Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОБЩИХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ И СТАТИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

Д. Д. Ивлев

(Москва)

Общие уравнения теории идеальной пластичности были даны М. Леви [1]. Форма записи М. Леви условия пластичности Треска — Сен-Венана в виде одного соотношения оказалась весьма громоздкой и подробно не исследовалась.

При условии пластичности Мизеса общая задача является статически неопределимой, и решение ее наталкивается на большие трудности.

Г. Генки [2] показал, что при использовании гипотезы полной пластичности [3] осесимметричные задачи становятся статически определимыми, и решил некоторые задачи. В. Енне [4] использовал гипотезу полной пластичности и закон пластического течения Мизеса для исследования пространственной задачи. Все свои рассуждения он связал с изостатической координатной сеткой (сеткой главных напряжений) и получил ряд соотношений, имеющих место для главных напряжений и кривизн изостатических кривых. При этом Енне оставил в стороне противоречия, возникающие при определении кинематической стороны вопроса.

А. Ю. Ишлинский [5, 6] обосновал гипотезу полной пластичности, показав, что соотношения полной пластичности имеют место в случае, если два из трех максимальных касательных напряжений одновременно достигают своего предельного значения, или, другими словами, состоянию полной пластичности отвечает ребро призмы Кулона, интерпретирующей в пространстве главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 условие пластичности Треска — Сен-Венана. Им же [7] были развиты численные методы решения осесимметричных задач. Сравнительно недавно Р. Шилд [8] подробно проанализировал осесимметричную задачу при условии пластичности Треска — Сен-Венана, решив ряд новых задач и дополнив некоторые решения работы [7] построением поля скоростей.

Настоящая работа посвящена выводу и анализу общих уравнений теории идеальной пластичности при условии пластичности Треска — Сен-Венана и ассоциированного с ним закона пластического течения.

Показано, что в случаях, когда пластическое напряженное состояние отвечает ребру призмы Кулона, задача является статически определимой.

В работе рассматриваются также общие уравнения статики сыпучей среды при условии полного предельного состояния, т. е. для случаев, когда предельное напряженное состояние отвечает ребру поверхности, интерпретирующей условие предельного равновесия в пространстве главных напряжений. Показано, что в этих условиях общая задача статики сыпучей среды является статически определимой.

Следует отметить, что под ассоциированным законом течения понимается закон течения, определяемый условием пластичности, рассматриваемым в качестве пластического потенциала. В этом случае работа напряжений на соответствующих приращениях пластических деформаций минимальна, и поэтому такое построение теории представляется наиболее правильным и обоснованным.

1. Согласно условию пластичности Треска — Сен-Венана пластическое течение может возникнуть при достижении максимальным касательным напряжением некоторого постоянного предельного значения.

Очевидно, что при принятом условии пластичности возможны лишь два типа пластического напряженного состояния: точки σ_1, σ_2, σ_3 лежат либо на ребрах призмы, либо на ее гранях.

Тогда для любого ребра призмы должно выполняться одно из условий:

$$\sigma_i = \sigma_j = \sigma_k \pm 2k \tag{1.1}$$

а для ее граней

$$\sigma_i = \sigma_j + 2k, \qquad \sigma_i > \sigma_k > \sigma_j$$
$$\sigma_j = \sigma_j - 2k, \qquad \sigma_j < \sigma_k < \sigma_j \tag{1.2}$$

В случае (1.1) скорости пластических деформаций определяются из условия несжимаемости

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

и условия изотропии, требующего совпадения главных осей тензоров скоростей деформации и напряжений.

В случае (1.2) из принятого закона течения сразу следует, что $\varepsilon_k = 0$, поэтому уравнение, определяющее скорости пластических деформаций, принимает вид:

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = 0 \tag{1.3}$$

Таким образом, во втором случае поле скоростей пластических деформаций является весьма стесненным, приводящим к некоторому обобщенному плоскому деформированному состоянию.

Рассмотрим вначале соотношение (1.1).

Введя декартову систему координат x, y, z, обозначим через ξ, η, ζ направление главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3. Взаимная ориентация этих осей определяется направляющими косинусами, согласно таблице справа:

	ξ	η	ζ
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

Тогда, если

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k \tag{1.4}$$

то, относя в дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, к постоянной $\pm 2k$, получим

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \ldots \tag{1.5}$$
$$\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2, \ldots$$

Отметим, что здесь и всюду в дальнейшем, где это представляется целесообразным, мы не приводим аналогичные выражения для компонент σ_y, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} и т. п.

Из (1.5) на основании (1.4), следует, что

$$\sigma_x = \sigma_1 + n_1^2, \qquad \sigma_y = \sigma_1 + n_2^2, \qquad \sigma_z = \sigma_1 + n_3^2$$
$$\tau_{xy} = n_1 n_2, \qquad \tau_{yz} = n_2 n_3, \qquad \tau_{zx} = n_3 n_1 \tag{1.6}$$

Легко получить, что

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{1}{3}, \qquad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

и поэтому можно получить три соотношения между напряжениями:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}^2 &= \left(\sigma_x - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\left(\sigma_y - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\\
\tau_{yz}^2 &= \left(\sigma_y - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\left(\sigma_z - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\\
\tau_{zx}^2 &= \left(\sigma_z - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\left(\sigma_x - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

или

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}\tau_{yz} &= \tau_{zx}\left(\sigma_y - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\\
\tau_{yz}\tau_{zx} &= \tau_{xy}\left(\sigma_z - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\\
\tau_{zx}\tau_{xy} &= \tau_{yz}\left(\sigma_x - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Очевидно также, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} &= \left(\sigma_x - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\left(\sigma_y - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\left(\sigma_z - \sigma + \tfrac{1}{3}\right)\\
(\tau_{xy}\tau_{yz})^2 + (\tau_{yz}\tau_{zx})^2 + (\tau_{zx}\tau_{xy})^2 &= \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Полагая $n_i = \cos\varphi_i$ и подставляя соотношение (1.6) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0,\ldots$$

получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} - \sin 2\varphi_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \sin\varphi_1\cos\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \tag{1.10}$$

$$- \sin\varphi_2\cos\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \sin\varphi_1\cos\varphi_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \sin\varphi_3\cos\varphi_1\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = 0,\ldots$$

причем

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1 \tag{1.11}$$

Подставляя уравнения характеристической поверхности системы (1.10), (1.11) в виде $\psi(x, y, z)$, найдем

$$\Phi\left[2\Phi^2 - (\operatorname{grad}\psi)^2\right] = 0 \tag{1.12}$$

где

$$\Phi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\varphi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\varphi_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos\varphi_3$$

Поскольку вектор $\operatorname{grad}\psi$ перпендикулярен к поверхности ψ, то из равенства $\Phi = 0$ следует, что направление вектора $\zeta(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3)$, т. е. направление главного напряжения σ_3, является характеристическим. Из второго соотношения (1.12) следует, что

$$2(\operatorname{grad}\psi\cdot\zeta)^2 - (\operatorname{grad}\psi)^2 = 0$$

Отсюда вытекает, что направления, составляющие угол 45° с направлением σ_3, являются характеристическими.

Таким образом, система уравнений (1.10), (1.11) будет всегда гиперболической.

Легко видеть, что характеристические направления совпадают с площадками максимальных касательных напряжений.

Обратимся к условию изотропии, согласно которому

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2, \ldots, \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2, \ldots \tag{1.13}$$

В случае, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то из (1.13) и условия несжимаемости следует, что

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 (1 - 3n_1^2), \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_1 (1 - 3n_2^2), \qquad \varepsilon_z = \varepsilon_1 (1 - 3n_3^2)$$

$$\varepsilon_{xy} = -3\varepsilon_1 n_1 n_2, \qquad \varepsilon_{yz} = -3\varepsilon_1 n_2 n_3, \qquad \varepsilon_{zx} = -3\varepsilon_1 n_3 n_1 \tag{1.14}$$

Из (1.14) и (1.6) легко получить

$$\frac{\varepsilon_x}{\sigma_x - \sigma} = \frac{\varepsilon_y}{\sigma_y - \sigma} = \frac{\varepsilon_z}{\sigma_z - \sigma} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\varepsilon_{zx}}{\tau_{zx}} \tag{1.15}$$

Рассмотрим далее случай (1.2). Пусть в безразмерных переменных

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 1, \qquad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 \tag{1.16}$$

Введем некоторую криволинейную ортогональную систему координат α, β, γ. Пусть взаимная ориентация этих осей и осей ξ, η, ζ в каждой точке определяется направляющими косинусами, сведенными в приведенную таблицу. Тогда

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \ldots, \qquad \tau_{\alpha\beta} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2, \ldots \tag{1.17}$$

Воспользовавшись (1.16), из (1.17) получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_2 + l_1^2 + (\sigma_3 - \sigma_2) n_1^2, \ldots, \qquad \tau_{\alpha\beta} = l_1 l_2 + (\sigma_3 - \sigma_2) n_1 n_2 \tag{1.18}$$

Аналогично из (1.3) и (1.13) будем иметь

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 (l_1^2 - m_1^2), \ldots, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_1 (l_1 l_2 - m_1 m_2), \ldots \tag{1.19}$$

Обратимся к условию пластичности. Шесть соотношений (1.18) плюс три соотношения между направляющими косинусами содержат восемь переменных σ_2, σ_3, l_i, n_i, подлежащих исключению. Можно получить, что

$$q = -\frac{1}{3}(1 - c - c^2), \qquad r = -\frac{1}{27}(2 - 3c - 3c^2 + 2c^3)$$

где $c = \sigma_3 - \sigma_2$, а q и r — соответственно второй и третий инварианты тензора-девиатора напряжения:

$$q = S_\alpha S_\beta + S_\beta S_\gamma + S_\gamma S_\alpha - \tau_{\alpha\beta}^2 - \tau_{\beta\gamma}^2 - \tau_{\gamma\alpha}^2$$

$$r = S_\alpha \tau_{\beta\gamma}^2 + S_\beta \tau_{\gamma\alpha}^2 + S_\gamma \tau_{\alpha\beta}^2 - S_\alpha S_\beta S_\gamma - 2\tau_{\alpha\beta}\tau_{\beta\gamma}\tau_{\gamma\alpha}$$

$$S_\alpha = \sigma_\alpha - \sigma, \ldots \qquad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma)$$

Исключая величину c, получим искомое условие пластичности М. Леви [1]:

$$(4q + 1)(q + 1)^2 + 27r^2 = 0 \tag{1.20}$$

Используя условие (1.20) в качестве пластического потенциала, получим

$$\varepsilon_\alpha = -\lambda \left[a S_\alpha - 54r \left(\tau_{\beta\gamma}^2 - S_\beta S_\gamma + \frac{1}{3} q\right)\right], \ldots \tag{1.21}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -2\lambda \left[a \tau_{\alpha\beta} - 54r (\tau_{\alpha\beta} S_\gamma - \tau_{\beta\gamma}\tau_{\gamma\alpha})\right], \ldots$$

где

$$a = 6(q + 1)(2q + 1)$$

В случае плоской деформации, рассматривая условие пластичности Треска — Сен-Венана как предельное, можно показать, что

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Следовательно, случай плоского деформированного состояния реализуется на прямой грани призмы, равноудаленной от сторон этой грани.

Однако напряженное состояние, сколь угодно близкое к плоскому деформированному состоянию, может отвечать ребру призмы.

Рассмотрим бесконечно длинное вдоль оси z цилиндрическое тело, находящееся под нагрузкой, не зависящей от z. Для этого тела имеет место плоская деформация. Направим оси x и y перпендикулярно оси z и обозначим через u и v соответственно перемещения вдоль x и y. Пусть L — контур тела в плоскости xy. Представим себе новое тело, образованное вращением контура L вокруг некоторой оси y_1, параллельной оси y. Обозначим через R расстояние между этими осями. Предположим, что нагрузка в плоскости на контур L торообразного тела совпадает с нагрузкой цилиндрического тела. Тогда для торообразного тела

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{u}{R+x}$$

Следовательно, при любом конечном значении радиуса R компонента $\varepsilon_3 = \varepsilon_z \neq 0$ и пластическое напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона, хотя при достаточно большом R напряженное состояние торообразного тела как угодно близко к напряженному состоянию при плоской деформации.

2. Рассмотрим общие уравнения статики сыпучей среды при условии полного предельного состояния.

Основное уравнение состояния сыпучей среды запишем в виде [9]

$$\max|\tau_n| = k + \sigma_n \operatorname{tg}\rho \tag{2.1}$$

где τ_n, σ_n — касательное и нормальное напряжения, k, ρ — постоянные.

Легко показать, что условие (2.1) можно записать в виде

$$|\sigma_i - \sigma_j| \leqslant 2k\cos\rho + (\sigma_i + \sigma_j)\sin\rho, \qquad i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

В пространстве главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 условие (2.2) интерпретируется шестигранной пирамидой, исходящей из точки

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 == -k\operatorname{ctg}\rho$$

все грани которой равнонаклонены к прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Очевидно, что условию полного предельного состояния соответствует любое из ребер пирамиды, причем достаточно рассмотреть два противоположных ребра.

Пусть $\sigma_1 = \sigma_2$, тогда для ребра A получим

$$\sigma_3 = \sigma_1\left(\frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho}\right) + \frac{2k\cos\rho}{1-\sin\rho} \tag{2.3}$$

для ребра B будем иметь

$$\sigma_3 = \sigma_1\left(\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}\right) - \frac{2k\cos\rho}{1+\cos\rho} \tag{2.4}$$

Используя соотношения (1.5) для ребра A, получим

$$\sigma_x = p + 2\left[\frac{p\sin\rho}{1-\sin\rho} + \frac{k\cos\rho}{1-\sin\rho}\right]n_1^2, \ldots$$

$$\tau_{xy} = 2\left[\frac{p\sin\rho}{1-\sin\rho} + \frac{k\cos\rho}{1-\sin\rho}\right]n_1 n_2, \ldots \tag{2.5}$$

где $p = \sigma_1$. Легко получить, что

$$p = \frac{3\sigma(1-\sin\rho) - 2k\cos\rho}{3(1-\sin\rho)+2\sin\rho}$$

Далее можно получить три соотношения между напряжениями:

$$\tau_{xy}^2 = (\sigma_x - p)(\sigma_y - p), \qquad \tau_{yz}^2 = (\sigma_y - p)(\sigma_z - p)$$
$$\tau_{zx}^2 = (\sigma_z - p)(\sigma_x - p)$$

или

$$\tau_{xy}\tau_{yz} = \tau_{zx}(\sigma_y - p), \qquad \tau_{yz}\tau_{zx} = \sigma_{xy}(\sigma_z - p)$$
$$\tau_{zx}\tau_{xy} = \tau_{yz}(\sigma_x - p)$$

Имеет место также

$$\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = (\sigma_x - p)(\sigma_y - p)(\sigma_z - p)$$
$$(\tau_{xy}\tau_{yz})^2 + (\tau_{yz}\tau_{zx})^2 + (\tau_{zx}\tau_{xy})^2 = 2\left[\frac{p\sin\rho + k\cos\rho}{1-\sin\rho}\right]\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}$$

Полагая $n_i = \cos\varphi_i$, подставляя соотношения (2.5) в уравнения равновесия и присоединяя условие (1.11), получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных p, φ_i. Представляя уравнение характеристической поверхности этой системы уравнений в виде $\psi(x, y, z)$, можно получить

$$\Phi\,[a\Phi^2 - (\operatorname{grad}\psi)^2] = 0, \qquad a = \frac{2}{1-\sin\rho} \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что направления, составляющие углы θ с направлением третьего главного напряжения, для которых $\cos\theta = \pm\sqrt{{}^1/_2\,(1-\sin\rho)}$, являются характеристическими. Для ребра B получим

$$\cos\theta = \pm\sqrt{{}^1/_2(1+\sin\rho)}$$

Рассмотрим далее общий случай, когда

$$\max\{|\tau_n| - f(\sigma_n)\} = 0 \tag{2.7}$$

Условие предельного состояния тогда можно записать в виде

$$\tfrac{1}{2}|\sigma_i - \sigma_j|\sin 2\omega \leqslant f\left[\tfrac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j) - \tfrac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j)\cos 2\omega\right] \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3) \tag{2.8}$$

где $df\,/\,d\sigma_n = \operatorname{ctg} 2\omega$. Очевидно, что в пространстве главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 условие предельного равновесия (2.8) интерпретируется некоторой криволинейной шестигранной пирамидой, расположенной симметрично относительно прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Рассматривая два противоположных ребра пирамиды, представим условие полного предельного состояния в виде

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\omega \pm f\left[\tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\omega\right] = 0$$

Легко получить

$$\sigma_1 = \sigma_n + \frac{|\tau_n|(\cos 2\omega \pm 1)}{\sin 2\omega}, \qquad \sigma_3 = \sigma_n + \frac{|\tau_n|(\cos 2\omega \mp 1)}{\sin 2\omega} \tag{2.9}$$

Из (2.3) и (1.5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_n + \frac{|\tau_n|}{\sin 2\omega}(\cos 2\omega \mp \cos 2\varphi_1) \\ \tau_{xy} &= \mp\frac{2|\tau_n|}{\sin 2\omega}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Поскольку $|\tau_n|$ и ω могут быть выражены через σ_n, то уравнения равновесия, соотношения (2.10) и (1.11) приводят к системе четырех уравнений относительно четырех неизвестных σ_n и φ_i.

Следуя В. В. Соколовскому [9], введем функцию S, для которой

$$dS = \frac{d\sigma_n}{|\tau_n|} - d\omega$$

Тогда легко получить

$$d\sigma_x = \frac{2|\tau_n|}{\sin^2 2\omega}(1 \mp \cos 2\omega \cos 2\varphi_1)\, dS \pm \frac{2|\tau_n|}{\sin 2\omega} \sin 2\varphi_1\, d\varphi_1$$

$$d\tau_{xy} = \mp 2\left\{\frac{2|\tau_n|}{\sin^2 2\omega}\cos 2\omega \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 dS - \right.$$
$$\left. - \frac{|\tau_n|}{\sin 2\omega}\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 d\varphi_1 - \frac{|\tau_n|}{\sin 2\omega}\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 d\varphi_2\right\}$$

Дифференциальное уравнение характеристической поверхности $\psi(x, y, z)$ уравнений равновесия и соотношения (1.11) запишется в виде (2.6), где

$$a = \frac{2}{1 \pm \cos 2\omega}$$

Отметим, что для линейной зависимости (2.1)

$$\omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$$

Для обоснования предпочтительного выполнения полного предельного состояния, как и в теории идеальной пластичности, следует привлечь кинематические соображения, которые, однако, в статике сыпучей среды еще не получили достаточного развития.

Поступила 29 XI 1957

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости. Теория пластичности. Сб. статей. ИЛ, М., 1948.
2. Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах. Теория пластичности. Сб. статей, ИЛ, 1948.
3. Хаар А. и Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах. Теория пластичности. Сб. статей. ИЛ, М., 1948.
4. Jenne W. Räumliche Spannungsverteilung in festen Körpern bei plastischer Deformation. ZAMM, Bd. 8, H. 1, Berlin, 1928.
5. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязко-пластических тел. Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1945.
6. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости. Уч. записки МГУ, вып. 117, 1946.
7. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля. ПММ, т. VIII, вып. 3, 1944.
8. Шилд Р. Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии. Сб. переводов «Механика», № 1. ИЛ, М., 1957.
9. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. 2-е, Гостехтеоретиздат, М., 1954.
10. Березанцев В. Г. Осесимметричные задачи теории предельного равновесия сыпучей среды. Серия «Современные проблемы механики». Гостехтеоретиздат, М., 1952.
11. Соколовский В. В. Плоское предельное равновесие горных пород. Известия АН СССР, ОТН, вып. 9, 1948.