Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ИЗ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

1. Пусть заданы уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

относительно которых известно, что они допускают

$$U_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, U_p(x_1, \ldots, x_n, t)$$

$p < n$ первых интегралов, уничтожающихся, когда все $x_1, \ldots, x_n$ равны нулю.

Если удастся найти функцию $\varphi(U_1, \ldots U_p)$ от известных интегралов, знакоопределенную относительно $x_1, \ldots, x_n$, то мы сможем сделать вывод об устойчивости движения [1], не привлекая к рассмотрению других свойств уравнений возмущенного движения.

Естественно начать исследование с рассмотрения условий знакоопределенности простейшей, заведомо знакопостоянной функции от известных интегралов

$$\psi(U_1, \ldots, U_p) = U_1^2(x_1, \ldots, x_n, t) + \ldots + U_p^2(x_1, \ldots, x_n, t)$$

Оказывается, что верна следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы существовала какая-либо знакоопределенная функция $\varphi(U_1, \ldots, U_p)$ от известных интегралов, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\psi(U_1, \ldots, U_p) = U_1^2(x_1, \ldots x_n, t) + \ldots + U_p^2(x, \ldots, x_n, t)$$

была знакоопределенной.

Необходимость. Предположим, что знакоопределенная, пусть положительная, функция $\varphi(U_1, \ldots, U_p)$ существует, в то время как функция $\psi(U_1, \ldots, U_p)$ не является знакоопределенной.

Функция $\varphi(U_1, \ldots, U_p) = f(x_1, \ldots, x_n, t)$ по условию уничтожается, когда все переменные $x_1, \ldots, x_n$ делаются нулями. Поскольку все функции $U_1, \ldots, U_p$ также уничтожаются при выполнении этого условия, то это значит, что функция $\varphi(U_1, \ldots, U_p)$ необходимо должна уничтожаться, когда все $U_1, \ldots, U_p$ делаются нулями.

Действительно, $U_1(0, \ldots, 0, t) = \ldots = U_p(0, \ldots, 0, t) = 0$; следовательно, $\varphi(0, \ldots, 0) = f(0, \ldots, 0, t) = 0$.

Если функция $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ определенно-положительна, существует не зависящая от времени определенно-положительная функция $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $f(x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant f_1(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Если $\delta(\varepsilon) > 0$ есть положительный минимум функции $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ на малой сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon$, то это значит, что существует такое положительное число $\delta_1[\delta] > 0$, что

$$\psi(U_1, \ldots, U_p) \geqslant \delta_1[\delta(\varepsilon)] \text{ на сфере } x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon$$

Действительно, если бы такого числа не существовало, то функция $\psi(U_1, \ldots, U_p)$ могла бы сделаться на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon$ сколь угодно малой и в силу непрерывной зависимости от $U_1, \ldots, U_p$ могла бы сделаться сколь угодно малой и функция $\varphi(U_1, \ldots, U_p) = f(x_1, \ldots, x_n, t)$. Так как последняя на сфере ограничена снизу по условию, то это значит, что функция $\psi(U_1, \ldots, U_p) \geqslant \delta_1[\delta(\varepsilon)] > 0$ и является определенно-положительной.

Достаточность вытекает из постановки задачи.

2. Проводя дальнейшую редукцию проблемы, докажем следующую теорему.

Теорема. Функция $\psi(U_1, \ldots, U_p)$ будет знакоопределенной только тогда, когда хотя бы для одного из интегралов, пусть $U_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, возможно найти такую пару знакоопределенных функций

$$r_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \quad \rho_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

что

$$U_i^2(x_1, \ldots, x_n, t) > r_i$$

как только

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$$

$$U_1^2 + \ldots + U_{i-1}^2 + U_{i+1}^2 + \ldots + U_p^2 < \rho_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Необходимость. Если $\psi(U_1, \ldots, U_p)$ знакоопределенная и $W(x_1, \ldots, x_n)$ тоже знакоопределенная и такая, что $\psi(U_1, \ldots, U_p) > W$, если $x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0$, то

$$\psi(U_1, \ldots, U_p) > \theta(x_1^2 + \ldots + x_n^2),$$

где

$$\theta(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \min W(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{на сфере} \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon$$

есть тоже, как нетрудно показать, непрерывная и знакоопределенная функция квадрата радиуса сферы. Так как

$$\psi(U_1, \ldots, U_p) = U_1^2 + \ldots + U_p^2$$

то можно положить

$$r_i(x_1^2 + \ldots x_n^2) = \rho_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \tfrac{1}{2}\theta(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Достаточность. Условиям теоремы будет удовлетворять функция

$$W = \min[\rho_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \ r_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2)]$$

которая будет, очевидно, непрерывной и знакоопределенной, если существуют непрерывные и знакоопределенные функции

$$\rho_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \qquad r_i(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Из доказательства также следует, что если такую пару функций можно подобрать для какого-нибудь одного интеграла, то ее можно подобрать и для любого другого.

Практическое значение приведенной теоремы становится очевидным в том случае, если $U_1, \ldots, U_p$ не зависят явно от времени.

Следствие. Если $U_1, \ldots, U_p$ не зависят явно от времени, то, для того чтобы $\psi(U_1, \ldots, U_p)$ была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы хотя одна из функций $U_1^2(x_1, \ldots, x_n)$ могла принимать только положительные значения во всех точках, отличных от $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и удовлетворяющих условиям

$$U_1(x_1, \ldots x_n) = \ldots = U_{i-1}(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= U_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) = \ldots U_p(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

причем если последнее условие выполняется хотя бы для одной из функций $U_i(x_1, \ldots, x_n)$, то оно выполняется и для любой другой.

На доказательстве этого предложения мы не останавливаемся.

Последний результат существенно упрощает задачу в том случае, если из каких-либо $p-1$ уравнений

$$U_1 = \ldots = U_{i-1} = U_{i+1} = \ldots = U_p = 0$$

возможно выразить какие-либо $p-1$ переменных, пусть $x_{n-p+2}, \ldots, x_n$, как функции $x_1, \ldots, x_{n-p+1}$:

$$x_{n-p+2} = f_1(x_1, \ldots, x_{n-p+1}) \ldots x_n = f_{p-1}(x_1, \ldots, x_{n-p+1})$$

Если это возможно сделать, то вопрос о знакоопределенности $\psi(U_1 \ldots, U_p)$ будет решаться знакоопределенностью функции

$$V(x_1, \ldots, x_{n-p+1}) = U_i(x_1, \ldots, x_{n-p+1}, f_1, \ldots, f_{p-1})$$

относительно переменных $x_1, \ldots, x_{n-p+1}$. Если же указанную операцию возможно проделать только с меньшим числом переменных, то вопрос решится при рассмотрении на знакоопределенность относительно $x_1, \ldots, x_{n-p+k}$ функции

$$V_1(x_1, \ldots, x_{n-p+k}) = U_1^2(x_1, \ldots, x_{n-p+k}, f_1, \ldots, f_{p-k}) +$$
$$+ U_k^2(x_1, \ldots, x_{n-p+k}, f_1, \ldots, f_{p-k})$$

тоже зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_{n-p+k}$ в числе, меньшем, чем n, где

$$x_{n-p+k+1} = f_1(x_1, \ldots, x_{n-p+k}) \ldots x_n = f_{p-k}(x_1, \ldots, x_{n-p+k})$$

есть результат разрешения относительно последних $p-k$ переменных уравнений $U_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) = \ldots U_p(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

3. Предположим теперь, что независимые от времени интегралы $U_1, \ldots, U_p$ являются голоморфными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$ вида

$$U_k = \alpha_1^k x_1 + \ldots + \alpha_n^k x_n + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^k x_i x_j + X_k \qquad (k = 1, 2 \ldots p) \tag{3.1}$$

где α_i^k, α_{ij}^k — постоянные величины, а $X_1, \ldots, X_p$ — функции, не содержащие членов измерения ниже третьего относительно переменных.

Рассмотрим следующие случаи: а) ранг матрицы (α_i^k) равен p; б) ранг матрицы (α_i^k) меньше p. Если ранг равен p, то линейные формы

$$v_1 = \alpha_1^1 x_1 + \ldots + \alpha_n^1 x_n, \ldots, v_p = \alpha_1^p + \ldots + \alpha_n^p x_n$$

независимы между собой.

Беря их за новые переменные вместо $x_1, \ldots, x_p$, перепишем соотношения (3.1) в форме

$$U_k = v_k + \sum_{i,\, j=1}^{p} \beta_{ij}^{\;k} v_i v_j + \sum_{\substack{i=1\\ j=p+1}}^{\substack{p\\ n}} \beta_{ij}^{\;k} v_i x_j + \sum_{i,\, j=p+1}^{n} \beta_{ij}^{\;k} x_i x_j + X_k' \quad (k=1,\, 2, \ldots, p) \tag{3.2}$$

где $\beta_{ij}^{\;k}$ — суть постоянные, а $X_1', \ldots, X_p'$ — голоморфные функции $v_1, \ldots, v_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$, не содержащие членов ниже третьего измерения относительно переменных.

Если первые $p-1$ уравнений (3.2) разрешить относительно $v_1, \ldots, v_{p-1}$, разыскивая последние в виде рядов, расположенных по степеням $U_1, \ldots, U_{p-1}, v_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$, то это единственное решение будет иметь вид:

$$v_k = U_k - \sum_{i,\, j=1}^{p-1} \beta_{ij}^{k} U_i U_j - \sum_{\substack{i=1\\ j=p+1}}^{\substack{p-1\\ n}} \beta_{ij}^{\;k} U_i x_j - \sum_{j=p+1}^{n} \beta_{pj}^{\;k} v_p x_j - \sum_{ij=p+1}^{n} \beta_{ij}^{k} x_i x_j + Y_k$$
$$(k = 1,\, 2, \ldots, p-1)$$

где $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ — функции того же вида, что и $X_1, \ldots, X_p$.

Если теперь $U_1, \ldots, U_{p-1}$ приравнять нулю и результат подставить в последнее уравнение (3.2), то получим

$$U_p^0 = v_p + \beta_{pp}^p v_p^2 + \sum_{j=p+1}^{n} \beta_{pj}^p v_p x_j + \sum_{i,j=p+1}^{n} \beta_{ij}^{\;p} x_i x_j + Z$$

где Z — функция $v_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ степени не ниже третьей.

Из последнего уравнения видно, что U_p° может принимать значения разных знаков в зависимости от знака v_p. Отсюда на основании следствия из 2 делаем вывод, что из $U_1, \ldots, U_p$ невозможно построить знакоопределенный интеграл.

4. Если среди форм $v_1, \ldots, v_p$ найдется $p-1$ независимых, что соответствует случаю, когда ранг матрицы $(\alpha_i^{\;k})$ равен $p-1$, то мы эти $p-1$ линейные формы можем взять за новые переменные. Пусть это будут формы $v_1, \ldots, v_{p-1}$ и пусть форма v_p выражается через них под видом $v_p = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_{p-1} v_{p-1}$. Тогда уравнения (3.2) примут вид:

$$U_k = v_k + \sum_{i,j=1}^{p-1} \beta_{ij}^{k} v_i v_j + \sum_{\substack{i=1\\ j=p}}^{\substack{p-1\\ n}} \beta_{ij}^{\;k} v_i x_j + \sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{\;k} x_i x_j + X_k' \quad (k=1,\, 2, \ldots, p-1$$

$$U_p = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_{p-1} v_{p-1} + \sum_{i,\, j=1}^{p-1} \beta_{ij}^{\;p} v_i v_j + \sum_{\substack{i=1\\ j=p}}^{\substack{p-1\\ n}} \beta_{ij}^{\;p} v_i x_j + \sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{\;p} x_i x_j + X_p'$$

Разрешая первые $p-1$ уравнений относительно $v_1, \ldots, v_{p-1}$, получим

$$v_k = U_k - \sum_{i,j=1}^{p-1} \beta_{ij}^{\;k} U_i U_j - \sum_{\substack{i=1\\ j=p}}^{\substack{p-1\\ n}} \beta_{ij}^{\;k} U_i x_j - \sum_{i,j=p}^{n} \beta_{ij}^{\;k} x_i x_j + Y_k$$

Если теперь в этих уравнениях положить $U_1, \ldots, U_{p-1}$ равными нулю, то получим

$$v_k^0 = -\sum_{i,\, j=p}^{n} \beta_{ij}^{k} x_i x_j + Y_k^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1) \tag{4.1}$$

где $Y_1^0, \ldots, Y_{p-1}^0$ — функции $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ при условии, что $U_1, \ldots, U_{p-1}$ все равны нулю.

Подставляя выражения (4.1) в последнее из уравнений (3.2), получаем

$$U_p^0 = -\gamma_1 \sum_{i,\, j=p}^{n} \beta_{ij}^{1} x_i x_j - \ldots - \gamma_{p-1} \sum_{i,\, j=p}^{n} \beta_{ij}^{p-1} x_i x_j + \sum_{i,\, j=p}^{n} \beta_{ij}^{p} x_i x_j + Z$$

где Z — голоморфная относительно $x_p, \ldots, x_n$ функция степени не ниже третьей.

Если квадратичная форма

$$R = \sum_{i,\, j=p}^{n} (-\gamma_1 \beta_{ij}^{1} - \ldots - \gamma_{p-1} \beta_{ij}^{p-1} + \beta_{ij}^{p}) x_i x_j$$

будет знакоопределенной относительно $x_p, \ldots, x_n$, то знакоопределенной будет и функция $\psi(U_1, \ldots, U_p) = U_1^2 + \ldots + U_p^2$, а невозмущенное движение устойчивым.

Если же эта форма будет знакопеременной, то из данных интегралов невозможно построить знакоопределенную функцию.

Если ранг матрицы (α_i^k) равен $p-r$, то мы, введя новые переменные $v_1, \ldots, v_{p-r}$, которые являются линейно независимыми линейными формами, заменим через них $x_1, \ldots, x_{p-r}$ в уравнениях (3.1). Решая первые $p-r$ уравнений относительно $v_1, \ldots, v_{p-r}$, получим

$$v_k = U_k - \sum_{i,\, j=1}^{p-r} \beta_{ij}^{k} U_i U_j - \sum_{\substack{i=1 \\ j=p-r+1}}^{p-r \quad n} \beta_{ij}^{k} U_i x_j - \sum_{i,\, j=p-r+1}^{n} \beta_{ij}^{k} x_i x_j + Y_k \qquad (k = 1, \ldots, p-r)$$

Полагая $U_1, \ldots, U_{p-r}$ равными нулю, получим

$$v_k^0 = -\sum_{i,\, j=p-r+1}^{n} \beta_{ij}^{k} x_i x_j + Y_k^0 \qquad (k = 1, \ldots, p-r)$$

Если считать, что $v_{p-r+1}, \ldots, v_p$ выражаются через $v_1, \ldots, v_{p-r}$ под видом

$$v_{p-r+1} = \gamma_1^1 v_1 + \ldots + \gamma_{p-r}^1 v_{p-r}, \ldots, v_p = \gamma_1^r v_1 + \ldots + \gamma_{p-r}^r v_{p-r}$$

то после подстановки $v_1^0, \ldots, v_{p-r}^0$ в последние r уравнений системы (3.2) получим

$$U_{p-r+k}^0 = \sum_{i,\, j=p-r+1}^{n} (-\gamma_1^k \beta_{ij}^{1} - \ldots - \gamma_{p-r}^k \beta_{ij}^{p-r} + \beta_{ij}^{p-r+k}) x_i x_j + X_{p-r+k}^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

где $X_{p-r+1}^0, \ldots, X_p^0$ — функции $X_{p-r+1}, \ldots, X_p$ при условии, что $U_1, \ldots, U_{p-r}$ равны все нулю.

Как это показано в 2, функция $\psi(U_1, \ldots, U_p)$ будет знакоопределенной только тогда, когда будет знакоопределенной относительно $x_{p-r+1}, \ldots, x_n$ функция

$$(U_{p-r+1}^0)^2 + \ldots + (U_p^0)^2 \tag{4.2}$$

Для знакоопределенности последней функции достаточно, чтобы была знакоопределенной относительно $x_{p-r+1}, \ldots, x_n$ форма четвертой степени

$$S_{p-r} = \sum_{k=1}^{r} \Big[\sum_{i,\, j=p-r+1}^{n} (-\gamma_1^k \beta_{ij}^1 - \ldots - \gamma_{p-r}^k \beta_{ij}^{p-r} + \beta_{ij}^{p-r+k})\, x_i x_j]^2$$

с которой начинается разложение функции (4.2) по степеням переменных.

Изложенный метод целиком переносится на тот случай, когда α_i^k и α_{ij}^k и остальные коэффициенты разложения являются непрерывными и ограниченными функциями времени, тогда, когда $p - r\, (r > 0)$ — ранг матрицы (α_i^k) со временем не меняется и хотя бы один из миноров порядка $p - r$ данной матрицы все время по модулю превосходит некоторую постоянную.

Нетрудно также показать, что $\psi(U_1, \ldots, U_p)$ не будет знакоопределенной, когда указанный ранг хотя бы для одного момента времени $t \geqslant t_0$ становится равным p.

5. Рассмотрим теперь, в какой связи находится изложенный метод с методом выбора знакоопределенной линейной связки, принадлежащим Н. Г. Четаеву [2].

Изложим кратко метод Н. Г. Четаева. Если известные, независимые от времени интегралы являются голоморфными функциями переменных, то подбираются такие постоянные $\lambda_1, \ldots \lambda_p$, $C_1, \ldots, C_p$, чтобы разложение функции

$$\chi(U_1, \ldots, U_p) = \lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_p U_p + C_1 U_1^2 + \ldots + C_p U_p^2$$

начиналось знакоопределенной квадратичной формой.

На основании теоремы из 1 такие постоянные можно подобрать только тогда, когда будет знакоопределенной функция $\psi(U_1, \ldots, U_p)$.

Если ранг матрицы (α_i^k) равен $p - 1$, то всегда можно подобрать λ_i и C_i так, чтобы условия знакоопределенности квадратичной формы, с которой начинается разложение функции $\chi(U_1, \ldots, U_p)$, совпадали с условиями знакоопределенности относительно $x_p, \ldots x_n$ для квадратичной формы R. Действительно, в этом случае выбор $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ возможен единственным с точностью до общего множителя образом.

Положим

$$\lambda_1 = -\gamma_1, \ldots, \lambda_{p-1} = -\gamma_{p-1}, \qquad \lambda_p = 1$$

Тогда

$$K = \lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_p U_p = R + \sum_{i,j=1}^{p-1} (-\gamma_1 \beta_{ij}^1 - \ldots - \gamma_{p-1} \beta_{ij}^{p-1} + \beta_{ij}^p)\, v_i v_j +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ j=p}}^{\substack{n \\ p-1}} (-\gamma_1 \beta_{ij}^1 - \ldots - \gamma_{p-1} \beta_{ij}^{p-1} + \beta_{ij}^p)\, v_i x_j + Z'$$

где через Z' обозначена совокупность членов порядка не ниже третьего, или, если переписать в некоторых сокращенных обозначениях:

$$K = \sum_{i,j=1}^{p-1} \theta_{ij} v_i v_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j=p}}^{\substack{n \\ p-1}} \theta_{ij} v_i x_j + \sum_{i,\, j=p}^{n} \theta_{ij} x_i x_j + Z'$$

Если R знакоопределенна, то[1]

$$\theta_{nn}>0, \qquad \begin{vmatrix} \theta_{nn} & \theta_{n,\,n-1} \\ \theta_{n-1} & \theta_{n-1,\,n-1} \end{vmatrix} >0, \ldots, \begin{vmatrix} \theta_{nn} & \ldots & \theta_{np} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{pn} & \ldots & \theta_{pp} \end{vmatrix} >0$$

и, кроме того, $\theta_{n-1,\,n-1}>0, \ldots, \theta_{pp}>0$.

Так как

$$\chi(U_1, \ldots, U_p) = K + C_1'U_1^2 + \ldots + C_{p-1}'U_{p-1}^2$$

(суммирование производится до $p-1$, так как v_p линейно зависит от $v_1, \ldots, v_{p-1}$), то ясно, что всегда можно подобрать $C_1, \ldots, C_{p-1}$ достаточно большими, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{vmatrix} \theta_{nn} & \ldots & \theta_{n,\,p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{p-1,\,n} & \ldots & \theta_{p-1,\,p-1}+C'_{p-1} \end{vmatrix} >0 \ldots, \quad \begin{vmatrix} \theta_{nn} & \ldots & \theta_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{1n} & \ldots & \theta_{11}+C'_1 \end{vmatrix} >0$$

Выполнения этих неравенств достаточно, чтобы разложение функции $\chi(U_1, \ldots, U_p)$ начиналось со знакоопределенной квадратичной формы.

Подобного утверждения нельзя, однако, выдвинуть, если ранг матрицы (α_i^k) меньше, чем $p-1$.

Легко показать, что знакоопределенную связку из известных интегралов можно построить только тогда, когда ее можно построить из любой системы p интегралов, каждый из которых является линейной комбинацией исходных интегралов, причем линейная подстановка не является особенной.

Для дальнейшего нам удобнее рассмотреть не исходную систему интегралов, а следующую их линейную подстановку, очевидно, неособенную:

$$V_1 = U_1, \ldots, V_{p-r} = U_{p-r}, \quad V_{p-r+1} = -\gamma_1^1 U_1 - \ldots - \gamma_{p-r}^1 U_{p-r} + U_{p-r+1}$$

$$V_p = -\gamma_1^r U_1 - \ldots - \gamma_{p-r}^r U_{p-r} + U_p$$

Поскольку разложения первых $p-r$ интегралов начинаются с линейно независимых форм, ясно, что $\lambda_1 = \ldots \lambda_{p-r} = 0$.

Следовательно, для построения связки, разложение которой начинается со знакоопределенной квадратичной формы, необходимо и достаточно, чтобы была знакоопределенной относительно $x_{p-r+1}, \ldots, x_n$ функция

$$T_0 = \lambda_{p-r+1} V_{p-r+1}^0 + \ldots + \lambda_p V_p^0 =$$

$$= \lambda_{p-r+1} \sum_{i,\,j=p-r+1}^{n} (-\gamma_1^1 \beta_{ij}^1 - \ldots - \gamma_{p-r}^1 \beta_{ij}^{p-r} + \beta_{ij}^{p-r+1}) x_i x_j + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_p \sum_{i,\,j=p-r+1}^{n} (-\gamma_1^r \beta_{ij}^1 - \ldots - \gamma_{p-r}^r \beta_{ij}^{p-r} + \beta_{ij}^p) x_i x_j + Z''$$

[1] Коэффициенты полагаем симметризованными.

Итак, вопрос сводится к возможности выбора знакоопределенной линейной комбинации из форм, с которых начинаются разложения

$$V_{p-r+1}^{0}, \ldots, V_p^{0}$$

Можно, однако, привести пример, когда такую линейную комбинацию подобрать невозможно, в то время как форма S_{p-r} будет знакоопределенной.

В качестве примера рассмотрим пару квадратичных форм:

$$M_1 = x_1^2 - x_2^2, \qquad M_2 = \sqrt{2}\, x_1 x_2$$

Любая их линейная комбинация

$$M_1 + \lambda M_2 = x_1^2 + \lambda \sqrt{2}\, x_1 x_2 - x_2^2$$

является знакопеременной. Однако форма

$$S_2 = (x_1^2 - x_2^2)^2 + (\sqrt{2}\, x_1 x_2)^2 = x_1^4 + x_2^4$$

является, очевидно, знакопеременной.

Прежде чем приступить к изложению примера, сформулируем правило получения формы R для случая, когда

$$U_k = \alpha_1^k x_1 + \ldots + \alpha_n^k x_n + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}^k x_i x_j + X_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

суть голоморфные и не зависящие от времени интегралы, а ранг системы форм $v_k = \alpha_1^k x_1 + \ldots + \alpha_n^k x_n$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ равен $p - 1$.

а) Решая систему уравнений $v_1 = \ldots, v_{p-1} = 0$ (в предположении, что минор, составленный из первых $p - 1$ колонок матрицы системы форм $v_1, \ldots, v_{p-1}$, отличен от нуля), получим

$$x_1 = \delta_p^1 x_p + \ldots + \delta_n^1 x_n \ldots x_{p-1} = \delta_p^{p-1} x_p + \ldots + \delta_n^{p-1} x_n$$

б) Решая систему уравнений

$$\alpha_i^1 \gamma_1 + \ldots + \alpha_i^{p-1} \gamma_{p-1} = \alpha_i^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

находим $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$.

в) Подставим в формы

$$\sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij}^k x_i x_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

на место $x_1, \ldots, x_p$ их выражения, полученные после операции (а).

Получим формы

$$\sum_{ij=p}^{n} \beta_{ij}^k x_i x_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Форма R выпишется под видом

$$R = \sum_{i,j=p}^{n} (-\gamma_1 \beta_{ij}^1 - \ldots - \gamma_{p-1} \beta_{ij}^{p-1} + \beta_{ij}^p)\, x_i x_j$$

6. В качестве примера проведем методом Н. Г. Четаева и предложенным методом доказательство известной теоремы Рауза [3].

Если уравнения движения механической системы, консервативной и голономной, записаны в форме Гамильтона

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{6.1}$$

и функция H не зависит явно от времени и от последних $n - k$, — $q_{k+1}, \dots, q_n$ обобщенных координат, то система уравнений (6.1) допускает $n - k + 1$ первых интегралов:

$$p_{k+1} = \alpha_{k+1}, \ \dots, \ p_n = \alpha_n, \qquad H = C$$

Если при фиксированных $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ система значений постоянных

$$p_1{}^0, \dots, p_k{}^0, \qquad q_1{}^0, \dots, q_k{}^0$$

представляет решение системы конечных уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \dots = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial q_1} = \dots = \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

то уравнения (6.1) допускают решение вида

$$p_1 = p_1{}^0, \dots, \quad p_k = p_k{}^0, \quad q_1 = q_1{}^0, \dots, q_k = q_k{}^0, \quad p_{k+1} = \alpha_{k+1}, \dots, p_n = \alpha_n$$

$$q_{k+1} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_{k+1}}\right)^0 (t - t_0), \dots, \ q_n = \left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^0 (t - t_0) \tag{6.2}$$

Как показал Рауз, T — кинетическая энергия системы, выписанная в переменных $p_{k+1}, \dots, p_n$ и $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$, имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^{n} \beta_{ij} p_i p_j$$

т. е. не будет содержать членов вида $\theta \dot{q}_i p_j$.

В силу изложенных соображений легко показать, что, если положить

$$\zeta_i = \dot{q}_i - (\dot{q}_i)^0, \dots, \qquad \xi_i = q_i - q_i{}^0 \qquad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$$\eta_i = p_i - \alpha_i \qquad (i = k + 1, \dots, n)$$

и предположить, что H — голоморфная функция своих переменных в окрестности (6.2), а через V обозначить потенциальную энергию системы, то разложение функции $H - (H)^0$ по степеням ζ_i, ξ_i, η_i будет иметь вид:

$$H - (H)^0 = \sum_{i=k+1}^{n} (\dot{q}_i)^0 \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} [\alpha_{ij})^0 + \gamma_{ij}] \zeta_i \zeta_j +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^{n} (\beta_{ij})^0 \eta_i \eta_j + \delta \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^{n} \beta_{ij} \alpha_i \alpha_j + V\right]$$

где γ_{ij} — функции, уничтожающиеся, когда все $\xi_1, \dots, \xi_k$ — нули, а значок $\delta [f(q_1, \dots, q_k)]$ обозначает вариацию функции $f(q_1, \dots, q_k)$ при переходе из положения $q_1{}^0, \dots, q_k{}^0$ в положение $q_1{}^0 + \xi_1, \dots, q_k{}^0 + \xi_k$.

Рауз доказал, что если при значениях (6.2) функция

$$F + V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=k+1}^{n} \beta_{ij} (q_1, \dots, q_k) \alpha_i \alpha_j + V(q_1, \dots, q_k)$$

имеет изолированный минимум, то движение устойчиво при условии, что постоянные $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ не возмущаются. Как утверждал Ляпунов[4], последнее условие несущественно. Приступим к доказательству этих предложений. Так как функции $H-(H)^0$, $\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$ суть интегралы уравнений возмущенного движения, а $(\dot{q}_i)^0$ — постоянные, то функция

$$M = H-(H)^0 - \sum_{i=k+1}^{n} (\dot{q}_i)^0 \eta_i + \sum_{i=k+1} C_i \eta_i^2$$

представляющая интеграл системы уравнений возмущенного движения, будет при достаточно больших C_i определенно-положительной функцией $\xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_k, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_n$, если определенно-положительной относительно $\xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta_1, \ldots, \zeta_k$ будет функция

$$[H-(H)^0]_{\eta_{k+1}=\ldots=\eta_n=0} = \sum_{i,j=1}^{k} [(\alpha_{ij})^0 + \gamma_{ij}]\zeta_i\zeta_j + \delta\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=k+1}^{n} \beta_{ij}\alpha_i\alpha_j + V\right]$$

Первая сумма будет всегда определенно-положительной относительно $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ функцией при достаточно малых $|\xi_1| \ldots, |\xi_k|$, так как $\gamma_{ij}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ уничтожаются, когда $\xi_1, \ldots, \xi_k$ суть все нули, а

$$\sum_{i,j=1}^{k} (\alpha_{ij})^0 \zeta_i\zeta_j$$

представляет собой определенно-положителькую квадратичную форму относительно переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$.

Итак, функция M будет определенно-положительной, а движение устойчивым, если функция $F+V$ будет иметь при значениях $q_1^0, \ldots, q_k^0$ изолированный минимум.

Доказательство закончено методом Н. Г. Четаева.

Рассмотрение функции

$$\psi[H-(H)^0, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_n] = [H-(H)^0]^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \eta_i^2$$

также приводит нас к выводу о том, что она будет определенно-положительной функцией ξ_i, ζ_i, η_i, если таковой будет функция

$$H-(H)^0]_{\eta_{k+1}=\ldots=\eta_n=0}$$

по отношению к переменным $\xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta_1, \ldots. \zeta_k$, а последняя будет определенно-положительной, если функция $F+V$ в положении $(\dot{q}_i)^0$, q_i^0 имеет изолированный минимум.

Доказательство это, как нетрудно видеть, иллюстрирует случай из 4, так как $p = n-k+1$, а ранг матрицы линейных частей известных интегралов равен $n-k$.

Поступила 18 XII 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1950.
3. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London, 1930.
4. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости, Собр. соч., т. I, 1954.