Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ЗАКОНАХ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛА С УПРОЧНЕНИЕМ

В. Д. Клюшников

(Москва)

Работа является попыткой проследить развитие методов в решении проблемы связи напряжений и деформаций в упрочняющемся, пластическом материале.

В обзоре не затронуты вопросы больших деформаций, термодинамики деформаций, а также вопросы, связанные с временными свойствами материалов. Здесь не находят отражения и методы решения краевых задач на основе того или иного закона пластичности. Оставаясь, таким образом, в рамках довольно узкого круга вопросов, мы по возможности стремились выявить ту логическую нить развития теории пластичности, которая в сравнительно короткий срок привела исследователей от простейшей теории Генки-Надаи к современным весьма общим результатам. При этом иногда в угоду связности изложения приходилось частично жертвовать самой историей вопроса.

Чтобы не загромождать изложение лишними подробностями, мы будем оста навливаться только на тех работах, которые представляются нам наиболее важными. Кроме того, нужно заметить, что при изложении последних нам казалось удобным иногда несколько видоизменить форму представления основных положений первоисточника, не затрагивая при этом, конечно, существа. В частности, везде, где в подлиннике рассматривается связь между тензорами, мы рассматриваем связь между соответствующими девиаторами. Такая замена не может вызвать сомнения, поскольку обычно предполагается независимость малых пластических деформаций от среднего давления, но в то же время рассмотрение связи непосредственно между девиаторами более удобно, в особенности при векторном представлении тензоров.

Теория пластичности упрочняющегося первоначально изотропного материала начинает свое существование в виде простейшей математической теории с двадцатых годов нашего столетия, когда после ряда работ, среди которых ведущее место занимали работы Генки [1] и Надаи [2], был высказан следующий гипотетический закон связи напряжений и деформаций для упруго-пластического материала:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2G_s Э_{ij}, \qquad dI_2 > 0, \\ dS_{ij} &= 2G\,dЭ_{ij}, \qquad dI_2 \leqslant 0, \end{aligned} \qquad I_2 = \frac{1}{2}\sum S_{ij}{}^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \tag{1}$$

где S_{ij} — девиатор напряжений, $Э_{ij}$ — девиатор деформаций, G_s — секущий модуль кривой зависимости касательного напряжения от деформации сдвига при опыте на чистый сдвиг и G — упругий модуль сдвига. Кроме того, как это было выяснено в ряде экспериментальных исследований, из которых основополагающими являлись исследования Бриджмена [3], при малых деформациях с большой степенью точности

$$\sigma = Ke \tag{2}$$

где σ — среднее или гидростатическое давление, K — упругий коэффициент пропорциональности, e — объемная деформация. Именно то обстоятельство, что объемная деформация упруга, позволило сократить задачу нахождения связи между напряжениями и деформациями до задачи о связи девиаторов напряжений и деформаций, что и сделано в законе (1).

При формулировке указанного закона ввиду отсутствия экспериментальных данных при сложном напряженном состоянии для упрочняющегося материала можно было руководствоваться только интуицией, да возможным обобщением таких, хорошо изученных к тому времени свойств, как обобщенный закон Гука и кривая простого растяжения-сжатия или кручения пластичного упрочняющегося материала. Понятно поэтому, что закон (1) отличается от упругого только тем, что вместо постоянного модуля G введен переменный коэффициент G_s. Большего не может дать обобщенный закон Гука, и все остальное в соотношениях (1) по существу является обобщением свойств кривой одноосного нагружения. Свойства такой кривой заключаются, во-первых, в том, что при непрерывном возрастании напряжений связь между напряжениями и деформациями представляется законом

$$\sigma_x = E_s \varepsilon_x$$

а при уменьшении напряжений, следующих за их непрерывным возрастанием:

$$d\sigma_x = E d\varepsilon_x$$

Таким образом, критерием для выбора той или иной зависимости может служить возрастание или убывание напряжения σ_x. Можно было бы сказать, что при $d\sigma_x > 0$ надо пользоваться первой зависимостью, а при $d\sigma_x \leqslant 0$ второй. Однако рассмотрение отрицательных значений σ_x вносит коррекцию в этот критерий и легко понять, что для простого растяжения-сжатия общим критерием будет знак выражения $\sigma_x d\sigma_x = (1/2)\, d(\sigma_x^2)$. Итак, знак величины $\sigma_x d\sigma_x$ при простом растяжении-сжатии служит критерием того, подчиняется ли материал закону кривой или упругому закону, т. е. служит критерием нагружения.

Обобщая выражение $\sigma_x d\sigma_x$ на случай сложного нагружения, естественно, казалось бы, заменить его выражением $\sigma_{ij} d\sigma_{ij}$, где σ_{ij} — тензор напряжений. Но это не будет правильным, ибо $\sigma_{ij} d\sigma_{ij} = S_{ij} dS_{ij} + 3\sigma d\sigma$, а уже тогда было известно [3], что среднее давление σ при малых деформациях не влияет на пластичность. Остается без противоречия с опытом на одноосное нагружение взять в общем случае за критерий нагружения величину (или, точнее знак величины) $S_{ij} dS_{ij} = dI_2$, что мы и видим в законе Генки — Надаи.

Закон Генки — Надаи привлек внимание многочисленных исследователей своей простотой, причем на основании его в краевой задаче оказалось возможным построить довольно простой процесс последовательных приближений (метод Ильюшина [4]). В то же время возникла необходимость проверить закон Генки — Надаи экспериментально, чему и был посвящен ряд работ (см. серию статей в сборнике [5]). Оказалось, что в том случае, когда в опыте осуществляется пропорциональное возрастание напряжений в каждой точке тела, то закон Генки-Надаи в целом удовлетворительно совпадает с данными опыта. Однако в то же время наблюдаются малые систематические отклонения от закона (диаграмма Лоде), которые указывают на какой-то его недостаток.

В основе закона Генки — Надаи лежит условие пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций. Это положение может быть заменено более общим, состоящим в том, что девиатор деформаций является функцией девиатора напряжений

$$Э_{ij} = F_{ij}(S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{21})$$

Из соображений тензорной размерности тогда можно показать [6], что это эквивалентно предположению

$$Э_{ij} = F(I_2, I_3^2)\,[P(I_2, I_3^2)\, S_{ij} + Q(I_2, I_3^2)\, I_3 t_{ij}] \tag{3}$$

где

$$I_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \qquad I_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ke}, \qquad t_{ij} = S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} I_2 \delta_{ij} \tag{4}$$

Такое обобщение закона Генки — Надаи принадлежит Прагеру [7], который показал, что принятие этого последнего ликвидирует указанный выше недостаток закона Генки-Надаи.

Как закон Генки — Надаи, часто называемый законом малых упруго-пластических деформаций, так и закон Прагера характерны тем, что в них напряжения и деформации связаны конечными соотношениями. В дальнейшем такие законы пластичности стали называть законами деформаций.

Законы деформаций представляют простейший тип законов пластичности. В общем случае напряжения и деформации могут быть связаны некоторыми интегро-дифференциальными операциями. Наиболее простым классом таких общих соотношений являются тензорно-линейные соотношения, т. е. соотношения, в которых матрицы тензоров связаны некоторыми линейными операторами. Прагером было отмечено [8], что если оставаться в рамках тензорно-линейных соотношений, то всякий закон пластичности может быть представлен в общей форме:

$$L\,[(S_{ij})] = L'\,[(Э_{ij})] \tag{5}$$

где (S_{ij}), $(Э_{ij})$ — матрицы девиаторов, L и L' — линейные, скалярные операторы.

В то время как закон Генки-Надаи представляет частный случай соотношения (5), закон (3) не может быть представлен в форме (5) и дает пример простейшего тензорно-нелинейного соотношения.

Простота и довольно хорошее совпадение закона Генки-Надаи с опытами на пропорциональное нагружение дают ему предпочтение перед другими возможными на основании (5) законами пластичности. Кроме того, в 1947 г. Ильюшин [9] показал, что если в каждой точке тела происходит пропорциональный рост девиаторов напряжений или деформаций, то все возможные на основании (5) законы пластичности должны совпадать с законом Генки-Надаи и последний в классе тензорно-линейных законов пластичности при таком нагружении является общим. Указанный тип нагружения в точке будем везде в дальнейшем называть простым.

Для законности расчетов на основании соотношений Генки-Надаи нужно было еще найти условия, при которых в каждой точке тела осуществлялось бы простое нагружение. Эта задача частично была разрешена Ильюшиным [10] в предположении несжимаемости материала как в упругой, так и в пластической области и показательного закона кривой одноосного нагружения. Оказалось, что при данных ограничениях в каждой точке тела нагружение будет простым, если внешние силы растут пропорционально одному параметру (теорема о простом нагружении).

В задачах пластичности существенное место занимают такие проблемы, в которых нагружение сильно отличается от простого (задачи устойчивости, например) так, что применение закона Генки-Надаи или закона Прагера становится в них необоснованным. Хотя опыты того времени по сложному нагружению и давали достаточное для технических нужд совпадение теории деформаций с данными эксперимента, однако применимость этой теории при нагружении, сильно отличающемся от простого, была сомнительна ввиду того, что по теории деформаций резкое изменение напряженного состояния вызывает столь же резкое изменение деформаций. Это положение, законное для упругого тела, в пластическом случае при некоторых видах нагружения приводит к противоречию с основными положениями механики сплошных сред, что и было показано впервые Хандельманом, Лином и Прагером [11].

Все исследования механических свойств сплошной среды и, в частности, свойств пластичности всегда базируются на предположении, что малые изменения внешних воздействий должны приводить к малым последствиям. Так, если два одинаковых тела с одинаковыми свойствами нагружаются двумя разными, но мало отличающимися способами, то и деформации этих тел в каждый данный момент должны отличаться мало. Пусть в некоторой точке тела после непрерывного процесса нагружения достигнуто некоторое напряженное состояние и пусть при последующем нагружении в этой точке остается постоянным I_2, т. е. $dI_2 = 0$. Поскольку такой случай нагружения является предельным в законе Генки-Надаи, отличающим нагружение от разгрузки, то такое нагружение можно назвать нейтральным. Вообще при любом критерии нагружения нейтральным нагружением называется такое, при котором величина, выражающая критерий нагружения, остается постоянной. Для реального материала естественно потребовать, чтобы при таком нагружении законы пластичности и упругости совпадали. Оказывается, что ни один закон теории деформаций не удовлетворяет этому требованию, которое получило название условия непрерывности. Для простоты, следуя Прагеру [12], рассмотрим здесь только закон Генки-Надаи.

Считая, что нагружение нейтрально, запишем закон (1) в дифференциальной форме:

$$dS_{ij} = 2G_s d\vartheta_{ij} + 2\frac{dG_s}{dI_2} dI_2 \vartheta_{ij}.$$

Так как $dI_2 = 0$, то при нейтральном нагружении (1) будет

$$dS_{ij} = 2G_s d\vartheta_{ij} \tag{6}$$

С другой стороны, закон упругости дает

$$dS_{ij} = 2G d\vartheta_{ij} \tag{7}$$

и так как $G \neq G_s$, то (6) и (7) не совпадают.

Можно было бы попытаться избежать этого выбором другого критерия нагружения. Но оказывается, что критерий нагружения не произволен, а диктуется самим законом связи напряжений и деформаций. Очевидно, что работа напряжений на пластических составляющих деформаций (вся работа минус работа на упругих частях деформации) необратима, как и сама пластическая деформация, чего вообще нельзя сказать о всей работе. В пластической области поэтому должно выполняться условие

$$dW^p \geqslant 0 \tag{8}$$

причем знак равенства возможен только в тривиальном случае, когда сами приращения пластических деформаций равны нулю (мы не рассматриваем идеально пластические среды). Условие (8) обычно называют условием необратимости. Применяя это условие к закону (1), мы необходимо получим в качестве критерия нагружения условие $dI_2 > 0$. Действительно, из (1) найдем

$$d\vartheta_{ij}^p = d\vartheta_{ij} - d\vartheta_{ij}^y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G}\right) dS_{ij} - S_{ij}\frac{dG_s}{G_s^2}$$

$$dW^p = \sum S_{ij} d\vartheta_{ij}^p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G}\right)\sum S_{ij} dS_{ij} - \sum S_{ij}^2 \frac{dG_s}{G_s^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2G}\left[\frac{G}{G_s} - 1 - \frac{2GI_2}{G_s^2}\frac{dG_s}{dI_2}\right] dI_2$$

и условие (8) требует, чтобы

$$\left[\frac{G}{G_s} - 1 - \frac{2GI_2}{G_s^2}\frac{dG_s}{dI_2}\right] dI_2 \geqslant 0 \tag{9}$$

в пластической области. Если, как это на самом деле у большинства материалов, предположить, что при нагружении

$$\frac{dG_s}{dI_2} > 0 \tag{10}$$

то квадратная скобка в (9) положительна и условие необратимости приводит к тому, что при нагружении $dI_2 > 0$.

Таким образом, никакого другого критерия (по крайней мере для материалов, у которых свойство (10) выполняется) для закона Генки-Надаи предложить нельзя и последняя возможность удовлетворить условие непрерывности отпадает.

То же самое можно доказать и для общего случая теории деформаций. Условие непрерывности в любом таком законе не удовлетворено, поиски же закона пластичности, удовлетворяющего условию непрерывности, в основном и повлияли на развитие так называемой теории течения или теории приращения деформаций.

Началом создания таких теорий надо считать уже цитированную работу Хандельмана, Лина и Прагера. Заметим, что, как обнаружилось впоследствии, Ланингом еще в 1942 г. в неопубликованной рукописи была предложена теория течения в простейшей форме. Однако в то время как закон Ланинга являлся обобщением теории Рейса [13] и, следовательно, базировался в конечном итоге на гидродинамических аналогиях, теория, предложенная Хандельманом, Лином и Прагером, которая только по инерции стала называться теорией течения, была получена из других соображений и ее более правильно называть теорией приращения деформаций или дифференциальной теорией пластичности.

Идею вывода соотношений «напряжение-деформация», заключенную в последней работе, можно представить следующим образом. Считается, что: 1) приращение девиатора деформаций вполне определяется девиатором напряжений и его приращением, 2) эта связь линейна относительно приращений компонентов девиаторов напряжений и деформаций, 3) справедливо условие непрерывности и, наконец, 4) критерием нагружения является условие $dI_2 > 0$.

Из первых двух условий следует, что

$$dЭ_{ij} = A_{ijke} dS_{ke} \tag{11}$$

где A_{ijke} зависят только от девиатора напряжений. Полагая

$$dЭ_{ij} = dЭ_{ij}{}^{y} + dЭ_{ij}{}^{p}$$

где $dЭ_{ij}{}^{y} = dS_{ij} / 2G$ — обратимая упругая часть, а $dЭ_{ij}{}^{p}$ — необратимая пластическая, получим при $dI_2 > 0$

$$dЭ_{ij}{}^{p} = C_{ijke} dS_{ke}$$

где G_{ijke}, так же как и A_{ijke}, — тензор четвертой валентности, зависящий только от S_{ij}.

Из условия непревывности при нейтральном нагружении следует, что $C_{ijke} dS_{ke} = 0$ при $dI_2 = 0$. Так как $dI_2 = 0$ означает, что $S_{ke} dS_{ke} = 0$, то одновременное обращение двух линейных относительно dS_{ke} форм заставляет принять, что

$$C_{ijke} = G_{ij} S_{ke}$$

и, следовательно,

$$dЭ_{ij}{}^{p} = \begin{cases} G_{ij} dI_2 & (dI_2 > 0) \\ 0 & (dI_2 \leqslant 0) \end{cases} \tag{12}$$

Тензорный анализ позволяет заключить, что наиболее общей формой G_{ij} является следующая:

$$G_{ij} = P(I_2, I_3{}^2) S_{ij} + Q(I_2, I_3{}^2) I_3 t_{ij} \tag{13}$$

Если же предположить, что I_3 мало влияет на деформацию, то можно считать G_{ij} функцией тслько I_2 так, что

$$dЭ_{ij}{}^{p} = \begin{cases} P(I_2) S_{ij} dI_2 & (dI_2 > 0) \\ 0 & (dI_2 \leqslant 0) \end{cases} \tag{14}$$

Это и есть простейшая форма закона, предложенная Ланингом.

После работы Хандельмана, Лина и Прагера внимание исследователей было. с одной стороны, направлено на экспериментальную проверку закона (14) при сложном нагружении, причем большинство последующих экспериментальных работ подтвердило уверенность в том, что данный закон ближе к действительности, чем теория деформаций. С другой стороны, продолжаются теоретические исследования, задача которых в основном заключается в расширении дифференциального закона пластичности на произвольный критерий нагружения. Заметную роль в таких исследованиях стало играть векторное представление тензоров.

Любой тензор, имеющий n компонент, может быть, как и всякая система n чисел, бесконечным числом способов представлен в n-мерном векторном пространстве. Если среди n компонент тензора независимыми являются $r < n$ компонент, то соответствующий вектор лежит в подпространстве, имеющем r измерений. Таким образом, может быть представлено и напряженное и деформированное состояние материала в некоторой точке тела. Пользуясь большим произволом векторного представления тензоров, можно так определить соответствие между системами тензоров и векторов, чтобы не только тензоры представлялись векторами, но и получалось бы векторное представление наиболее важных тензорных операций. В интересующем нас случае напряженно-деформированного состояния удобно, например, поступить следующим образом.

Девиатору напряжений S_{ij} поставим в соответствие вектор напряжений **P** с компонентами p_i, а девиатору деформаций $Э_{ij}$ — вектор деформаций Э с компонентами $э_i$ по закону

$$\begin{matrix} p_1 = S_{11}, & p_2 = S_{22}, & p_3 = S_{33}, & p_4 = S_{13}, \ldots, & p_9 = S_{32} \\ э_1 = Э_{11}, & э_2 = Э_{22}, & э_3 = Э_{33}, & э_4 = Э_{13}, \ldots, & э_9 = Э_{32} \end{matrix} \tag{15}$$

Заметим, что поскольку девиаторы напряжений и деформаций имеют в самом общем случае лишь пять независимых компонент, то в действительности указанные векторы **P** и Э всегда находятся в пятимерном подпространстве девятимерного пространства. Для некоторых теоретических исследований существенно рассмотрение именно этого пятимерного векторного пространства как основного, но при этом формулы связи компонент вектора с компонентами тензора не так просты, как это имеет место в (15).

В дальнейшем изложении мы будем заниматься изучением связи девиатора напряжений и пластической части девиатора деформаций

$$Э_{ij}^{p} = Э_{ij} - Э_{ij}^{y} = Э_{ij} - \frac{S_{ij}}{2G}$$

и девиатору $Э_{ij}^{p}$ будем ставить в соответствие вектор пластических деформаций $Э^p$, который на основании (15) легко определяется так:

$$Э^p = Э - \frac{\mathbf{P}}{2G}$$

Если определена зависимость $Э^p$ от **P** для произвольного пути нагружения, то, следовательно, решена и задача о связи Э и **P**.

В процессе деформирования конец каждого вектора описывает некоторый путь. Пути, описываемые концами векторов **P**, Э и $Э^p$, будем называть путем нагружения, деформации и пластической деформации соответственно.

Особое место среди всех путей нагружения занимают такие, при которых девиатор напряжений растет пропорционально одному параметру. Выше мы назвали такой процесс нагружения простым. При таком нагружении траектория вектора напряжений (путь нагружения) является лучом из начала координат, а соответствующий путь пластической деформации, а следовательно, и полной деформации будет тоже радиальным, по направлению, совпадающим с путем нагружения и в независимости от направления нагружения

$$Э = \frac{\mathbf{P}}{2G_s} \tag{16}$$

Действительно, при простом нагружении из естественного состояния с достаточной степенью точности справедлив закон Генки-Надаи и легко видеть, что на основании (15) векторное представление этого закона совпадает с (16). Таким образом, векторное пространство изотропно относительно любого простого нагружения. Иначе, свойства связи между вектором напряжений и вектором деформаций для простого нагружения инвариантны относительно группы вращений в векторном пространстве.

Пусть теперь проводятся некоторые пути сложного нагружения. Всего вероятнее, что для таких путей имеет силу подобная же инвариантность, которую теперь естественно дополнить инвариантностью относительно отражений траекторий во всевозможных плоскостях и направлениях. Впервые это предположение о свойствах инвариантности векторного пространства было сформулировано Ильюшиным [14] и названо им постулатом изотропии. Нужно заметить, что самим Ильюшиным постулат изотропии был сформулирован применительно к упомянутому выше пятимерному векторному пространству, где каждая координата является независимой. Но поскольку принятое здесь пространство (15) можно понимать как вмещающее для такого пятимерного, то постулат изотропии имеет здесь тот же самый смысл: если некоторый путь нагружения получается из данного (которому соответствует данный путь деформации) какой-то операцией вращений и отражений (ортогональное преобразование), то той же самой операцией получается соответствующий путь деформаций из данного пути деформаций. Или другими словами: внутренняя геометрия пути деформаций вполне определяется внутренней геометрией пути нагружения и наоборот.

Постулат изотропии позволяет значительно конкретизировать общее тензорно-линейное соотношение (5). Вместо бесконечного числа скалярных функций в соотношениях (5) при использовании постулата изотропии неизвестными могут быть только пять скалярных функций инвариантов внутренней геометрии пути нагружения или пути деформации (пятичленная формула Ильюшина). Отметим, что если постулат изотропии справедлив для связи вектора напряжений с вектором деформаций, то он справедлив и для связи вектора напряжений с вектором пластической части деформации.

Возвратимся теперь к интересующему нас вопросу о взаимосвязи между критерием нагружения и зависимостью напряжение-деформация.

Из большого числа экспериментов известно, что с достаточно большой степенью точности в первоначально изотропном материале пластические деформации начинают возникать, когда величина второго инварианта девиатора напряжений I_2 превысит некоторое критическое значение

$$I_2 = \frac{1}{2} k^2 \tag{17}$$

В векторном пространстве это условие представляется сферой радиуса k. Действительно, по определению

$$I_2 = \frac{1}{2} \Sigma S_{ij}{}^2 \tag{18}$$

и так как по (15) $\Sigma S_{ij}^2 = \Sigma p_i{}^2$, то

$$I_2 = \frac{1}{2} \Sigma p_i{}^2 = \frac{1}{2} |\,\mathbf{P}\,|^2 \tag{19}$$

Следовательно, условие (17) можно записать в виде

$$|\,\mathbf{P}\,| = k \tag{20}$$

Пусть в процессе последующего изменения напряжений длина вектора напряжений несколько превысит значение k. Если теперь тело разгрузить (предполагается однородное напряженное состояние), то в таком пластически деформированном теле условие возникновения новых пластических деформаций уже не совпадает с (17). Это будет некоторая новая замкнутая поверхность в векторном пространстве, которую принято называть поверхностью нагружения (или поверхностью течения [1]). В каждый момент нагружения существует такая характеристическая поверхность, ограничивающая все упругие состояния, т. е. такие состояния, которые могут быть достигнуты из данного без изменения пластической части деформации. Форма и размеры этой поверхности изменяются с изменением напряжений, если при этом происходит изменение пластической части деформации, и аналитически может быть представлена в виде

$$f(S_{11}, S_{22}, \ldots, Э_{11}^p, \ldots, Э_{13}^p) = \text{const} \tag{21}$$

Функцию f обычно называют функцией нагружения.

Из опыта известно, что материал из любого состояния можно деформировать упруго (упругая разгрузка). Отсюда следует, что в процессе непрерывного деформирования ($Э^p$ изменяется непрерывно) поверхность нагружения меняется так, что все время проходит через конец вектора напряжений. Точку на поверхности нагружения, которой в процессе пластического деформирования касается конец вектора напряжений, будем в дальнейшем называть точкой нагружения.

Для изменения $Э^p$ в каждый момент нужно выйти наружу поверхности нагружения, построенной для предыдущего момента. Таким образом, поверхность нагружения тесно связана с критерием нагружения. Если представить поверхность нагружения в виде (21), то критерием нагружения в соответствии со сказанным будет условие

$$\frac{df}{dS_{ij}} dS_{ij} \geqslant 0 \tag{22}$$

[1] Сфера Мизеса $|\mathbf{P}| = k$ является начальной поверхностью нагружения.

причем знак равенства соответствует нейтральному нагружению. Если $(\partial f / \partial S_{ij}) \times \times dS_{ij} < 0$, то имеем разгрузку. В законах Генки-Надаи и Хандельмана-Лина-Прагера за критерий нагружения принималось условие $dI_2 > 0$. Соответствующая ему поверхность нагружения есть сфера радиуса $p = |P|$. Следовательно, введение критерия $dI_2 > 0$ предполагает, что в процессе пластической деформации упругая область испытывает простое изотропное расширение, что соответствует равномерному упрочнению материала. Однако это неверно или верно лишь приближенно. Вообще процесс упрочнения — направленный процесс, и само упрочнение должно быть анизотропным. (Поскольку мы ограничиваемся здесь рассмотрением лишь малых деформаций, то анизотропию, возникающую в процессе пластического деформирования, нужно приписать действию напряженного состояния. Такой вид анизотропии называют анизотропией, вызванной напряжениями [12].)

Задача экспериментального изучения закона изменения поверхности нагружения очень сложна. Однако сама концепция поверхности нагружения, или, что то же, функции нагружения, открывает большие возможности теоретического характера. Оказалось, что поверхность нагружения не только служит для определения того, нагружается или разгружается материал в данной точке тела, но и связано (ассоциировано) с самим законом пластичности так, что знание функции нагружения позволяет довольно сильно конкретизировать закон связи напряжений и деформаций. Кроме того, оказалось возможным, используя некоторые довольно общие предположения о поведении материала, получить данные о самой поверхности нагружения.

Возвращаясь несколько назад, обратим внимание на то, что при выводе закона (14), кроме предположений непосредственно о связи «напряжение-деформация», был заранее сформулирован критерий нагружения, т. е. был заранее определен закон изменения поверхности нагружения. Интересно выяснить, как повлияет на окончательный результат введение другого критерия нагружения, выяснить, как связан закон пластичности с критерием нагружения.

Результаты такого рода исследований, приведенные в статье Прагера [15], можно воспроизвести следующим образом. Будем, как и при выводе закона (14), считать, что: 1) приращения компонент девиатора деформаций вполне определяются девиатором напряжений и его приращением, 2) эта связь линейна относительно приращений, 3) справедливо условие непрерывности.

Отказываясь формулировать заранее критерий нагружения, мы для получения как можно более конкретной связи напряжений и деформаций потребуем выполнения следующих дополнительных условий: 4) при данных на поверхности тела силах малое приращение пластической деформации внутри тела определяется однозначно через заданные малые приращения поверхностных и массовых сил (условие единственности в малом), 5) поверхность нагружения в точке нагружения имеет единственную нормаль (условие регулярности поверхности нагружения) и 6) поверхность нагружения в процессе пластического деформирования меняется непрерывно (условие непрерывности изменения поверхности нагружения).

Пусть дано некоторое напряженное состояние, характеризуемое вектором напряжения $\mathbf{P}$. Мы будем рассматривать только тот случай, когда конец вектора напряжений касается поверхности нагружения. Иначе мы бы находились в упругой области, законы для которой установлены. Если конец вектора напряжений касается поверхности нагружения, то бесконечно малое изменение напряженного состояния $d\mathbf{P}$ вызовет либо нагружение, либо разгрузку, либо нейтральное нагружение в зависимости от того, направлен ли $d\mathbf{P}$ вне, внутрь или касательно к поверхности нагружения. Каждому вектору $d\mathbf{P}$, направленному вне поверхности нагружения, однозначно соответствует вектор $dЭ^p$. Условие непрерывности требует, чтобы при $dЭ^p \to 0$ вектор $d\mathbf{P}$ стремился к касательному направлению к поверхности нагружения. Вектор $d\mathbf{P}$, направленный вне поверхности нагружения, может быть представлен в виде суммы $d\mathbf{P} = d\mathbf{P}_t + d\mathbf{P}_n$, где $d\mathbf{P}_t$ и $d\mathbf{P}_n$ — векторы по касательной и по нормали к поверхности нагружения в точке нагружения $\mathbf{P}$. Но по условию непрерывности составляющая $d\mathbf{P}_t$ и не дает изменения $Э^p$, а поэтому изменение пластической деформации идет только за счет $d\mathbf{P}_n$ и направление $dЭ^p$ не зависит от направления $d\mathbf{P}$. Значит, каждой точке $\mathbf{P}$ поверхности нагружения может быть поставлен в соответствие единичный вектор **n** так, что приращение пластической деформации производится бесконечно малым приращением вектора напряжений $d\mathbf{P}$ в направлении **n**. Будем теперь искать связь единичного вектора **n** и поверхности нагружения.

Рассмотрим тело из упрочняющегося материала с данными поверхностными **T** и и массовыми F силами. Теорема виртуальной работы дает

$$\int_s \mathbf{T}\cdot\mathbf{u}\,ds + \int_v \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\cdot dv = \int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv \tag{23}$$

Здесь **T**, **F**, σ_{ij} соответствуют равновесию, **u**, ε_{ij} возможные. Предположим, что под действием данных приращений внешних сил внутри тела возможны два состояния $d\sigma_{ij}{}^{(1)}, d\varepsilon_{ij}{}^{(1)}$, $d\sigma_{ij}{}^{(2)}$, $d\varepsilon_{ij}{}^{(2)}$. Разности

$$\Delta d\,\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}{}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)}, \qquad \Delta d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}{}^{(1)} - d\varepsilon_{ij}^{(2)}$$

могут быть подставлены в (23), хотя $\Delta d\sigma_{ij}$ может и не соответствовать $\Delta d\varepsilon_{ij}$. При этом левая часть в (23) обращается в нуль и мы получим

$$\int_v \Delta d\sigma_{ij}\Delta d\varepsilon_{ij}dv = 0 \tag{24}$$

Таким образом, для выполнения условия единственности достаточно потребовать, чтобы подынтегральное выражение было неотрицательно. Действительно, тогда из (24) будет следовать, что решения совпадают. Если в подынтегральном выражении выделить упругую часть, которая всегда положительна, то достаточно потребовать, чтобы $\Delta d\sigma_{ij}\Delta d\varepsilon_{ij}{}^p \geqslant 0$. Так как $\varepsilon_{ij}{}^p$ — девиатор, то это значит, что $\Delta dS_{ij}\Delta dЭ_{ij}{}^p \geqslant 0$ или в векторной форме

$$\Delta d\mathbf{P}\cdot\Delta dЭ^p \geqslant 0 \tag{25}$$

Рассмотрим три возможных случая: a) оба решения соответствуют нагружению, b) одно — разгрузка, другое — нагрузка, c) оба решения дают разгрузку.

В последнем случае $\Delta dЭ^p = 0$, и, следовательно, подынтегральное выражение в (24) положительно. Пользуясь тем, что в остальных двух случаях порядок, в котором берутся решения, не влияет на знак $\Delta d\mathbf{P}\,\Delta dЭ^p$, мы можем их выбрать в такой последовательности, чтобы $\Delta d\mathbf{P}$ был направлен в сторону внешней нормали. В случае «a» ввиду предполагаемой линейности связи приращений напряжений и деформаций $\Delta dЭ^p$ есть решение, отвечающее $\Delta d\mathbf{P}$ и, следовательно, направлено по **n**. Таким образом, в этом случае неравенство (25) выражает условие того, что скалярное произведение вектора **n** на любой вектор, направленный в сторону внешней нормали к поверхности нагружения, было неотрицательно. Следовательно, вектор **n** может быть только единичным вектором внешней нормали к поверхности нагружения в точке **P**. Принимая такое определение для **n**, легко видеть, что выражение для $\Delta d\mathbf{P}\ \Delta dЭ^p$ и в случае «b» становится неотрицательным.

Таким образом, мы пришли к выводу, что вектор приращения на деформации направлен по внешней нормали к поверхности нагружения в точке **P**.

Остается теперь определить величину скалярного коэффициента пропорциональности в законе $dЭ^p = dk\mathbf{n}$, который в тензорной записи представится так:

$$dЭ_{ij}{}^p = dk\,(\partial f/\partial S_{ij}) \tag{26}$$

Для определения dk используем условие непрерывности изменения поверхности нагружения, в силу которого, если при данном состоянии

$$f\,(S_{11}, \ldots, Э_{11}{}^p, \ldots) = \text{const},$$

то для близкого состояния

$$f\,(S_{11} + dS_{11}, \ldots, Э_{11}{}^p + dЭ_{11}{}^p, \ldots) = \text{const}$$

и, следовательно,

$$f\,(S_{11} + dS, \ldots Э_{11}{}^p + dЭ_{11}{}^p, \ldots) - f\,(S_{11}, \ldots, Э_{11}{}^p) = 0$$

Поэтому

$$(\partial f/\partial S_{ij})\,dS_{ij} + (\partial f/\partial Э_{ij}{}^p)\,dЭ_{ij}{}^p = 0 \tag{27}$$

Внося сюда (26), получим для dk формулу

$$dk = -\left(\frac{\partial f}{\partial S_{ij}} dS_{ij}\right) \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial S_{ij}} \frac{\partial f}{\partial Э_{ij}^{p}}\right) \tag{28}$$

и, таким образом,

$$dЭ_{ij}^{p} = F \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial S_{ij}} dS_{ij}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} dS_{ij} \geqslant 0 \tag{29}$$

где

$$F^{-1} = -\frac{\partial f}{\partial Э_{ij}} \frac{\partial f}{\partial Э_{ij}^{p}} \tag{30}$$

При выводе закона мы предполагали явную зависимость от пластической деформации. В том случае, когда f явно не зависит от пластических деформаций, определить коэффициент через f невозможно. Пользуясь неопределенностью dk в этом случае, мы можем представить результат снова в форме (29). При этом, конечно, формула (30) не имеет места и F должна быть определена независимо от f.

Приобрела важность задача исследования различных аналитических выражений для функции нагружения. Такое исследование было, например, проведено Эдельманом и Друккером [16].

Любая функция нагружения должна удовлетворять закону простого нагружения. Это значит, что соотношение (29) для данной функции должно удовлетворительно согласоваться с опытом на простое нагружение. Конечно, при учете третьего инварианта девиатора напряжений всегда будут более полные результаты, чем без его учета. Наиболее простым примером функции нагружения является $f = I_2$ или $f = f(I_2)$. Если дополнительно к этому предположить, что $F = F(I_2)$, то из (29) будет следовать закон Ланинга.

Функция $f = f(I_2, I_3^2)$ лучше совпадает с данными по простому нагружению, но, так же как и предыдущая, не учитывает анизотропии от напряжений. Учесть последний эффект, так же как и эффект Баушингера, можно, вводя в функцию нагружения пластические деформации, например

$$f = \Phi(I_2) - mS_{ij}Э_{ij}^{p},$$

или, если еще учесть влияние третьего инварианта, то

$$f = \Phi(I_2, I_3^2) - mS_{ij}Э_{ij}^{p}$$

При этом оказывается, что на Φ должны быть наложены некоторые ограничения.

Таким образом, видно, что учет эффекта Баушингера и анизотропии, возникающей в процессе нагружения, приводит к очень сложным законам пластичности, которые почти не пригодны для практического использования. Поэтому среди всех законов течения наиболее часто применяемым является закон Ланинга, хотя он и наиболее приближен.

Мы здесь подробно рассмотрели логический ход, который приводит к закону (29), иногда называемому законом Ходжа-Прагера. Изменение исходных предположений приведет к изменению (29) и таким путем можно получить некоторые другие формулировки закона пластичности. Так, например, считая, что деформация более сильно зависит от истории нагружения, Ганнингам, Томсон и Дорн [17] приходят к закону

$$\frac{S_{ij}}{\sqrt{I_2}} = \frac{dЭ_{ij}^{p}/dt}{\sqrt{K_2}}, \qquad I_2 = F\left(\int \sqrt{K_2}\,dt\right) \tag{31}$$

где K_2 — второй инвариант девиатора скоростей деформаций. Однако Прагер [12] показал, что по существу это совпадает с (14). Если F — монотонная функция, то можно записать

$$\int \sqrt{K_2}\,dt = \Phi(I_2)$$

После дифференцирования получим $\sqrt{K_2} = \varphi(I_2)(dI_2/dt)$, так что, внося это в закон (31), получим снова формулу Ланинга, где только надо положить

$$P(I_2) = \varphi(I_2)/\sqrt{I_2}$$

Наиболее серьезную роль в изменении системы предположений сыграло введение постулата упрочнения, которое в законченном виде было дано Друккером в работе [18].

Свойства одноосного упрочнения можно трактовать следующим образом.

В упрочняющемся материале приращения деформаций и потребные для них приращения напряжений таковы, что их произведение положительно. Если в дополнение к процессу приложения дополнительных напряжений приращений рассмотреть процесс снятия их, тогда можно сказать, что в указанном цикле работа приращений напряжений на приращениях деформаций положительна. Постулат упрочнения и является обобщением этого свойства кривой одноосного испытания на многоосный случай. Оказывается, принятие такого обобщения накладывает на закон пластичности довольно жесткие требования. Как было недавно показано Друккером, невыполнение фундаментального постулата упрочнения может привести к неопределенности решения [19] и, таким образом, выполнение его для реального материала, вероятно, необходимо.

Пусть вектор $\mathbf{P}^*$ представляет напряженное состояние в данной точке упруго-пластического тела и конец этого вектора лежит либо внутри, либо на поверхности нагружения. Пусть затем добавочные внешние силы создают в данной точке тела дополнительные напряжения, которые перемещают конец вектора напряжений изнутри поверхности нагружения на самую поверхность в некоторую точку $\mathbf{P}$. При этом имеют место только упругие деформации, а так как упругие деформации обратимы, то деформированное состояние в точке $\mathbf{P}$ не зависит от пути вектора напряжений из точки $\mathbf{P}^*$ в точку $\mathbf{P}$. Пусть, кроме того, внешние добавочные силы выводят вектор напряжения вне поверхности нагружения до значения $\mathbf{P}+d\,\mathbf{P}$ так, что создаются малые приращения пластических деформаций. Затем внешние добавочные силы убираются так же медленно, как и прилагались, и вектор $\mathbf{P}$ напряжений по некоторому пути возвращается в первоначальное состояние $\mathbf{P}^*$ (мы рассматриваем однородное напряженное состояние). Так как упругая работа обратима, то вся работа за полный цикл приложения и снятия добавочных внешних сил будет

$$dW=(\mathbf{P}-\mathbf{P}^*)\cdot d\,Э^p+d\,\mathbf{P}\cdot d\,Э^p$$

В соответствии с постулатом упрочнения эта работа положительна. Так как за $\mathbf{P}^*$ может быть, в частности, взято $\mathbf{P}$, то постулат упрочнения дает

$$d\,\mathbf{P}\cdot d\,Э^p>0 \tag{32}$$

Если $\mathbf{P}-\mathbf{P}^*\neq 0$, то эта разность может быть сделана как угодно больше, чем $d\,\mathbf{P}$, а поэтому

$$(\mathbf{P}-\mathbf{P}^*)\cdot d\,Э^p\geqslant 0 \tag{33}$$

Таким образом, на основании постулата упрочнения векторы $\mathbf{P}-\mathbf{P}^*$ и $d\,Э^p$ должны составлять нетупой угол и, следовательно, все возможные векторы $\mathbf{P}-\mathbf{P}^*$ должны лежать по одну сторону плоскости, перпендикулярной вектору $d\,Э^p$, и это должно быть верно для всех $\mathbf{P}$ на поверхности нагружения. Отсюда поверхность нагружения всюду невогнутая. Если считать справедливым, что поверхность нагружения в точке нагружения имеет единствённую нормаль, то нетрудно видеть, что из (32) следует, что $d\,Э^p$ направлен по нормали к поверхности нагружения в точке $\mathbf{P}$. Надо заметить, что $d\,Э^p$ не может быть направлено внутрь поверхности нагружения, ибо $d\mathbf{P}\cdot d\,Э^p>0$, а $d\,\mathbf{P}$ направлено наружу.

Таким образом, из одного лишь принятия постулата упрочнения и из условия регулярности точки напряжения следует, что

$$dЭ_{ij}=dk\,(\partial f\,/\,\partial S_{ij})$$

Критерием нагружения остается по-прежнему условие

$$\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}\,dS_{ij}>0 \tag{34}$$

За счет неопределенности dk можно записать, что

$$d\mathcal{E}_{ij}^{p} = F\,\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}\left(\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}\,dS_{ij}\right) \tag{35}$$

где F может зависеть от напряжений, деформаций и истории деформаций. В частности, эта функция может зависеть и от dS_{ij}, но тогда она относительно dS_{ij} должна быть однородной нулевой степени, так как временные эффекты в пластичности исключаются. Например,

$$F = g\left[1 + \frac{(dS_{ij}\,dS_{jk}\,dS_{ke})^2}{(dS_{mn}\,dS_{mn})^3}\right]$$

где g уже не зависит от dS_{ij}. Функция F вовсе не должна зависеть от dS_{ij}, если потребовать дифференциальную линейность связи напряжений и деформаций.

Мы рассмотрели возможные формы дифференциальных законов связи напряжений и деформаций или законов течения, которые выражают приращение или дифференциал деформаций через некоторый оператор от напряжений. В некоторых приложениях, таких, как проблема устойчивости за пределом упругости, приходится разрешать соотношения относительно приращений напряжений. Подобные обращения законов течения связаны иногда со значительными трудностями, поэтому имеет оправдание идея непосредственного создания законов течения в форме зависимости приращений напряжений от деформации, приращения деформации и т. д.

Такое направление теории течения в напряжениях развивалось Трифаном [20] и основывалось на следующих предположениях: 1) приращение напряжений вполне определяется деформацией и приращением деформации, 2) связь предполагается дифференциально-линейной, 3) справедливо условие непрерывности и 4) за критерий нагружения принимается условие $dq > 0$, где q — функция инвариантов E_2 и E_3 девиатора деформаций. Для простоты мы ограничимся рассмотрением только того частного случая, когда q есть функция одного E_2 и, следовательно, когда можно положить $dq = \mathcal{E}_{ij}\,d\mathcal{E}_{ij}$. (Учет третьего инварианта девиатора деформаций приводит к тензорно-нелинейной теории и не будет здесь рассмотрен.)

Если $dq = \mathcal{E}_{ij}\,d\mathcal{E}_{ij}$, то легко видеть, что система только что данных четырех предположений является просто обратной к системе, использованной Хандельманом, Лином и Прагером. Поэтому вывод выражения для dS_{ij} будет почти дословным повторением вывода этих трех авторов. В результате легко получить

$$dS_{ij} = 2G\,d\,\mathcal{E}_{ij} - k_{ij}\,dq \tag{36}$$

где

$$k_{ij} = P(E_2)\,\mathcal{E}_{ij} \tag{37}$$

Теории течения, аналогичные только что приведенной, получили относительно малое распространение и даже, насколько нам известно, не было сделано попытки обобщить их на произвольный критерий нагружения.

Всюду в изложенном выше предполагалась регулярность поверхности функции нагружения в точке нагружения. Однако уже применение критерия максимальных касательных напряжений дает пример поверхности нагружения, имеющей особые точки. Правда, в этом случае особые точки стационарны и могут не совпадать с точкой нагружения. Можно ожидать, однако, что именно точка нагружения все время оказывается особой. Возможно, что впервые такое предположение возникло при объяснении явления крутильной потери устойчивости, однако несомненно, что главную роль в становлении концепции особой точки нагружения сыграли исследования свойств пластичности, основанные на рассмотрении микроструктурных механизмов пластического сдвига.

Существенным в таких исследованиях является учет кристаллической структуры материала. Реальное тело представляется как агрегат большого числа произвольно ориентированных монокристаллов. Следовательно, свойства пластичности тела можно считать средними статистическими от свойств пластичности отдельных кристаллов, а также от свойств их взаимодействия. Последние две группы свойств будем называть свойствами микропластичности. Современные теории пластичности, основанные на таком подходе, часто называют физическими теориями, хотя такое название едва ли оправдано. Собственно физической должна была бы называться теория, которая, исходя из свойств микропластичности, осреднением давала бы все макрохарактеристики материала. Современные же теории этого направления для описания процесса сложного нагружения идут, так сказать, полуобратным путем. Вместо полного задания свойств микропластичности эти свойства задаются с некоторой степенью неопределенности, и последняя ликвидируется лишь в усредненной форме с помощью привлечения данных макроопыта. Это заставляет принять определение «физические» для рассматриваемых ниже теорий лишь условно, не говоря уже о том, что свойства микропластичности в рассматриваемых ниже теориях являются весьма примитивными.

Из экспериментов известно [21], что в монокристалле пластическая деформация в основном определяется сдвигами вдоль вполне определенных плоскостей — плоскостей скольжения — и направлений в них — направлений скольжения. Плоскость скольжения вместе с одним направлением скольжения на ней образуют так называемую систему скольжения. Количество и ориентация систем скольжения определяется формой кристаллической решетки вещества.

Подчеркнем, что для определения ориентации системы скольжения как системы из плоскости и направления на ней требуется задание трех независимых параметров.

Поскольку оказывается, что нормальное к плоскости скольжения давление почти не влияет на пластическую деформацию кристалла, его пластические свойства определяются связью компонент касательного напряжения в системах скольжения с пластическими сдвигами в этих системах.

Различные теории отличаются тем, как они постулируют свойства пластичности в системах скольжения (в дальнейшем мы будем совокупность таких свойств обозначать буквой А) и как они определяют свойства на границах кристаллов (свойства Б). Материал считается квазиизотропным, и как следствие этого любая ориентация систем скольжения считается равновероятной в объеме, содержащем достаточно большое число монокристаллов (например, экспериментальный трубчатый образец).

Первой теорией указанного направления, предложенной для описания свойств пластичности при сложном нагружении, была так называемая теория скольжения Батдорфа и Будянского [22]. Смысл основных положений этой теории можно представить следующим образом.

А. Считается, что каждый монокристалл обладает лишь одной системой скольжения. Пластической сдвиг γ^p в этой системе скольжения зависит от наибольшей компоненты τ касательного напряжения в ней за всю историю нагружения и происходит только тогда, когда τ превысит некоторое предельное значение τ_L.

Б. Напряженное состояние в каждом кристалле одинаково и совпадает с напряженным состоянием агрегата в целом.

Пусть параметрами, определяющими ориентацию некоторой системы скольжения, по отношению к неподвижным осям будут α, β, γ. Компонента τ касательного напряжения, действующая в этой системе, может быть выражена через напряжения в неподвижных осях x, y, z при помощи α, β, γ. Пластический сдвиг в данной системе скольжения по определению будет

$$\gamma^p = F(\tau), \qquad \tau > \tau_L$$

причем F — пока неизвестная функция. Через γ^p и α, β, γ можно найти пластические деформации $Э^p_{ij}$, которые возникают в осях x, y, z от пластического действия в системах с данной ориентацией:

$$Э^p_{ij} = F(\tau)\,\varphi_{ij}(\alpha, \beta, \gamma)$$

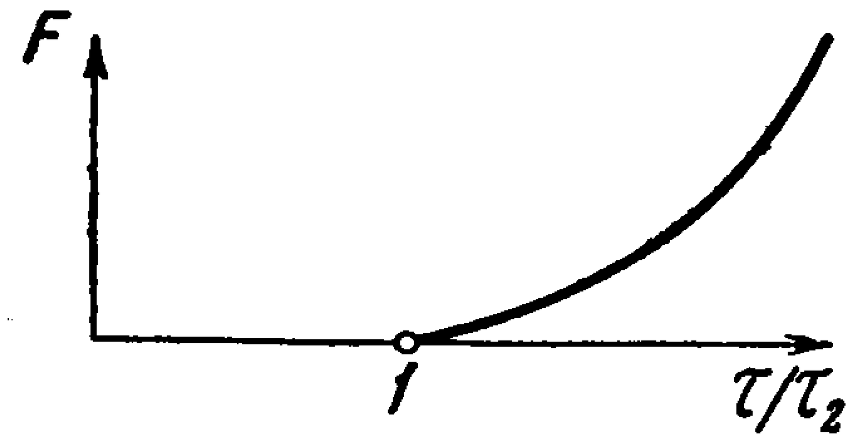
где φ_{ij} — определенная функция своих переменных. Так как любая ориентация систем скольжения равновероятна, то путем осреднения для макродеформации $Э^p_{ij}$ получим

$$Э^p_{ij} = \iiint F(\tau)\,\varphi_{ij}(\alpha, \beta, \gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \tag{38}$$

Собственно здесь проведено суммирование по всем возможным ориентациям, но в силу неопределенности функции F это можно считать усреднением[1].

Функция F, или характеристическая функция, может быть, например, определена из опыта на одноосное растяжение путем разложения в ряд и последующего численного интегрирования. Специфический вид зависимости F от τ / τ_L и, следовательно, зависимости пластического сдвига от касательного напряжения в единственной системе скольжения монокристалла показан на фиг. 1.

Таким образом, для того чтобы из предположений А и Б следовала макросвязь «напряжение-деформация», не противоречащая опыту на одноосное нагружение, необходимо допустить, что монокристалл обладает упрочнением в единственной системе скольжения.



Фиг. 1

Выясним основные качественные результаты, которые следуют из теории скольжения. Пусть в данной точке тела происходит простое нагружение за предел упругости. Если материал был первоначально изотропным, то поверхность нагружения должна быть симметричной относительно направления нагружения. Следовательно, если в точке нагружения не имеется особенности, то любое, следующее за простым ортогональное нагружение (под прямым углом к предыдущему простому) в начальный момент будет являться нейтральным. В этот начальный момент ортогональное нагружение характеризуется тем, что $|\mathbf{P}| = p =$ const, т. е. интенсивность напряжений постоянна. В силу условий непрерывности мы, таким образом, можем сказать, что если в начальный момент ортогонального нагружения получено приращение пластической деформации, то в точке нагружения должна быть коническая особенность.

Теория скольжения как раз и предсказывает приращение пластической деформации при ортогональном нагружении. Действительно, при простом нагружении в разных кристаллах происходит неодинаковое упрочнение. Более того, некоторые кристаллы могут вовсе не упрочняться. Если затем произошло ортогональное нагружение, то ввиду перераспределения напряжений начнется пластическое действие в некоторых еще не упрочнившихся или недостаточно упрочнившихся кристаллах. Это даст приращение общей пластической деформации.

Частным случаем ортогонального нагружения является чистый сдвиг, следующий за простым растяжением-сжатием. В экспериментах на трубчатых образцах это осуществляется кручением при постоянном осевом напряжении. Как мы видели, при этом даже в начальный момент должно получаться приращение пластических деформаций. Интересно выяснить, как направлен при этом вектор приращения пластических деформаций. Частичный ответ на этот вопрос дает величина так называемого мгновенного модуля сдвига

$$\left.\frac{d\tau}{d\gamma}\right|_{d\sigma = 0} = G_i$$

где σ и τ — напряжения растяжения-сжатия и сдвига соответственно, γ — полная деформация сдвига. Если $G = G_i$, т. е. упругий модуль сдвига равен мгновенному пластическому, то вектор приращения пластической деформации при ортогональном нагружении либо вообще является нулевым вектором (особенности в точке нагружения нет), либо имеет направление первоначального простого нагружения. Если же G_i отличен от G, то коническая особенность обязательно имеет место (если справедливо условие непрерывности) и вектор приращения пластических деформаций составляет конечный угол с направлением первоначального простого нагружения.

Прямые подсчеты на основании теории скольжения, произведенные Цикала [23], дают для G_i следующее значение:

$$G_i = \frac{G}{1 + \frac{3G}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)}$$

[1] Нам кажется, что произведенная здесь схема вывода, которая отличается от данной в работе [22], лучше подчеркивает «физичность» (в указанном выше ограниченном смысле) теории скольжения.

Авторами теории совместно с другими исследователями была проведена экспериментальная проверка теории скольжения [24] и выяснены некоторые ее преимущества по сравнению с теорией течения и теорией деформаций. Однако в первых опытах по экспериментальному определению мгновенного модуля сдвига G_i не удалось обнаружить существенного отклонения от упругого значения. Такое отклонение (однако меньшее, чем это следует по теории скольжения) удалось обнаружить только несколько позже, и вполне вероятно, что неудача первоначальных опытов по определению G_i заключалась в том, что закручивание образцов производилось при очень малой (порядка упругой) осевой пластической деформации [1].

Во всяком случае можно сказать, что предсказания теории скольжения в отношении величины мгновенного модуля сдвига оставляли желать лучшего. Причину же неудовлетворительности теории легко увидеть в основных предположениях. Во-первых (пункт А), предположение о единственности системы скольжения монокристалла является очень сильным упрощением действительного положения вещей. Во-вторых и в главных, предположение пункта Б при учете беспорядочной ориентации кристаллов по существу означает допущение разрывов на границах кристаллов и в основном ответственно за недостатки теорий.

Хотя недостатки основных положений в окончательном законе связи напряжений и деформаций в какой-то мере исправляются определением характеристической функции из макроопыта, однако теорию скольжения надо считать чрезвычайно упрощенной.

В 1954 г. Лин предложил новый вариант теории [25], который имел целью исправить некоторые недостатки теории скольжения.

Основные положения теории Лина сводятся к следующему.

А. В монокристалле существует несколько систем скольжения. Действительными из них (т. е. такими, по которым в данный момент происходит пластический сдвиг) являются те, которые отвечают минимальной работе при данной деформации кристалла. Составляющие касательного напряжения в действительных системах скольжения равны друг другу, и их величина зависит от суммы скольжений в данном кристалле.

Б. Деформация всех кристаллов одинакова и совпадает с деформацией всего агрегата в целом.

Напряженное состояние агрегата найдется как среднее из напряженных состояний кристаллов.

Предположения А и Б еще очень сложны для вывода зависимости напряжения-деформации. Поэтому автор вводит дополнительные упрощающие предположения. Поскольку, однако, мы не ставим целью получение математической формулировки теории, мы не станем рассматривать упрощенной теории Лина. Отметим только, что, на наш взгляд, из упрощенной теории в противоположность утверждению Лина не следует равенства G_i упругому модулю сдвига, в то время как для первоначальных предположений А и Б это, вероятно, так.

Некоторые основные качественные выводы из предположений А и Б легко могут быть получены на модели «плоского» поликристаллического тела. Под этим мы понимаем агрегат из монокристаллов, обладающий следующими свойствами. В каждом монокристалле агрегата сдвиги происходят лишь в одной, общей для всех кристаллов плоскости. В остальном ориентация кристаллов произвольна. Естественно, что для полного использования упрощающих свойств «плоского» тела мы и внешнее нагружение должны вести в характеристической для этого тела плоскости.

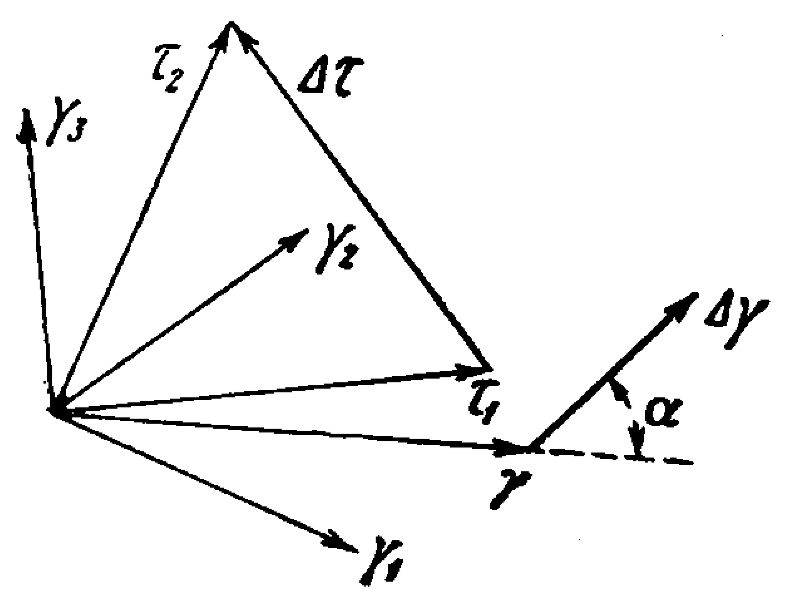
Пусть в характерной плоскости каждого кристалла существуют три возможных направления скольжения, образующие между собой углы в 60° (это характерно для плоскостей скольжения металлов с гранецентрированной кубической решеткой типа алюминия и его сплавов). Действительными направлениями из них будут только два ближайших к направлению результирующего сдвига. Поскольку компоненты касательного напряжения в них равны, то результирующее касательное напряжение всегда лежит на биссектрисе угла, составленного этими направлениями. Так как направление результирующего сдвига также лежит внутри этого угла, то его

---

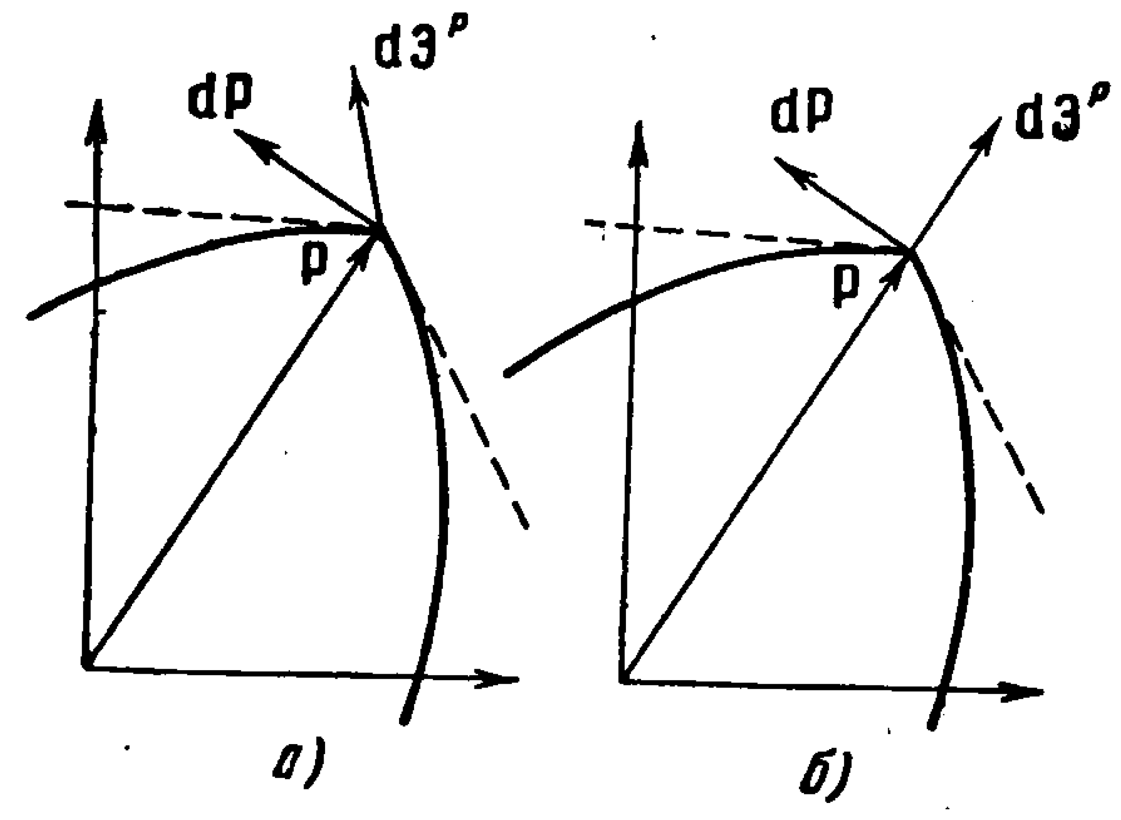
[1] Такое предположение было впервые высказано А. М. Жуковым и Ю. Н. Работновым в работе [30].

направление может отличаться от направления результирующего касательного напряжения максимум на 30°.

При простом нагружении направление результирующего сдвига γ_0 постоянно и по Б одинаково для всех кристаллов. Ввиду этого в каждом кристалле действительные направления скольжения неизменны. Пусть теперь произведено приращение напряжений путем, отличным от простого. Это приведет к дополнительному сдвигу в каждом кристалле (фиг. 2). Если направление такого дополнительного сдвига в каком-то кристалле не выходит за пределы угла, образованного первоначальными направлениями сдвига, то смены действительных направлений скольжения не произойдет и направление результирующего касательного напряжения в этом кристалле будет



Фиг. 2



Фиг. 3

неизменно. Однако как бы ни был мал угол α, который составляют векторы $\Delta\gamma$ и γ_0, на характерной плоскости данного кристалла всегда найдется кристалл, у которого действительные направления скольжения изменятся (γ_1 на γ_3. Это произойдет в тех кристаллах, у которых направление γ_2 лежит ближе к γ_0, чем $\Delta\gamma$). У этих кристаллов произойдет изменение направления результирующего касательного напряжения и следовательно, произойдет приращение касательного напряжения $\Delta\tau$. Для всего тела эти приращения дадут некоторое приращение общего (среднего) напряжения. При этом нетрудно заметить, что связь между этим приращением и углом непрерывна и $\Delta\sigma_{ij\,\text{общ}} = 0$ соответствует $\alpha = 0$. (Надо иметь в виду процесс усреднения; например, при малом α мало также число кристаллов, у которых произойдет смена действительных направлений скольжения, следовательно, будет мало и $\Delta\sigma_{ij\,\text{общ}}$.) Можно, следовательно, утверждать, что при любом резком изменении напряжений (излом траектории нагружения) в рассматриваемом теле траектория деформаций будет плавной кривой. А это означает, что мгновенный модуль сдвига будет равен своему упругому значению.

Из фиг. 2 ясно, что без прекращения пластического деформирования в кристалле средней ориентации $\Delta\tau$ может иметь составляющую в направлении, обратном первоначальной простой деформации. Это указывает на то, что на поверхности (а для «плоского» тела — кривой) нагружения в точке нагружения имеется коническая особенность (угол).

Мы рассмотрели приложение основных положений А и Б к плоской схеме. В трехмерной схеме будут происходить, естественно, в более сложной форме, те же явления, что и рассмотренные выше.

Сравнивая выводы рассмотренных двух теорий, мы можем сказать, что теория скольжения и теория Лина предсказывают появление конической особенности в точке нагружения, но разнятся тем, что теория скольжения предсказывает излом пути пластической деформации при ортогональном нагружении, а теория Лина — нет. На фиг. 3, *а* — теория скольжения, *б* — теория Лина.

Заметим, наконец, что упрощающие предположения Лина по существу сводятся к тому, что каждая плоскость в реальном материале наделяется свойствами выше рассмотренного «плоского» тела. Действие таких плоскостей предполагается независимым, и общая пластическая деформация агрегата находится суммированием пластических деформаций по всем таким плоскостям. При ортогональном нагружении, кроме рассмотренных эффектов «плоского» тела, обязательно будет иметь место эффект включения пластического действия неупрочнившихся или недостаточно упрочнившихся плоскостей в принципе такой же, как и в теории скольжения. Отсюда невозможно ожидать равенства $G_i = G$, что и было отмечено выше.

К двум изложенным выше теориям пластичности довольно близка теория, предложенная недавно Малмейстером [26].

Смысл основных положений теории, предложенной Малмейстером, сводится к следующему. Считается, что пластическая деформация в окрестности данной точки тела определяется сдвигами по всем возможным плоскостям. В каждой такой плоскости пластический сдвиг зависит только от касательного напряжения на этой плоскости. Действие каждой плоскости независимое.

Нетрудно увидеть, что математическая формулировка теории будет отличаться от таковой в теории скольжения только тем, что будет отсутствовать одно интегрирование (интегрирование по углу на каждой плоскости). Конечно, в связи с этим характеристическая функция будет другой, чем в теории скольжения. Качественным же результатом такого изменения будет то, что как конусность точки нагружения, так и угол излома пути пластической деформации при ортогональном нагружении будет меньше, чем в теории скольжения. Все это следует из того, что в противоположность теории скольжения здесь на каждой данной плоскости упрочнение происходит равномерно во всех направлениях. При любом изменении касательного напряжения на данной плоскости с уменьшением его величины пластических деформаций не происходит. Таким образом, при ортогональном нагружении приращения пластических деформаций происходят только за счет включения пластического действия неупрочнившихся или недостаточно упрочнившихся плоскостей (число их ∞^2), а не систем скольжения (∞^3), как в теории скольжения. В связи с этим общее приращение деформаций будет меньше, чем в теории скольжения, и произойдет сглаживание всех эффектов.

Итак, с точки зрения любой из приведенных выше трех теорий пластичности, поверхность нагружения в процессе пластического деформирования меняется так, что точка нагружения на ней является конической. Со стороны математической формулировки все они характерны тем, что связь «напряжение-деформация» содержит кратные интегралы и создает большие математические трудности даже при определении зависимости деформирования от нагружения для однородного напряженного состояния. Концепция же конической точки поверхности нагружения получает значительное распространение, и появляется естественное стремление создать такую теорию пластичности, которая наряду с как можно большей простотой заключала бы это главное качество рассмотренных теорий.

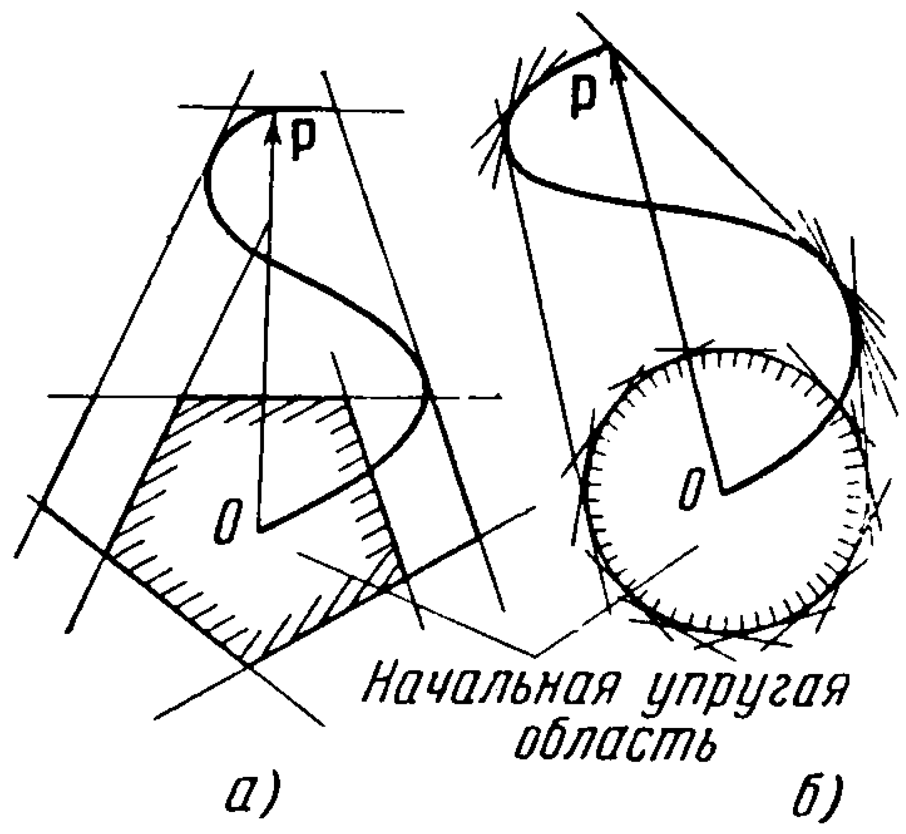
Начало такому направлению было положено Койтером [27] и сводилось к простому расширению соотношений Ходжа-Прагера путем введения многих функций нагружения. Это направление можно характеризовать как «примирение» принципа градиентальности (вектор приращения пластических деформаций есть градиент функции нагружения для участка поверхности нагружения с непрерывной касательной плоскостью) и концепции конической точки поверхности нагружения.

Как уже было условлено выше, функция нагружения в пространстве напряжений определяет поверхность нагружения. В том случае, когда поверхность нагружения имеет какие-то особенности, ее можно представить как огибающую некоторых регулярных поверхностей. Каждая такая поверхность определяет некоторую регулярную функцию нагружения f_α и, таким образом, в соответствии с законом Ходжа-Прагера определяет с точностью до скалярного множителя приращение вектора пластических деформаций. Если сделать предположение о независимости действия каждой из указанных функций нагружения, то общая пластическая деформация может быть представлена как сумма приращений пластических деформаций, определяемых каждой функцией нагружения:

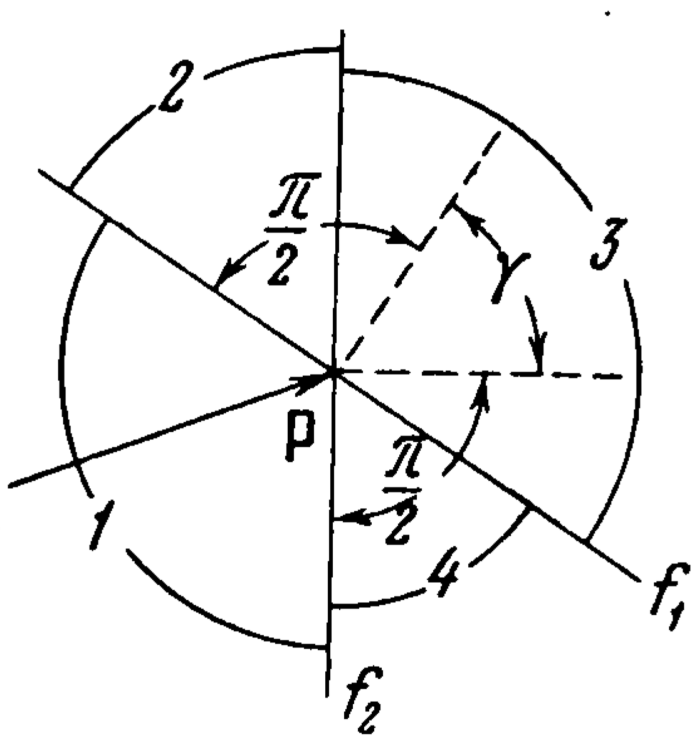
$$d\text{Э}_{ij}{}^p = \sum_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial S_{ij}}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial S_{ij}}\,dS_{ij}\right)$$
$$G_\alpha \geqslant 0 \text{ при } \frac{\partial f_\alpha}{\partial S_{ij}}\,dS_{ij} \geqslant 0, \qquad G_\alpha = 0 \text{ при } \frac{\partial f_\alpha}{\partial S_{ij}}\,dS_{ij} \leqslant 0 \qquad (39)$$

Койтером было показано, что теория скольжения является частным случаем указанного представления и соответствует бесконечному числу плоских поверхностей нагружения.

Плоские поверхности нагружения являются наиболее простыми элементами такой теории, и поэтому дальнейшие исследования предложенной Койтером связи ведутся на основе плоских поверхностей нагружения. К таким исследованиям относится работа Сандерса [28], где считается, что отдельные плоские поверхности нагружения в процессе пластического деформирования перемещаются параллельно самим себе. В этом случае каждая из функций нагружения есть линейная функция напряжений и соотношения Ходжа-Прагера для каждой из них могут быть частично проинтегрированы



Фиг. 4



Фиг. 5

(В работе доказывается, что и, обратно, единичными интегрированными соотношениями между напряжениями и деформациями будут те, для которых $f = \mathrm{const}$ представляет плоскость в пространстве напряжений.) Сделанное Сандерсом предположение позволяет построить поверхность нагружения для любой точки произвольного пути нагружения. Ясно, что в процессе пластической деформации передвигаются только те плоские поверхности нагружения, которые имеют одну общую точку с вектором напряжений. В силу независимости действия каждая из плоскостей нагружения может двигаться только в одну — противоположную началу координат — сторону. Дополнительное предположение о самопараллельности перемещения отдельных плоскостей нагружения сразу дает метод построения поверхности нагружения, который ясен из чертежа на фиг. 4 (плоский случай). На этой фигуре представлены два варианта построения поверхности нагружения: а) если начальная поверхность нагружения (показана штриховкой) представляет многогранник и б) если начальная поверхность гладкая. В последнем случае метод построения является методом огибающих или методом внешних касательных. Поскольку полная пластическая деформация определяется суммой деформаций, соответствующих отдельным плоскостям нагружения, то ясно, что она одинакова для всех путей нагружения, определяющих одну и ту же поверхность нагружения.

Легко видеть, что если первоначальная поверхность нагружения — гладкая замкнутая поверхность, например поверхность Мизеса, то для определения начальной и всех последующих поверхностей нагружения нужно взять бесконечное число плоских поверхностей. Тогда из сделанных предположений вытекает, что в точке нагружения при непрерывной пластической деформации возникает коническая особенность. Для плоского пути нагружения, когда плоские поверхности могут быть представлены в виде прямых, имеем следующий результат.

Во-первых, определяющими в точке нагружения являются только две плоские поверхности нагружения f_1 и f_2 (фиг. 5). Во-вторых, направление вектора приращений пластических деформаций зависит от направления $d\mathbf{P}$ и нормалей к плоскостям f_1 и f_2 следующим образом. Если $d\mathbf{P}$ направлен в упругую область *1*, то приращение пластических деформаций равно нулю. Если $d\mathbf{P}$ направлен в область *3*, то вектор приращения пластических деформаций $dЭ^p$ может лежать только внутри угла γ. Если $d\mathbf{P}$ попадает в области *2* или *4*, то $dЭ^p$ совпадает с нормалью к f_1 или f_2.

Важно еще выяснить вопрос о свойствах дифференциальной зависимости в соотношениях Койтера.

Наиболее распространенные законы пластичности (закон Генки-Надаи, закон Ланинга) являются дифференциально-линейными[1], если, как это обычно бывает в большинстве практических важных вопросов, исключается процесс разгрузки. Таким образом, если рассматривать непрерывный процесс пластической деформации (активный процесс), то указанные теории обладают всеми замечательными свойствами дифференциально-линейных соотношений. В противоположность этому обобщенные соотношения Койтера даже при активном процессе не могут считаться дифференциально-линейными в полном смысле слова. Дело здесь в том, что для многих функций нагружения характерно наличие областей «неполной пластичности» таких, как области *2* и *4* на фиг. 5. Эти области играют такую же роль в нарушении принципа суперпозиции, как и упругие области в обычных законах пластичности. Поскольку же существование таких областей определяется условием нагружения, то можно сказать, что дифференциальная нелинейность закона Койтера заключена в условиях нагружения.

В этой связи мы упомянем о теории пластичности, недавно предположенной Уорнером и Хандельманом [29]. Хотя в окончательной формулировке эта теория по существу не отличается от теории Койтера, она претендует на большую общность, чем теория Койтера, и независимость от соотношений Ходжа—Прагера своим выводом из меньшего числа более общих предположений. Однако сам вывод соотношений Уорнера и Хандельмана нам кажется сомнительным потому, что авторы существенно пользуются свойствами дифференциальной линейности связи, которые нарушаются впоследствии принятым условием нагружения. Дифференциальная линейность связи «напряжение — деформация» получается как следствие предположений о независимости пластического действия от времени и непрерывности частных производных от скоростей деформаций по скоростям напряжений во всей области определения. Но как только вводится критерий нагружения, предусматривающий появление различных областей пластичности, второе из указанных исходных предположений нарушается.

Изложенные соображения о поведении поверхности нагружения и, в частности, о существовании конической точки поверхности нагружения требуют непосредственного экспериментального изучения. Как уже было сказано, первые попытки определения мгновенного модуля сдвига привели к тому, что G_i оказался равным G. Этот результат казался странным главным образом в связи с явлением крутильной потери устойчивости. Поэтому продолжаются попытки экспериментального доказательства того, что $G_i \neq G$. В 1954 г. были опубликованы две работы, посвященные этому вопросу. Это работа Жукова и Работнова [30] и работа Нахди и Роули [31]. В первой из этих работ исследуется поведение трубчатых образцов из стали, во второй — из алюминиевого сплава. В обеих работах найдено, что мгновенный модуль сдвига зависит от величины растягивающего напряжения и может быть значительно меньше упругого модуля сдвига. Этот факт затем был подтвержден в экспериментах Свешниковой [32] с медными латунными и дюралевыми образцами. Если считать справедливым принцип непрерывности, то этот результат означает, что точка нагружения является конической. Одновременно это подтверждает эффект резкого излома пути деформирования при ортогональном нагружении.

В работе Фейгина [33] описаны эксперименты, проведенные автором над образцами из алюминиевого сплава при очень малых крутящих моментах и относительно больших растягивающих силах. Была подмечена зависимость мгновенного модуля сдвига от растягивающей силы, однако отклонение от упругого значения было значительно меньше, чем в двух только что указанных работах. Опыты Фейгина интересны тем, что дают непосредственное подтверждение эффекта излома траектории пластической деформации.

Производя сравнение экспериментальных данных с выводами теории течения (закон Ланинга) и теории деформаций, Фейгин приходит к выводу, что для проведенного им ступенчатого нагружения данные эксперимента лежат между значениями, подсчитанными по этим теориям.

---

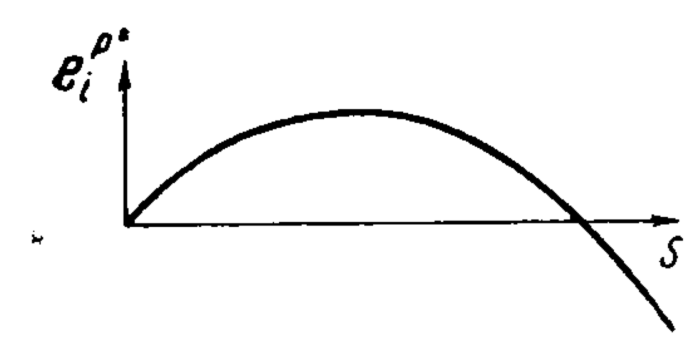
[1] Линейными относительно приращения напряжений и приращений деформаций.

Существенное значение имеют две экспериментальные работы Ху и Мерина. В первой из них [34] изучается поведение поверхности нагружения в процессе пластического деформирования. Авторами было выяснено, что при этом изменения поверхности нагружения не могут быть сведены к одному изотропному расширению или жесткому смещению. Нетрудно увидеть, что этот вывод опровергает принцип независимости действия каждой из многих поверхностей нагружения (особенно ясно это на примере плоских поверхностей нагружения).

Во второй работе Ху и Мерина [35] особое место уделяется определению пластических деформаций при специальном пути нагружения, который для краткости будем называть круговым. Проводится этот путь следующим образом. Материал выводится в пластическую область, а затем (начало кругового нагружения) вектор напряжений описывает в некоторой плоскости векторного пространства дугу круга

$$|P| = \text{const}$$

Для любой теории пластичности, в которой критерием нагружения является условие $dI_2 > 0$, круговое нагружение является нейтральным и изменение пластической деформации на этом пути не должно иметь места. В противоположность этому эксперименты показали, что при круговом нагружении получается изменение пластических деформаций, имеющее столь значительную величину, что не могут быть объяснены неточностью опыта или анизотропией. Из данных, приведенных в работе, можно представить качественную картину изменения пластической деформации при круговом нагружении. Если S — мера длины пути, пройденного концом вектора напряжений, а e_i^{p*} — превышение интенсивности пластических деформаций над постоянной интенсивностью, которая была достигнута к началу кругового нагружения, то специфический вид зависимости e_i^{p*} от S может быть представлен следующим образом (фиг. 6). Заметим, что в опыте Ху и Мерина охватываются все двуосные состояния растяжения от простого растяжения в одном направлении до простого растяжения в другом.



Фиг. 6

Во второй работе Ху и Мерина сделана также попытка экспериментального определения части поверхности (вернее, кривой, ибо рассматривается плоский путь нагружения) нагружения для данной точки пути нагружения. Оказалось, что эта часть поверхности нагружения близка к той, которую предсказывает теория скольжения

Подводя итог результатам, полученным в экспериментальных работах, надо сказать, что пока еще достаточно надежных количественных результатов для таких явлений, как изменение поверхности нагружения, излом траектории пластической деформации, конусность точки нагружения и т. д., не получено и в этом направлении необходимо интенсивное экспериментальное исследование. Именно поэтому при изложении экспериментальных результатов мы старались избежать количественной стороны, и надо прямо отметить, что эта количественная сторона в экспериментах различных авторов бывает столь различной, что при современном уровне экспериментальной техники кажется парадоксальной. Это в особенности относится к определению величины мгновенного модуля сдвига.

В отношении качественной стороны дело обстоит значительно лучше. Нам кажется, что уже теперь есть все основания считать, что мгновенный модуль сдвига отличен от упругого в пластической области и зависит от величины напряжения, при котором было совершено ортогональное нагружение. Существует также связанный с этим явлением эффект излома траектории пластической деформации при ортогональном нагружении. Несомненно, что при круговом нагружении происходит изменение пластической деформации.

Если даже считать, что полученные к настоящему времени экспериментальные данные еще недостаточны для того, чтобы с уверенностью можно было утверждать существование конической точки нагружения, то все же концепция конической точки является едва ли не единственной гипотезой для объяснения рассмотренных выше явлений.

Поступила 6 X 1957 Кафедра теории пластичности МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Hencky H., Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. ZAMM, Bd. 4, H.4, S. 323—334, 1924. Есть русский перевод: Генки Г. К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений. Сб. «Теория пластичности». ИЛ, 1948.
2. Nadai A., Plasticity (1931). Есть русский перевод: Пластичность. ОНТИ, 1936, гл. XIV.
3. Bridgman P. W. The Compressibility of Thirty Metals. Proc. Am. Acad. Arts Sci., vol. 58, No 5 (1923). См. также: Бриджмен П. Физика высоких давлений. ОНТИ, 1935.
4. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. ПММ, т. VII, вып. 4, 1943. См. также: Ильюшин А. А. Пластичность. ГИТТЛ, 1948.
5. Теория пластичности. Сб. статей. ИЛ, 1948.
6. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. ГИТТЛ, 1955.
7. Prager W. Strain-Hardening under Combined Stresses. J. Appl. Phys., vol. 16, No 12, pp. 837—840 (1945). Есть русский перевод: Прагер В. Упрочнение металла при сложном напряженном состоянии. Сб. «Теория пластичности», ИЛ, 1948.
8. Hohenemser K. and Prager W., Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flusstahl. ZAMM, Bd. 12, H. 1, S. 1—14 (1932). Есть русский перевод: Хоэнемзер и Прагер. К механике пластического поведения стали. Сб. «Теория пластичности». ИЛ, 1948.
9. Ильюшин А. А. Теория пластичности при простом нагружении тел, материал которых обладает упрочнением, ПММ, т. XI, № 2, 1947. См. также: Ильюшин А. А. Пластичность, ГИТТЛ, 1948.
10. Ильюшин А. А. К теории малых упруго-пластических деформаций, ПММ, т. X, вып. 3, 1946. См. также: Пластичность, ГИТТЛ, 1948.
11. Handelman G. H., Lin C. C. and Prager W. On the Mechanical Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Quart. Appl. Math., vol. 4, pp. 397—407, 1947.
12. Prager W. The Stress-Strain Laws of the Mathematical Theory of Plasticity — a Survey of Recent Progress. J. Appl. Mech., vol. 15, No 3, pp. 226—233, 1948.
13. Reuss. Berücksichtigung der elastischer Formänderungen in der Plastitätstheorie. ZAMM, Bd. 10, H. 3, S. 226—274, 1930. Есть русский перевод: Рейс А. Учет упругой деформации в теории пластичности. Сб. «Теория пластичности». ИЛ, 1948.
14. Ильюшин А. А. О связи напряжений с малыми деформациями в механике сплошной среды. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.
15. Prager W. Recent Developments in the mathematical theory of Plasticity. J. Appl. Phys., vol. 20, No 3, 1949.
16. Edelman F., Drucker D. C. Some Extension of Elementary Plasticity Theory. J. Franklin Inst., vol. 251, No 6, pp. 581—605 (1951).
17. Cunningham D. M., Thomsen E. G. and Dorn J. E. Plastic of Magnesium Alloy under Biaxial Stresses. ASTM, Preprint, No 33, 1947.
18. Drucker D. C. A More Fundamental Approach to Plastic Stress-strain Relations. Proc. of the First US Nat. Congr. of Appl. Mech., ASME (1951).
19. Drucker D. C. On Uniqueness in the Theory of Plasticity. Quart. Appl. Math., vol. 14, No 1 (1956).
20. Trifan D. Stress Theory of Plastic Flow. J. of Math. and Phys., vol. XXXV, No 1, pp. 44—52 (1956). Есть русский перевод: Трифан. Теория пластического течения, определяющая напряжения. Сб. переводов «Механика», № 1, 1957.
21. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ, 1954, гл. VII.
22. Batdorf J. B. and Budiansky B. A Mathematical Theory of Plasticity Based on the Concept of Slip. NACA, T. N., No 1871, April 1949.
23. Cicala P. On Plastic Bucling of Plates and Theory of Plastic Slip. J. Aer. Soc., vol. 16, No 4, 1951.

24. Budiansky B. A., Dow N. F., Peters R. W., Shepherd R. P. Experimental studies of Polyaxial Stress-Strain Laws of Plasticity. Proc. of the First US Nat. Congr. of Appl. Mech., ASME (1951).
25. Lin T. H. A Proposed Theory of Plasticity Based on Slips. Proc. of the Second US Nat. Congr. of Appl. Mech., pp. 461—468 (1954). Есть русский перевод: Линь. Вариант теории скольжения. Сб. переводов «Механика», № 3, 1956
26. Малмейстер. Пластичность квазилинейного тела. Сб. «Вопросы динамики и динамич. прочности», вып. 4, Рига, АН ЛатвССР, 1956, стр. 37—48. См. также: Маймейстер А. К. Упругость и неупругость бетона. Изд. АН ЛатвССР. Рига, 1957
27. Koiter W. T. Stress-Strain Relations Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials, with a Singular Jield Surface. Quart. Appl. Math., vol 11, No 3, pp. 350—354 (1953).
28. Sanders J. L. Plastic Stress-Strain Relations Based on Linear Loading Functions. Proc. of the Second US Nat. Congr. of Appl. Mech., pp. 455—460 (1954). Есть русский перевод: Сандерс. Соотношения между напряжением и деформациями в пластической области, основанные на линейных функциях нагружения. Сб. переводов «Механика», вып. 3, 1956.
29. Warner W. H. and Handelman F. N. Modified Incremental Strain Low for Work Hardening Waterials, The Quart Journ.of Mech.and Appl. Math., vol.9, № 1 (1956).
30. Жуков А. М. и Работнов Ю. Н. Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении. Инженерный сборник, т. XVIII, 1954.
31. Nagdi and Rowley J. An Experimental Study of Biaxial Stress-Strain Relation in Plasticity. J. of Mech. and Phys. of Solids, vol. 3, No 1, pp. 63—80 (1954). Есть русский перевод: Нахди и Роули. Экспериментальное изучение зависимости между напряжениями и деформациями в пластической области при двуосном напряженном состоянии. Сб. переводов «Механика», вып. 3, 1955.
32. Свешникова В. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1956.
33. Feigen M. Inelastic Behavior under Combined Thension and Torsion. Proc. of the Second US Nat. Congr. of Appl. Mech., pp. 469—476 (1954). Есть русский перевод: Фейгин. Неупругое поведение при совместном действии растяжения и кручения Сб. перводов «Механика», No 3, 1956.
34. Hu L. W., Marin J. Anisotropic Loading Functions for Combined Stresses in the Plastic Range. J. Appl. Mech., vol. 22, № 1, pp. 77—85 (1955). Есть русский перевод: Ху и Мерин. Анизотропные функции нагружения сложного напряженного состояния в пластической области. Сб. переводов «Механика», № 2, 1956.
35. Hu L. W., Marin J. Biaxial Plastic Stress-Strain Relations of a Mild Steel for Variable Stress Rations. Transections of the ASME, vol. 78, № 3 (1956).