_h - i\omega_h}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} y_k(t) \tag{1.14}$$

$$\frac{d\eta_h}{dt} = \varepsilon_h\eta_h - \omega_h\xi_h - 2\mathrm{Im}\left[\frac{D - \varepsilon_h - i\omega_h}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)} y_k(t) \quad (h = N'+1, \ldots, N'+N'')$$

Здесь $B_k^{(g)}$ — элементы матрицы-строки B_g; аналогично $B_k^{(h)}$ — элементы матрицы-строки B_h. Эти матрицы-строки вводятся так, чтобы выполнялись соотношения

$$F(\varkappa_g) = X_g B_g, \qquad F(\varepsilon_h + i\omega_h) = X_h B_h \tag{1.15}$$

Уравнения в нормальных координатах можно построить аналогично уравнениям (1.14) также и для системы уравнений (1.7). Для этого преобразуем правые части уравнений (1.7), подставив в них вместо $\overset{\vartheta}{x}_k$

выражения (1.11); правые части уравнений (1.7) примут тогда вид:

$$-\sum_{k=1}^{n} L_{jk}(D)\,x_k = \sum_{g=1}^{N'} \mu_{jg}(t)\,\xi_g + \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} [\mu_{jh}(t)\,\xi_h + \nu_{jh}(t)\,\eta_h] \tag{1.16}$$

Полученные функции (1.16) линейно зависят от нормальных координат ξ_g, ξ_h, η_h; для краткости обозначим их так:

$$\sum_{g=1}^{N'} \mu_{jg}(t)\,\xi_g + \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} [\mu_{jh}(t)\,\xi_h + \nu_{jh}(t)\,\eta_h] \equiv \Lambda_j(\xi_g,\ \xi_h,\ \eta_h,\ t) \tag{1.17}$$

Подставляя в уравнения (1.14) вместо $y_j(t)$ функции (1.17), получим систему уравнений в нормальных координатах, эквивалентную исходной системе дифференциальных уравнений (1.1):

$$\frac{d\xi_g}{dt} = \varkappa_g\xi_g + \left[\frac{D-\varkappa_g}{\Delta(D)}\right]_{D=\varkappa_g} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(g)}\Lambda_k(\xi_g,\ \xi_h,\ \eta_h,\ t) \qquad (g=1,\ldots,N')$$

$$\frac{d\xi_h}{dt} = \varepsilon_h\xi_h + \omega_h\eta_h + 2\operatorname{Re}\left[\frac{D-\varepsilon_h-i\omega_h}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)}\Lambda_k(\xi_g,\xi_h,\eta_h,t) \tag{1.18}$$

$$\frac{d\eta_h}{dt} = \varepsilon_h\eta_h - \omega_h\xi_h - 2\operatorname{Im}\left[\frac{D-\varepsilon_h-i\omega_h}{\Delta(D)}\right]_{D=\varepsilon_h+i\omega_h} \sum_{k=1}^{n} B_k^{(h)}\Lambda_k(\xi_g,\ \xi_h,\ \eta_h,\ t)$$

$$(h=N'+1,\ldots,N'+N'')$$

Система уравнений (1.18), так же как и исходная система (1.1), является системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Однако для системы уравнений (1.18) можно указать простой метод построения функции Ляпунова, позволяющий получить достаточные условия устойчивости тривиального решения этой системы.

Возьмем функцию Ляпунова в таком виде:

$$V = -\frac{1}{2}\left[\sum_{g=1}^{N'} \xi_g^2 + \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} (\xi_h^2 + \eta_h^2)\right] \tag{1.19}$$

Функция V является определенно-отрицательной. Ее производная по времени

$$\dot V = -\sum_{g=1}^{N'} \xi_g\frac{d\xi_g}{dt} - \sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\left(\xi_h\frac{d\xi_h}{dt} + \eta_h\frac{d\eta_h}{dt}\right) \tag{1.20}$$

после подстановки значений $d\xi_g/dt$, $d\xi_h/dt$, $d\eta_h/dt$ из уравнений (1.18) будет представлять собой квадратичную форму переменных ξ_g, ξ_h, η_h такого вида:

$$\dot V = \sum_{g=1}^{N'} [-\varkappa_g + \Psi_{gg}(t)]\,\xi_g^2 + \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} \{[-\varepsilon_h + \Psi_{hh}^{*}(t)]\,\xi_h^2 + \tag{1.21}$$

$$+ [-\varepsilon_h + \Psi_{hh}^{**}(t)]\,\eta_h^2\} + 2c_{12}\xi_1\xi_2 + 2c_{13}\xi_1\xi_3 + \ldots + 2c_{1,N-1}\xi_1\xi_{N'+N''} +$$
$$+ 2c_{1N}\xi_1\eta_{N'+N''} + 2c_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots + 2c_{2,N-1}\xi_2\xi_{N'+N''} + 2c_{2N}\xi_2\eta_{N'+N''} +$$
$$+ \ldots + 2c_{N-1,\,N}\xi_{N'+N''}\,\eta_{N'+N''}$$

Коэффициенты c_{ij} $(i \neq j)$ квадратичной формы (1.21) являются комбинациями исходных переменных коэффициентов $l_{jk}^{(s)}(t)$. Если все исходные коэффициенты $l_{jk}^{(s)}(t) \equiv 0$, то производная $\dot{V}$ принимает вид:

$$\dot{V} = -\sum_{g=1}^{N'} \varkappa_g \xi_g^2 - \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} \varepsilon_h (\xi_h^2 + \eta_h^2) \tag{1.22}$$

В случае, когда все корни характеристического уравнения (1.10) лежат в левой полуплоскости, т. е. все $\varkappa_g < 0$, $\varepsilon_h < 0$, $\dot{V}$ представляет собой определенно-положительную функцию (т. е. имеет знак, противоположный знаку функции V), как это и должно быть у асимптотически устойчивой системы.

Квадратичная форма (1.21) имеет дискриминант

$$Д = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{N1} & \cdots & c_{NN} \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

где

$$c_{11} = -\varkappa_1 + \Psi_{11}(t), \ldots, \quad c_{NN} = -\varepsilon_{N'+N''} + \Psi_{N'+N'',N'+N''}^{**}(t) \tag{1.24}$$

Условия знакоопределенности (положительности) $\dot{V}$ состоят в положительности всех главных диагональных миноров дискриминанта (1.23) для любого момента времени t. Эти условия и являются достаточными условиями устойчивости тривиального решения рассматриваемой системы (1.1) дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Так как полученные условия устойчивости являются достаточными, а не необходимыми, то заметим, что, варьируя вид функций V, можно иногда расширить получаемую из условий знакоопределенности функции $\dot{V}$ область устойчивости в пространстве параметров системы. Для возможности варьирования можно принять функцию Ляпунова в таком виде:

$$V = -\frac{1}{2}\left[\sum_{g=1}^{N'} p_g \xi_g^2 + \sum_{h=N'+1}^{N'+N''} (p_h \xi_h^2 + q_h \eta_h^2)\right] \tag{1.25}$$

где коэффициенты p_g, p_h, q_h должны быть строго положительными. Выбор значений коэффициентов p_g, p_h, q_h можно подчинить определенным требованиям, например обращение в нуль каких-либо коэффициентов c_{rs} квадратичной формы (1.21) и т. п.

Требованию максимального расширения области устойчивости следует подчинить и выбор коэффициентов $a_{jk}^{(s)}$, входящих в выражения (1.3); значения коэффициентов $a_{jk}^{(s)}$ целесообразно выбирать так, чтобы получаемая при помощи функции Ляпунова область устойчивости в пространстве интересующих параметров была возможно большей.

2. В качестве примера рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$a x_1 + \dot{x}_2 = 0, \qquad \dot{x}_1 - \frac{b}{a} x_2 - \frac{bk}{a} x_3 + \frac{bk}{a} x_4 = 0$$

$$-\mu(t) x_1 + c x_2 + \dot{x}_3 + c x_3 = 0, \qquad \dot{x}_4 + c x_4 = 0 \tag{2.1}$$

Полагая, что функция $\mu(t)$ ограничена, и обозначив через fa ее наибольшее абсолютное значение $|\mu(t)| \leqslant fa$, можно переписать систему уравнений (2.1) так:

$$ax_1 + \dot{x}_2 = 0, \qquad \dot{x}_1 - \frac{b}{a}x_2 - \frac{bk}{a}x_3 + \frac{bk}{a}x_4 = 0 \tag{2.2}$$

$$-fax_1 + cx_2 + \dot{x}_3 + cx_3 = s(t)x_1, \qquad \dot{x}_4 + cx_4 = 0$$

Здесь $-2fa \leqslant s(t) = \mu(t) - fa \leqslant 0$. При $s(t) \equiv 0$ система уравнений (2.2) превращается в систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, обладающую следующим характеристическим уравнением:

$$(D + c)[D^3 + cD^2 + b(1 - fk)D + (1 - k)bc] = 0 \tag{2.3}$$

Корни алгебраического уравнения (2.3) будут расположены в левой полуплоскости комплексного переменного D при выполнении условия $f < 1$. При этом предполагается, что коэффициенты a, b, c, k системы уравнений (2.1) положительны и, кроме того, $k < 1$.

Ограничимся случаем, когда коэффициенты уравнения (2.3) таковы, что это уравнение имеет два действительных корня и одну пару комплексных сопряженных корней. Обозначим эти корни через $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varepsilon \pm i\omega$, причем $\varkappa_1 = -c$. Величины же $\varkappa_2$, ε и ω будут тогда удовлетворять соотношению

$$(D - \varkappa_2)(D - \varepsilon - i\omega)(D - \varepsilon + i\omega) = D^3 + cD^2 + b(1 - fk)D + (1 - k)bc \tag{2.4}$$

Чтобы преобразовать систему уравнений (2.1) к новым переменным ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_3, которые представляли бы собой нормальные координаты для этой системы в случае, когда $s(t) \equiv 0$, необходимо согласно (1.11) ввести эти переменные при помощи следующих соотношений:

$$x_1 = \frac{\varkappa_2(\varkappa_2 + c)}{(f\varkappa_2 + c)a}\xi_2 + m_1\xi_3 + m_2\eta_3, \qquad x_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \tag{2.5}$$

$$x_2 = -\frac{\varkappa_2 + c}{f\varkappa_2 + c}\xi_2 + n_1\xi_3 + n_2\eta_3, \qquad x_4 = \xi_1$$

где

$$m_1 = \frac{1}{al}[f\varepsilon^3 + c(1 + f)\varepsilon^2 + (c^2 + f\omega^2)\varepsilon - c\omega^2(1 - f)]$$

$$m_2 = \frac{\omega}{al}(f\varepsilon^2 + 2c\varepsilon + c^2 + f\omega^2)$$

$$n_1 = -\frac{1}{l}[f\varepsilon^2 + c(1 + f)\varepsilon + c^2 + f\omega^2] \tag{2.6}$$

$$n_2 = -\frac{\omega c}{l}(1 - f), \qquad l = f^2\varepsilon^2 + 2cf\varepsilon + c^2 + f^2\omega^2$$

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют новые переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_3, будут согласно (1.18) иметь следующий вид:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varkappa_1\xi_1$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = [\varkappa_2 + a_2s(t)]\xi_2 + a_3s(t)\xi_3 + a_4s(t)\eta_3$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = b_2s(t)\xi_2 + [\varepsilon + b_3s(t)]\xi_3 + [\omega + b_4s(t)]\eta_3 \tag{2.7}$$

$$\frac{d\eta_3}{dt} = c_2s(t)\xi_2 + [-\omega + c_3s(t)]\xi_3 + [\varepsilon + c_4s(t)]\eta_3$$

где

$$a_2 = A_2 \frac{\varkappa_2 (\varkappa_2 + c)}{(f\varkappa_2 + c) a}, \qquad a_3 = A_2 m_1, \qquad a_4 = A_2 m_2$$

$$b_2 = A_3 \frac{\varkappa_2 (\varkappa_2 + c)}{(f\varkappa_2 + c) a}, \qquad b_3 = A_3 m_1, \qquad b_4 = A_3 m_2 \tag{2.8}$$

$$c_2 = A_4 \frac{\varkappa_2 (\varkappa_2 + c)}{(f\varkappa_2 + c) a}, \qquad c_3 = A_4 m_1, \qquad c_4 = A_4 m_2$$

$$A_2 = T_2 (f\varkappa_2 + c) bk$$

$$A_3 = [(f\varepsilon + c) T_3 + f\omega T_4] bk \tag{2.9}$$

$$A_4 = [(f\varepsilon + c) T_4 - f\omega T_3] bk$$

$$T_2 = \frac{1}{(\varkappa_2 + c)[(\varkappa_2 - \varepsilon)^2 + \omega^2]}$$

$$T_3 = \frac{-(2\varepsilon - \varkappa_2 + c)}{[(\varepsilon + c)(\varepsilon - \varkappa_2) - \omega^2]^2 + [(2\varepsilon - \varkappa_2 + c)\omega]^2} \tag{2.10}$$

$$T_4 = \frac{(\varepsilon + c)(\varepsilon - \varkappa_2) - \omega^2}{\omega \{[(\varepsilon + c)(\varepsilon - \varkappa_2) - \omega^2]^2 + [(2\varepsilon - \varkappa_2 + c)\omega]^2\}}$$

В качестве функции Ляпунова принимаем следующую функцию:

$$V = -\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \eta_3^2) \tag{2.11}$$

Ее производная по времени

$$\dot V = -\left(\xi_1 \frac{d\xi_1}{dt} + \xi_3 \frac{d\xi_2}{dt} + \xi_2 \frac{d\xi_3}{dt} + \eta_3 \frac{d\eta_3}{dt}\right)$$

после подстановки выражений производных (2.7) принимает вид:

$$\dot V = -\varkappa_1 \xi_1^2 - [\varkappa_2 + a_2 s(t)]\xi_2^2 - [\varepsilon + b_3 s(t)]\xi_3^2 - [\varepsilon + c_4 s(t)]\eta_3^2 -$$

$$-(a_3 + b_2) s(t) \xi_2 \xi_3 - (a_4 + c_2) s(t) \xi_2 \eta_3 - (b_4 + c_3) s(t) \xi_3 \eta_3 \tag{2.12}$$

Дискриминант квадратичной формы (2.12) будет следующим:

$$Д = \begin{vmatrix} -\varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varkappa_2 - a_2 s(t) & \frac{-(a_3 + b_2)}{2} s(t) & \frac{-(a_4 + c_2)}{2} s(t) \\ 0 & \frac{-(a_3 + b_2)}{2} s(t) & -\varepsilon - b_3 \; s(t) & \frac{-(b_4 + c_3)}{2} s(t) \\ 0 & \frac{-(a_4 + c_2)}{2} s(t) & \frac{-(b_4 + c_3)}{2} s(t) & -\varepsilon - c_4 \; s(t) \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

Условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений (2.1) состоят в положительности для любого момента времени t всех главных диагональных миноров дискриминанта (2.13).

Поступила 16 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е. ГИТТЛ, М., 1955, стр. 174.
2. Разумихин Б. С. Об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956, стр. 266.
3. Булгаков Б. В. О нормальных координатах. ПММ, т. X, вып. 2, 1946, стр. 280.