Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Б. С. Разумихин

(Москва)

Доказывается справедливость некоторых результатов теории устойчивости по первому приближению для систем с запаздыванием и получены некоторые достаточные условия устойчивости по первому приближению таких систем.

1. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i\,(t;\, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (1.1)$$

где $F_i\,(t;\, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau))$ — голоморфные функции переменных $x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)$, удовлетворяющие условиям $F_i\,(t;\, 0, \ldots, 0, \ldots, 0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Разлагая правые части системы (1.1) в ряд по степеням переменных $x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)$, будем иметь

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij}(t)\, x_j(t) + q_{ij}(t)\, x_j(t-\tau)) + X_i \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (1.2)$$

где $p_{ij}(t)$ и $q_{ij}(t)$ — значения $\partial F_i / \partial x_j(t)$ и $\partial F_i / dx_j(t-\tau)$ при $x_j(t) = 0$, $x_j(t-\tau) = 0$, $X_i\,(i = 1, \ldots, n)$ — функции, разложения которых в степенной ряд начинаются членами не ниже второго порядка.

Одновременно с системой уравнений первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij}(t)\, x_j(t) + q_{ij}(t)\, x_j(t-\tau)) \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (1.3)$$

рассмотрим систему, в которую она обращается при $\tau = 0$:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij}(t) + q_{ij}(t))\, x_j \qquad (i=1, \ldots, n) \qquad (1.4)$$

Предположим, что нулевое решение системы (1.4) асимптотически устойчиво и для нее известна определенно-положительная квадратичная форма с ограниченными коэффициентами

$$V = \sum_{i,\, j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\, x_i x_j$$

удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова [1] об асимптотической устойчивости. Таким образом, производная функции V в силу системы (1.4) будет

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}^{(0)}(t)\, x_i x_j \tag{1.5}$$

где

$$a_{ij}^{(0)}(t) = \sum_{s=1}^{n} [\alpha_{is}(t)(p_{sj}(t) + q_{sj}(t)) + \alpha_{js}(t)(p_{si}(t) + q_{si}(t))] + \frac{d\alpha_{ij}}{dt}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n)$$

является определенно-отрицательной квадратичной формой.

Выясним условия, при которых квадратичная форма V будет функцией, удовлетворяющей условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости для системы дифференциальных уравнений первого приближения (1.3). Производная квадратичной формы V в силу (1.3) будет

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i;\, j=1}^{n} b_{ij}(t)\, x_i(t)\, x_j(t) + \sum_{i,\, j=1}^{n} c_{ij}(t)\, x_i(t)\, x_j(t-\tau) \tag{1.6}$$

где

$$b_{ij}(t) = \sum_{s=1}^{n} (\alpha_{is}(t)\, p_{sj}(t) + \alpha_{js}(t)\, p_{si}(t)) + \frac{d\alpha_{ij}}{dt}$$

$$c_{ij}(t) = 2\sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}(t)\, q_{sj}(t)$$

Для простоты дальнейших вычислений выполним преобразование квадратичной формы $V(t, x, \ldots, x_n)$ к переменным $y_1, \ldots, y_n$, в которых квадратичная форма V имеет вид суммы квадратов $V = y_1^2 + \ldots + y_n^2$.

Как известно, для знакоопределенной формы это всегда может быть достигнуто неособенным линейным преобразованием вида

$$x_i = k_{i1}(t)\, y_1 + \ldots + k_{in}(t)\, y_n$$

Выполняя замену переменных в уравнении (1.6), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \sum_{i;\, j=1}^{n} A_{ij}(t)\, y_i(t)\, y_j(t) + \sum_{i;\, j=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i(t)\, y_j(t-\tau) \tag{1.7}$$

где

$$A_{ij}(t) = \sum_{\beta;\, \gamma=1}^{n} b_{\beta\gamma} k_{\beta i}(t)\, k_{\gamma j}(t), \qquad B_{ij}(t) = \sum_{\beta;\, \gamma=1}^{n} c_{\beta\gamma} k_{\beta i}(t)\, k_{\gamma j}(t-\tau)$$

На основании теоремы 5, доказанной в работе [2], нулевое решение системы (1.3) будет асимптотически устойчиво, если существует определенно-положительная функция $V(t;\, x_1, \ldots, x_n)$, допускающая бесконечно малый высший предел и такая, что ее производная в силу системы (1.3) определенно-отрицательна для всяких значений $x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)$, удовлетворяющих условию

$$V(t-\tau,\ x_1(t;\, -\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \leqslant V(t;\, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \tag{1.8}$$

В переменных $y_1, \ldots, y_n$ условие (1.8) имеет вид:

$$y_1^{(2)}(t-\tau) + \ldots + y_n^2(t-\tau) \leqslant y_1^2(t) + \ldots + y_n^2(t) \tag{1.9}$$

Определим максимум функции dV/dt при фиксированных значениях $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ и при значениях $y_1(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau)$, удовлетворяющих условию (1.9). Обозначим $y_i(t-\tau) = z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Пользуясь методом Лагранжа [3] составим функцию

$$\Phi = \frac{dV}{dt} - \lambda\left[V(z_1, \ldots, z_n) - V(y_1, \ldots, y_n)\right]$$

или согласно (1.7)

$$\Phi = \sum_{i;\ j=1}^{n} A_{ij}(t)\, y_i y_j + \sum_{i;\ j=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i z_j + \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{u} y_i^2\right] \qquad (1.10)$$

Значения $z_1, \ldots, z_n$, при которых функция dV/dt имеет максимум, находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i - 2\lambda z_j = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}(z_i^2 - y_i^2) = 0 \qquad (1.11)$$

Определяя здесь из первых уравнений z_j и подставляя в последнее, легко найдем

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i\right)^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} y_j^2\right]^{1/2} \qquad (1.12)$$

Умножая каждое из первых n уравнений (1.11) соответственно на z_j и складывая, получим

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i z_j - 2\lambda\sum_{j=1}^{n} z_j^2 = 0 \qquad (1.13)$$

Но $z_1^2 + \ldots + z_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2$ в силу последнего уравнения системы (1.11), поэтому

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i z_j = \left\{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i\right)^2\right]\right\}^{1/2} \qquad (1.14)$$

Квадратичную форму, стоящую в (1.14) в квадратных скобках, преобразуем к каноническому виду ортогональным преобразованием:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)\, \xi_i^2 \qquad (1.15)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — линейные функции переменных $y_1, \ldots, y_n$ такие, что $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. Подставляя в (1.14), получим

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} B_{ij}(t)\, y_i z_j = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i(t)\, \xi_i^2\right)\right]^{1/2} \qquad (1.16)$$

Пусть $h'(t) = \sup\{h_1(t), \ldots, h_n(t)\}$, $h''(t) = \inf\{h_1(t), \ldots, h_n(t)\}$. При этом справедливо неравенство [5]

$$h''(t)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} h_i(t)\, \xi_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) h'(t) \qquad (1.17)$$

Для билинейной формы в левой части (1.14) на основании (1.16) и (1.17) справедлива оценка

$$\sqrt{h''(t)}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \leqslant \sum_{i,\,j=1}^{n} B_{ij}(t)\,y_i z_j \leqslant \sqrt{h'(t)}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \tag{1.18}$$

при условии $z_1^2+\ldots+z_n^2 \leqslant y_1^2+\ldots+y_n^2$.

Преобразуя уравнение (1.17) к переменным $\xi_1,\ldots,\xi_n$ и имея в виду, что $y_1^2+\ldots+y_n^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$, получим

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(t)\Bigr)=\sum_{i;\,j=1}^{n}\beta_{ij}(t)\,\xi_i(t)\,\xi_j(t)+\sum_{i,\,j=1}^{n}\gamma_{ij}(t)\,\xi_i(t)\,\xi_j(t-\tau) \tag{1.19}$$

При условии $\xi_1^2(t-\tau)+\ldots+\xi_n^2(t-\tau)\leqslant\xi_1^2(t)+\ldots+\xi_n^2(t)$ имеем

$$\sqrt{h''(t)}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(t)\leqslant\sum_{i;\,j=1}^{n}\gamma_{ij}(t)\,\xi_i(t)\,\xi_j(t-\tau)\leqslant\sqrt{h'(t)}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(t) \tag{1.20}$$

На основании (1.20) для производной dV/dt справедлива оценка

$$\sum_{i;\,j=1}^{n}\bigl(\beta_{ij}(t)+\delta_{ij}\sqrt{h'(t)}\bigr)\,\xi_i(t)\,\xi_j(t)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(t)\geqslant\sum_{i;\,j=1}^{n}\bigl(\beta_{ij}(t)+\delta_{ij}\sqrt{h''(t)}\bigr)\,\xi_i(t)\,\xi_j(t) \tag{1.21}$$

$$(\delta_{ij}=0 \text{ при } i\neq j,\ \delta_{ii}=1),\quad V=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$$

Из оценки (1.21) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Тривиальное решение системы дифференциальных уравнений первого приближения асимптотически устойчиво при всяком значении запаздывания τ, если корни $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)$ уравнения

$$\det\bigl\|\beta_{ij}(t)+\delta_{ij}\bigl(\sqrt{h'(t)}-\lambda\bigr)\bigr\|=0$$

удовлетворяют условию $\lambda_i(t)\leqslant\varepsilon<0\ (i=1,\ldots,n)\ t>t_0$, где ε — произвольно малое фиксированное отрицательное число.

2. Существенно менее жесткие условия устойчивости могут быть получены на основании теорем 6 и 7 работы [2].

Выражение (1.6) для производной функции V в силу системы (1.3) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}^0(t)\,x_i(t)\,x_j(t)+\sum_{i,\,j=1}^{n}c_{ij}(t)\,x_i(t)\,[x_j(t-\tau)-x_j(t)] \tag{2.1}$$

где первое слагаемое правой части является определенно-отрицательной производной функции V в силу системы (1.4).

В силу известной формулы Лагранжа для конечных приращений

$$x_j(t-\tau)-x_j(t)=-\tau\frac{d}{dt}x_j(\sigma_j)\qquad(\sigma_j=t-\theta_j\tau,\ 0<\theta_j<1) \tag{2.2}$$

В силу уравнений первого приближения (1.3) получим

$$x_j(t-\tau)-x_j(t)=-\tau\sum_{s=1}^{n}[p_{js}(\sigma_j)\,x_5(\sigma_j)+q_{js}(\sigma_j)\,x_s(\sigma_j-\tau)]\quad(j=1,\ldots,n) \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.1), получим

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i;\,j=1}^{n} a_{ij}^{0}(t)\,x_i(t)\,x_j(t)-\tau\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)\times$$
$$\times\sum_{s=1}^{n}\left[p_{js}(\sigma_j)\,x_s(\sigma_j)+q_{js}(\sigma_j)\,x_s(\sigma_j-\tau)\right] \qquad (2.4)$$

В силу теорем, доказанных в работе [2], устойчивость нулевого решения системы дифференциальных уравнений первого приближения (1.3) следует из отрицательности функции dV/dt вдоль всякой интегральной кривой, удовлетворяющей условию

$$V(\sigma,\,x_1(\sigma),\,\ldots,\,x_n(\sigma))\leqslant V(t,\,x_1(t),\,\ldots,\,x_n(t)) \qquad \text{при } \sigma\leqslant t \qquad (2.5)$$

Переходя линейным преобразованием

$$x_i=k_{i1}(t)\,y_1+\ldots+k_{in}(t)\,y_n$$

к переменным $y_1,\ldots,y_n$, в которых $V=y_1^2+\ldots+y_n^2$, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)=\sum_{i;\,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}(t)\,y_i(t)\,y_j(t)-U\tau$$
$$a_{ij}^{(1)}(t)=\sum_{\mu;\,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^{0}(t)\,k_{\mu i}(t)\,k_{\nu j}(t) \qquad (2.6)$$

$$U=\sum_{i;\,j,\,\mu,\,\nu,\,s=1}^{n} c_{\mu\nu}(t)\,k_{\mu i}(t)\,y_i(t)\left[p_{\nu s}(\sigma_\nu)\,k_{sj}(\sigma_\nu)\,y_j(\sigma_\nu)+\right.$$
$$\left.+\,q_{\nu s}(\sigma_\nu)\,k_{sj}(\sigma_\nu-\tau)\,y_j(\sigma_\nu-\tau)\right] \qquad (2.7)$$

Устойчивость системы первого приближения следует из отрицательности правой части равенства (2.6) при условии (2.5) или эквивалентных условиях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(\sigma_j)\leqslant\sum_{i=1}^{n} y_j^2(t),\qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2(\sigma_j-\tau)\leqslant\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (2.8)$$

Определим верхнюю грань множителя при τ в правой части равенства (2.6). Очевидно, эта верхняя грань достигается на границе области и при ее определении неравенства (2.8) можно заменить равенствами.

Выполним в выражении (2.7) для U замену переменных:

$$y_i=r\gamma_i \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad \left(r=\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}\right) \qquad (2.9)$$

где $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ — направляющие косинусы радиуса-вектора точки поверхности $y_1^2+\ldots+y_n^2=r^2$; получим

$$U=r^2\sum_{i,\,j,\,\mu,\,\nu,\,s=1} c_{\mu\nu}(t)\,k_{\mu i}(t)\,\gamma_i(t)\left[p_{\nu s}(\sigma_\nu)\,k_{sj}(\sigma_\nu)\,\gamma_j(\sigma_\nu)+\right.$$
$$\left.+\,q_{\nu s}(\sigma_\nu)\,k_{sj}(\sigma_\nu-\tau)\,\gamma_j(\sigma_\nu-\tau)\right]$$

Так как $|\gamma_i|\leqslant 1$, то в области (2.8)

$$\sup U<r^2\sum_{i,\,j,\,\mu,\,\nu,\,s=1}^{n}|c_{\mu\nu}(t)|\,|k_{\mu i}(t)|\left[|p_{\nu s}(\sigma_\nu)|\,|k_{sj}(\sigma_\nu)|+\right.$$
$$\left.+\,|q_{\nu s}(\sigma_\nu)|\,|k_{sj}(\sigma_\nu-\tau)|\right] \qquad (2.10)$$

Очевидно, $\inf U = -\sup U$ при условиях (2.7) и для производной dV/dt справедливо неравенство

$$\frac{dV}{dt} < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}(t)\, y_i(t)\, y_j(t) +$$

$$+ \tau \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \Big\{ \sum_{i,j,\mu,\nu,s=1} |c_{\mu\nu}(t)|\, |k_{\mu i}(t)|\, |p_{\nu s}(\sigma_\nu)|\, |k_{sj}(\sigma_\nu)| +$$

$$+ |q_{\nu s}(\sigma_\nu)|\, |k_{sj}(\sigma_\nu - \tau)|] \Big\}$$

Обозначая

$$\omega(t,\tau) = \sup \sum_{i,j,\mu,\nu,s=1} |c_{\mu\nu}(t)|\, |k_{\mu i}(t)|\, [\, |p_{\nu s}(\sigma_\nu)| \cdot |k_{sj}(\sigma_\nu)| +$$

$$+ |q_{\nu s}(\sigma_\nu)|\, |k_{sj}(\sigma_\nu - \tau)|] \tag{2.11}$$

в области $t - \tau \leqslant \sigma_\nu \leqslant t$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, будем иметь

$$\frac{dV}{dt} < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}(t)\, y_i y_j + \tau\omega(t,\tau) \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

или

$$\frac{dV}{dt} < \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ij}^{1}(t) + \delta_{ij}\tau\omega(t,\tau)]\, y_i y_j, \quad \delta_{ij} \text{ — символ Кронекера} \tag{2.12}$$

Теорема 2. Тривиальное решение системы дифференциальных уравнений первого приближения асимптотически устойчиво, если корни $\lambda_1(t,\tau), \ldots, \lambda_n(t;\tau)$ уравнения

$$\det \| a_{ij}^{(1)}(t) + \delta_{ij}(\tau\omega(t,\tau) - \lambda) \| = 0$$

удовлетворяют условию $\lambda_i(t,\tau) \leqslant \varepsilon < 0$ $(i = 1, \ldots, n)\, t > t_0$, где ε — произвольно малое фиксированное отрицательное число.

Очевидно, всегда существует отличное от нуля значение запаздывания τ, при котором из асимптотической устойчивости решения системы (1.4) следует асимптотическая устойчивость системы (1.3).

3. Теоремы 5, 6, 7 работы [2] позволяют получить не только достаточные условия асимптотической устойчивости, сформулированные в теоремах 1 и 2, но и оценки для возмущений. Предположим, что искомая оценка имеет вид:

$$V \leqslant V_0 \exp \int_{t_0}^{t} \lambda'(t)\, dt \tag{3.1}$$

Неравенство (3.1) должно следовать из оценок для производной dV/dt, зависящей от координат $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, $x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)$ двух точек интегральной кривой, связанных следующим из (3.1) неравенством:

$$V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t) \exp \int_{t-\tau}^{t} -\lambda'(t)\, dt \leqslant V(t-\tau, x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \tag{3.2}$$

Определим $\sup dV/dt$ при фиксированных значениях $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ в области значений $x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)$, определяемой неравенством

$$V(t-\tau, x_1(t-\tau), \ldots, x_n(t-\tau)) \leqslant V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \exp \int_{t-\tau}^{t} -\lambda'(t)\,dt \qquad (3.3)$$

Составляя функцию

$$\Phi_1 = \frac{dV}{dt} - \nu\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t-\tau) - \varphi(t)\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)\right] \qquad \left(\varphi(t) = \exp\int_{t-\tau}^{t} -\lambda'(t)\,dt\right) \qquad (3.4)$$

и выполняя аналогичные приведенным в п. 1 вычисления, получим следующую оценку для производной dV/dt:

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\beta_{ij}(t) + \delta_{ij}\sqrt{\varphi(t)\,h'(t)})\,\xi_i\xi_j \geqslant \frac{dV}{dt}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i,j=1}^{n} (\beta_{ij}(t) + \delta_{ij}\sqrt{\varphi(t)\,h''(t)})\,\xi_i\xi_j \qquad (3.5)$$

где $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = V$ и переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ связаны с $x_1, \ldots, x_n$ теми же, что и в п. 1, формулами преобразования.

Функция $\varphi(t)$ должна быть такова, чтобы из (3.5) следовала предположенная оценка (3.1). Следовательно, для всякого $t \geqslant t_0$ функция $\lambda'(t)$ должна быть не меньше наибольшего корня уравнения

$$\det \| \beta_{ij}(t) + \delta_{ij}(\sqrt{\varphi(t)\,h'} - \lambda) \| = 0$$

Пусть $\mu'(t)$ наибольший корень уравнения

$$\det \| \beta_{ij}(t) - \delta_{ij}\mu \| = 0.$$

Тогда, очевидно, $\lambda'(t)$ должна быть определена из неравенства

$$\lambda'(t) \geqslant \mu'(t) + \sqrt{\varphi(t)\,h'(t)} \qquad (3.6)$$

При этом согласно определению функции $\varphi(t)$ функция $\lambda'(t)$ определяется неравенством (3.6).

Неравенство (3.6) можно заменить равенством: заменяя при этом $\varphi(t)$ согласно (3.4), имеем

$$\lambda'(t) = \mu'(t) + \sqrt{h'(t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t} \lambda'(t)\,dt\right) \qquad (3.7)$$

Таким образом, для возмущений может быть получена оценка вида (3.1), где функция $\lambda'(t)$ определяется из (3.6) или (3.7).

Аналогично может быть получена оценка для возмущений в случае, когда оценка для dV/dt находится на основании теорем 6 и 7 работы [2] п. 2.

Предположим опять, что искомая оценка имеет вид:

$$V \leqslant V_0 \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_1(t)\,dt \tag{3.8}$$

Выполняя ортогональное преобразование к переменным $y_1, \ldots, y_n$, получим для $\sigma < t$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(\sigma) \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)\Big) \exp \int_{\sigma}^{t} -\lambda_1(t)\,dt \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует, что переменные

$$y_1(\sigma_\nu), \ldots, y_n(\sigma_\nu), \qquad y_1(\sigma_\nu - \tau), \ldots, y_n(\sigma_n - \tau)\ (\nu = 1, \ldots, n)$$

входящие в выражение (2.6) для dV/dt, удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{j=1}^{n} y_i^2(\sigma_j) \leqslant (\exp \int_{\sigma_j}^{t} -\lambda_1(t)\,dt) \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(\sigma_j - \tau) \leqslant (\exp \int_{\sigma_j - \tau}^{t} -\lambda_1(t)\,dt) \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \tag{3.10}$$

где

$$\sigma_j = t - \theta_j \tau \qquad 0 < \theta_j < 1$$

Обозначая

$$\varphi_j(t) = \exp \int_{t - \theta_j \tau}^{t} -\lambda_1(t)\,dt, \quad \psi_j(t) = \exp \int_{t - (1+\theta_j)\tau} -\lambda_1(t)\,dt$$

$$\varphi(t) = \exp \int_{t-\tau}^{t} -\lambda_1(t)\,dt, \quad \psi(t) = \exp \int_{t-2\tau}^{t} -\lambda_1(t)\,dt$$

и предполагая $\lambda_1(t) \leqslant 0$, получим

$$\varphi_j(t) \leqslant \varphi(t), \qquad \psi_j(t) \leqslant \psi(t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.11}$$

При этом неравенства (3.10) можно усилить

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(\sigma_j) \leqslant \varphi(t) \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t), \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2(\sigma_j - \tau) \leqslant \psi(t) \sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) \tag{3.12}$$

и определять $\sup dV/dt$ в области (3.12).

Выполняя вычисления, аналогичные приведенным в п. 2, получим для $d\bar{V}/dt$ неравенство ($\sup U = -\inf U$)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \{a_{ij}^{(1)}(t) - \delta_{ij}[\omega_1(t,\tau)\sqrt{\varphi(t)} + \omega_2(t,\tau)\sqrt{\psi(t)}]\tau\} y_i y_j < \frac{dV}{dt} <$$

$$< \sum_{i,j=1}^{n} \{a_{ij}^{(1)}(t) + \delta_{ij}[\omega_1(t,\tau)\sqrt{\varphi(t)} + \omega_2(t,\tau)\sqrt{\psi(t)}]\tau\} y_i y_j \tag{3.13}$$

где

$$\omega_1(t,\tau) = \sup \sum_{i,j,\mu,\nu,s=1}^{n} |c_{\mu\nu}(t)\, k_{\mu i}(t)\, p_{\nu s}(\sigma_\nu)\, k_{sj}(\sigma_\nu)|$$

$$\omega_2(t,\tau) = \sup \sum_{i,j,\mu,\nu,s=1} |c_{\mu\nu}(t)\, k_{\mu i}(t)\, q_{\nu s}(\sigma_\nu)\, k_{sj}(\sigma_\nu - \tau)|$$

в области $t - \tau \leqslant \sigma_\nu \leqslant t$.

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ должны быть таковы, чтобы при всяком $t > t_0$ функция $\lambda_1(t)$ была не меньше наибольшего из корней уравнения

$$\det \| a_{ij}^{(1)}(t) + \delta_{ij}[\tau(\omega_1(t,\tau)\sqrt{\varphi(t)} + \omega_2(t,\tau)\sqrt{\psi(t)}) - \lambda] \| = 0$$

Пусть $\mu_1(t)$ — наибольший корень уравнения

$$\det \| a_{ij}^{(1)} - \delta_{ij}\mu \| = 0$$

Тогда, очевидно, должно быть

$$\lambda_1(t) \geqslant \mu_1(t) + \tau\Big[\omega_1(t,\tau)\exp\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t} -\lambda_1(t)\,dt +$$
$$+ \omega_2(t,\tau)\exp\frac{1}{2}\int_{t-2\tau}^{t} -\lambda_1(t)\,dt\Big] \qquad (3.14)$$

Неравенство (3.14) определяет функцию $\lambda_1(t)$. Таким образом, оценка вида (3.8) может быть получена и функция $\lambda_1(t)$ определяется из неравенства (3.14).

Для определения функции $\lambda'(t)$ из (3.7) и $\lambda_1(t)$ из (3.14), причем (3.14) можно заменить также равенством, можно применить известный способ последовательных приближений.

Пусть $\lambda_0'(t), \lambda_1'(t), \ldots, \lambda_n'(t), \ldots$ или $\lambda_1^{(0)}(t), \lambda_1^{(1)}(t), \ldots, \lambda_1^{(n)}(t), \ldots$ последовательности приближений соответственно для функций $\lambda'(t)$ и $\lambda_1(t)$.

Тогда, полагая $\lambda_0' \equiv 0$ или $\lambda_1^{(0)} = 0$, получим

$$\lambda_1'(t) = \mu'(t) + \sqrt{h'(t)}$$

. . . .

$$\lambda_n'(t) = \mu'(t) + \sqrt{h'(t)}\exp\Big(\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t} -\lambda_{n-1}'(t)\,dt\Big)$$

$$\lambda_1^{(1)}(t) = \mu_1(t) + \tau[\omega_1(t,\tau) + \omega_2(t,\tau)]$$

. . . .

$$\lambda_1^{(n)}(t) = \mu_1(t) + \tau\Big[\omega_1(t,\tau)\exp\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t} -\lambda_1^{(n-1)}(t)\,dt +$$
$$+ \omega_2(t,\tau)\exp\frac{1}{2}\int_{t-2\tau}^{t} -\lambda_1^{(n-1)}(t)\,dt\Big]$$

Вопросы сходимости получаемых таким образом последовательностей в настоящей работе не рассматриваются.

4. Возвращаясь к исходной системе (1.1) или (1.2), можно сформулировать следующий достаточный признак устойчивости.

Теорема 3. Если для системы дифференциальных уравнений первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}(p_{ij}(t)\,x_j(t)+q_{ij}(t)\,x_j(t-\tau)) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

существует определенно-положительная функция Ляпунова, производная которой в силу этой системы может быть мажорирована определенно-отрицательной квадратичной формой, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от функций X_i.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующих теорем для систем без запаздывания [7].

Очевидно также, что теорема 3 справедлива, если функции X_i стеснены, например, условиями вида [7]

$$|X_i(t;x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1(t-\tau),\ldots,x_n(t-\tau))|<$$
$$<A\{|x_1(t)|+\ldots+|x_n(t)|+|x_1(t-\tau)|+\ldots+|x_n(t-\tau)|\}$$

где A — достаточно малая постоянная.

На основании теоремы 3 справедливо утверждение, что условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы уравнений первого приближения, определяемые теоремами 1 и 2, являются также достаточными условиями асимптотической устойчивости исходной системы (1.1).

5. Рассмотрим, в качестве примера, дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\varphi}(t)+a_1\dot{\varphi}(t)+a_2\varphi(t)+a_3\varphi(t-\tau)=0 \tag{5.1}$$

описывающее переходные процессы в некоторых системах автоматического регулирования [8].

Введем обозначения

$$\dot{\varphi}(t)=x_1(t), \qquad \varphi(t)=x_2(t), \qquad a_i=-b_i \qquad (i=1,2,3)$$

При этом уравнение (5.1) можно записать в виде системы

$$\frac{dx_1}{dt}=b_1x_1(t)+b_2x_2(t)+b_3x_2(t-\tau), \quad \frac{dx_2}{dt}=x_1(t) \tag{5.2}$$

При $\tau=0$ будем иметь систему

$$\frac{dx_1}{dt}=b_1x_1(t)+(b_2+b_3)\,x_2(t), \qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1(t) \tag{5.3}$$

Предполагая тривиальное решение системы (5.3) устойчивым, будем искать функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V=\alpha_{11}x_1^2+2\alpha_{12}x_1x_2+\alpha_{22}x_2^2$$

удовлетворяющей уравнению

$$dV\,/\,dt=-2\,(x_1^2+x_2^2)$$

где производная $dV\,/\,dt$ вычислена в силу (5.3). Решая это уравнение, находим

$$\alpha_{11}=\frac{1-(b_2+b_3)}{b_1(b_2+b_3)}, \qquad \alpha_{12}=-\frac{1}{b_2+b_3}, \qquad \alpha_{22}=\frac{b_1^2+(b_2+b_3)^2-(b_2+b_3)}{b_1(b_2+b_3)} \tag{5.4}$$

Вычислим производную определенно-положительной, при условиях

$$a_1 > 0,\ a_2 + a_3 > 0$$

квадратичной формы V в силу системы (5.2):

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = [(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12})\,x_1^2(t) + (\alpha_{11}b_2 + \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22})\,x_1(t)\,x_2(t) + \alpha_{12}b_2x_2^2(t)] + $$
$$+ b_3\,[\alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}x_2(t)]\,x_2(t-\tau) \tag{5.5}$$

Согласно п. 1, условия устойчивости можно получить как условия отрицательности функции dV/dt при $V(x_1(t-\tau), x_2(t-\tau)) \leqslant V(x, (t), x_2(t))$. Для нахождения мажоранты функции dV/dt преобразуем форму V к каноническому виду подстановкой

$$x_1 = k_1y_1 + k_2y_2, \qquad x_2 = y_2 \qquad \left(k_1 = \frac{1}{\alpha_{11}}\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{12}^2},\ k_2 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\right)$$

При этом

$$V = \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)\,(y_1^2 + y_2^2)$$

Переходя в (5.5) к переменным y_1, y_2, получим

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = (a_{11}b_1 + \alpha_{12})\,k_1^2y_1^2(t) + [(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12})\,2k_1k_2 +$$
$$+ (\alpha_{11}b_2 + \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22})\,k_1]\,y_1(t)\,y_2(t) + [(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12})\,k_2^2 +$$
$$+ (\alpha_{11}b_2 + \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22})\,k_2 + \alpha_{12}b_2]\,y_2^2(t) + b_3\alpha_{11}k_1y_1(t)\,y_2(t-\tau)$$

Наибольшее значение, которого dV/dt достигает в области

$$y^2{}_1(t-\tau) + y_2^2(t-\tau) \leqslant y_1^2(t) + y_2^2(t)$$

не превосходит $\sup dV/dt$ в области $|y_2(t-\tau)| \leqslant |y_1(t)| + |y_2(t)|$.

Функция dV/dt будет определенно-отрицательна, если будут определенно-отрицательны квадратичные формы, получаемые из dV/dt при $y_2(t-\tau) = y_1 \pm y_2$, $-y_1 \pm y_2$. Замечая, что первое неравенство Сильвестера всегда выполнено, получаем следующие условия отрицательной знакоопределенности указанных двух квадратичных форм:

$$[(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}) + (\alpha_{11}/k_1)|b_3|][\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12})\ \ k_2^2 + (\alpha_{11}b_2 + \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22})\,k_2 + \alpha_{12}b_2] -$$
$$-\frac{1}{4}[(\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12})\,2k_2 + (\alpha_{11}b_2 + \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}) \pm \alpha_{11}b_3]^2 > 0$$

Выражая α_{11}, α_{12}, α_{22}, k_1, k_2, b_1, b_2, b_3 через коэффициенты исходной системы a_1, a_2, a_3, получим

$$[1-|a_3|(1 + a_2+a_3)^2/a_1(a_2 + a_3)\sqrt{(a_2 + a_3)\,[(1+ a_2 + a_3)^2 + a_1^2]}] \times [1+a_1^2/(1 + a_2 +$$
$$+ a_3)^2] - [a_1/(1 + a_2 + a_3)+|a_3|(1 + a_2 + a_3)/a_1(a_2+a_3)]^2 > 0 \tag{5.7}$$

Таким образом, получены условия устойчивости тривиального решения уравнения (5.1) независимо от величины запаздывания τ: ((5.7) и $a_1 > 0$, $a_2 + a_3 > 0$)

Пользуясь теоремой 2, возможно получить условия устойчивости, содержащие запаздывание τ.

Полагая в (5.5) согласно (2.2)

$$x_2(t-\tau) = x_2(t) - \tau\frac{d}{dt}x_2(\sigma) \qquad (\sigma = t - \theta\tau,\ 0 < \theta < 1)$$

В силу (5.2) получаем $x_2(t-\tau) = x_2(t) - \tau x_1(\sigma)$. Подставляя в (5.5), получим

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = -(x_1^2(t) + x_2^2(t)) - b_3\tau\,[\alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}x_2(t)]\,x_1(\sigma) \tag{5.8}$$

Условия устойчивости можно получить как условия отрицательности функции dV/dt при

$$V(x_1(\sigma),\ x_2(\sigma)) \leqslant V(x_1(t),\ x_2(t))$$

Преобразуем квадратичную форму V к каноническому виду подстановкой

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = l_1 y_1 + l_2 y_2, \quad l_1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}}, \quad l_2 = \frac{1}{\alpha_{22}} \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}$$

При этом будет

$$V = \frac{1}{\alpha_{22}} (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha^2_{12}) (y_1^2 + y_2^2)$$

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = -\{y_1^2(t) + l_1^2 y_1^2(t) + 2l_1 l_2 y_1(t) y_2(t) + l_2^2 y_2^2(t)] - $$
$$- b_3\tau [(\alpha_{11} + \alpha_{12} l_1) y_1(t) + \alpha_{12} l_2 y_2(t)] y_1(\sigma)$$

Верхний предел производной dV / dt в области

$$y_1^2(\sigma) + y_2^2(\sigma) \leqslant y_1^2(t) + y_2^2(t)$$

не превосходит ее верхнего предела dV/dt в области

$$|y_1(\sigma)| \leqslant |y_1(t)| + |y_2(t)|$$

Аналогично предыдущему получаем в качестве достаточного условия отрицательности функции dV / dt условия положительности квадратичной формы

$$[(1 + l_1^2) - |b_3| \tau (\alpha_{11} + \alpha_{12} l_1)] y_1^2 + [l_2^2 - |b_3| \tau\alpha_{12} l_2] y_2^2 + [2 l_1 l_2 +$$
$$+ |b_3 + \tau(\alpha_{11} + \alpha_{12} l_1 + \alpha_{12} l_2)] y_1 y_2 \tag{5.9}$$

т. е. условие вида

$$[1 + l_1^2 - |b_3| \tau (\alpha_{11} + \alpha_{12} l_1)][l^2_2 - |b_3| \tau\alpha_{12} l_2] - [l_1 l_2 + {}^1/_2 |b_3| \tau (\alpha_{11} + \alpha_{12} l_1 + \alpha_{12} l_2)]^2 > 0 \tag{5.10}$$

Таким образом, условия устойчивости тривиального решения системы (5.1), полученные на основании теоремы 2, будут $a_1 > 0, a_2 + a_3 > 0$ и условие (5.10)

Начиная с некоторого значения τ, область устойчивости, определяемая неравенствами (5.10), либо пересекает, либо находится внутри области устойчивости, определяемой неравенствами (5.7).

Это показывает, что оценка для dV / dt по способу, предложенному в п. 2, точнее оценки, данной в п. 1 лишь для малых значений запаздывания.

Поступила 27 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. ГТТИ, 1933.
4. Четаев Н. Г. О выборе параметров устойчивой механической системы. ПММ, т. XV, 1951.
5. Разумихин Б. С. Оценки решений системы дифференциальных уравнений возмущенного движения с переменными коэффициентами. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
6. Разумихин Б. С. Об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. ГИТТЛ, 1952.
8. Глухов В. К. Автоматическое регулирование солесодержания котловой воды. Теплоэнергетика, № 7, 1954.