

## ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ОСТАТОЧНЫЕ МИКРОНАПРЯЖЕНИЯ

Ю. И. К а д а ш е в и ч, В. В. Н о в о ж и л о в

(Ленинград)

В качестве условия «активности» деформации обычно принимают неравенство

$$dT > 0 \quad (0.1)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}$$
$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{ii} \quad (0.2)$$

Тем самым граница, отделяющая область упругих деформаций от области пластических деформаций, определяется уравнением

$$T = C \quad (0.3)$$

причем  $C$  — значение интенсивности касательных напряжений  $T$  в рассматриваемый момент нагружения. Согласно (0.3) в процессе активной деформации граница текучести равномерно расширяется во все стороны, оставаясь подобной своей первоначальной форме. Однако в действительности деформирование приводит к изменению не только размеров границы текучести, но и ее формы, а также к перемещению ее в целом, в результате которого точка  $\sigma_{ij} = 0$  перестает быть центром области упругих деформаций.

В последнее время уделялось много внимания выяснению изменений формы границы текучести<sup>[1,2,3]</sup>. Значительно менее теоретически освещен вопрос о перемещениях этой границы в целом, хотя наличие у большинства материалов ясно выраженного эффекта Баушингера указывает на то, что такие перемещения, несомненно, имеют место и что они достаточно существенны. (Кстати сказать, обычное уравнение границы текучести (0.3) дает эффект Баушингера с обратным знаком, т. е. приводит при его оценке к ошибке не только количественной, но и качественной.) Предлагаемая работа является попыткой построения теории пластичности, учитывающей перемещение центра области упругих деформаций. Изменением же формы границы текучести мы будем пренебрегать, имея в виду, что роль этого фактора может быть оценена на основании результатов других авторов.

В этом же направлении имеются работы Ф. Эдельмана и Д. Дракера<sup>[4]</sup> и А. Ю. Ишлинского<sup>[11]</sup>. В первой из них путь построения теории пластичности, учитывающий эффект Баушингера, только намечен. Во второй предложен вариант теории пластичности, основанный на предположениях, что упрочнение линейно, а граница текучести перемещается как твердое целое. Данный вариант, заслуживающий серьезного внимания, заключается в излагаемой ниже теории как один из двух ее предельных случаев (другим является классическая теория течения).

§ 1. Соотношения между напряжениями и пластическими деформациями. Пусть граница текучести в момент появления первых пластических деформаций определяется уравнением

$$T = C_T \quad (1.1)$$

где

$$C_T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T \quad (1.2)$$

а  $\sigma_T$  — начальный предел текучести при простом растяжении. Если считать, что в процессе деформирования граница текучести остается подобной своей первоначальной форме, получая, однако, при этом некоторое поступательное перемещение, то ее уравнение (в произвольный момент нагружения) запишется в виде

$$T^\circ = C^\circ \quad (1.3)$$

где

$$T^\circ = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{\circ'} \sigma_{ij}^{\circ'}}, \quad \sigma_{ij}^\circ = \sigma_{ij} - s_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{\circ'} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma^\circ \delta_{ij}, \quad \sigma^\circ = \sigma_{ii} \quad (1.4)$$

причем константа  $C^\circ$  — значение инварианта  $T^\circ$  в рассматриваемый момент нагружения. Компоненты введенного выше симметричного тензора второго ранга  $s_{ij}$  (имеющего размерность тензора напряжений) — координаты центра области упругих деформаций (в системе  $\sigma_{ij}$ ).

Данный тензор обладает следующими очевидными свойствами:

а) он равен нулю в момент появления первых пластических деформаций, поскольку при этом равенство (1.3) должно превращаться в (1.1);

б) он остается постоянным при нейтральном нагружении (т. е. при нагружении вдоль границы текучести), поскольку при этом область упругих деформаций должна оставаться неподвижной;

в) при активном нагружении  $s_{ij}$  изменяются, определяясь при этом пластическими деформациями.

Тензор  $s_{ij}$  назовем тензором остаточных микронапряжений. Что же касается  $\sigma_{ij}^\circ$ , то им присвоим наименование активных напряжений. Смысл того и другого термина выяснится из дальнейшего.

Предположим, что тензор приращения пластических деформаций полностью определяется тензором активных напряжений и его приращениями. Тогда (по аналогии с наиболее распространенным вариантом теории течения) можно написать (для материалов изотропных при простых нагружениях) следующие соотношения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}^{\circ'} df(T^\circ) \quad (1.5)$$

Здесь  $f(T^\circ)$  — функция нагружения, подлежащая экспериментальному определению. Ее механический смысл вытекает из равенства

$$dA^\circ = \sigma_{ij}^{\circ'} d\varepsilon_{ij}^p = 2T^{\circ 2} df \quad (1.6)$$

Откуда

$$A^\circ = \int_{T_0^\circ}^{T^\circ} 2T^{\circ 2} \frac{df}{dT^\circ} dT^\circ \quad (1.7)$$

Таким образом,  $f(T^\circ)$  непосредственно связана с работой активных напряжений на пластических деформациях, причем, как это следует из (1.7), в соотношениях (1.5) заложена гипотеза, что указанная работа зависит только от начального и конечного значений интенсивности активных касательных напряжений.

Особо должен быть рассмотрен случай, когда граница текучести определяется уравнением

$$T^\circ = C_T = 1/\sqrt{3} \sigma_T = \text{const} \quad (1.8)$$

При этом она сохраняет в процессе деформирования не только свою форму, но и все свои размеры, перемещаясь в пространстве  $\sigma_{ij}$  как твердое целое. В данном случае следует поступать как в теории Рейсса, т. е. надо заменить (1.5) соотношениями

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}' d\lambda \quad (1.9)$$

Материал, подчиняющийся условию (1.8), будем называть материалом с идеальным эффектом Баушингера. Для такого материала данный эффект точно эквивалентен эффекту упрочнения, взятому с обратным знаком. Обычно же эффект Баушингера бывает, как известно, меньше эффекта упрочнения. Соотношения (1.5) или (1.8), (1.9) сами по себе недостаточны для нахождения пути пластического деформирования по заданному пути нагружения (или наоборот), так как при нагружении задается не тензор  $\sigma_{ij}$ , а истинный тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ . Поэтому приведенные выше формулы надо дополнить соотношениями, связывающими тензор  $s_{ij}$  с пластическими деформациями. Возникает при этом вопрос, какова должна быть форма этой связи? Должна ли она иметь вид неинтегрируемых дифференциальных соотношений, аналогичных (1.5), или же ее следует мыслить в виде функциональных зависимостей, непосредственно выражающих  $s_{ij}$  через  $\varepsilon_{ij}^p$ ? В следующем параграфе на основании соображений физического характера будет показано, что второе представляется более вероятным. На этом основании напомним

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2g} s_{ij} \quad (1.10)$$

где  $g$  — функция инвариантов тензора  $s_{ij}$ .

В дальнейшем будем ее полагать функцией только от

$$T_s = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (1.11)$$

Теория пластичности, основанная на формулах (1.8), (1.9) и (1.10) (при  $g = g_0 = \text{const}$ ), была предложена А. Ю. Ишлинским [11].

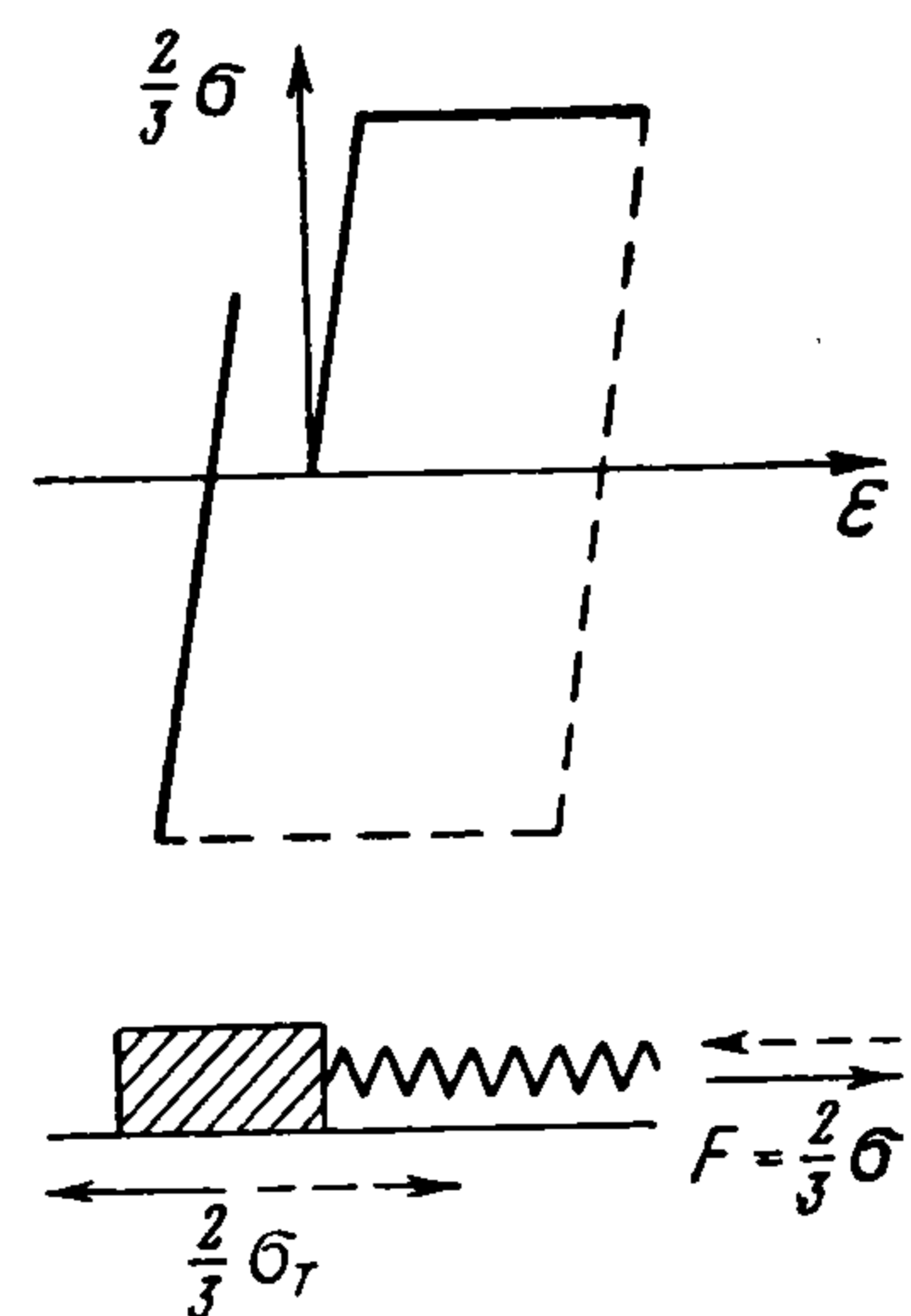
Остается определить упругие деформации. Будем считать (как это всегда принимают в теории пластичности), что тензор упругих деформаций связан с тензором напряжений  $\sigma_{ij}$  соотношениями закона Гука

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{ii}^y \delta_{ij} + 2G (\varepsilon_{ij}^y)' \quad (1.12)$$

где  $K$  — модуль объемного расширения,  $G$  — модуль сдвига,  $(\varepsilon_{ij}^y)'$  — компоненты девиатора тензора упругой деформации. Заметим в заключение параграфа, что согласно (1.5) или (1.9) тензор пластической деформации тождественен своему девиатору. Но если так, то согласно (1.10) тем же

свойством обладает и тензор остаточных напряжений  $s_{ij}$ . Можно сформулировать и более сложный вариант теории, не пренебрегающий пластическим изменением объема и соответственно остаточными средними нормальными напряжениями. Однако вряд ли было бы уместно на этом останавливаться в данной работе, целью которой является изложение основных идей предлагаемой теории, а не исчерпание всех заключающихся в ней возможностей.

**§ 2. Некоторые физические соображения, говорящие в пользу предложенных формул.** Соотношения (1.5) были написаны нами по аналогии с теорией течения, а соотношения (1.10), основывающиеся на представлении, что тензоры  $s_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}^p$  зависят один от другого по принципу упругой взаимосвязи, были предложены вообще без обоснования. Между тем как соотношения (1.5), так и соотношения (1.10) отнюдь не очевидны. Действительно, (1.5) утверждают, например, что тензор приращения пластических деформаций подобен тензору активных напряжений  $\sigma_{ij}^o$ . Спрашивается, почему именно ему, а не тензору истинных напряжений  $\sigma_{ij}$ ? Неясно также, почему  $s_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^p$  должны быть связаны соотношениями, не зависящими от пути деформирования. В пояснение всего этого приведем следующие соображения.



Фиг. 1

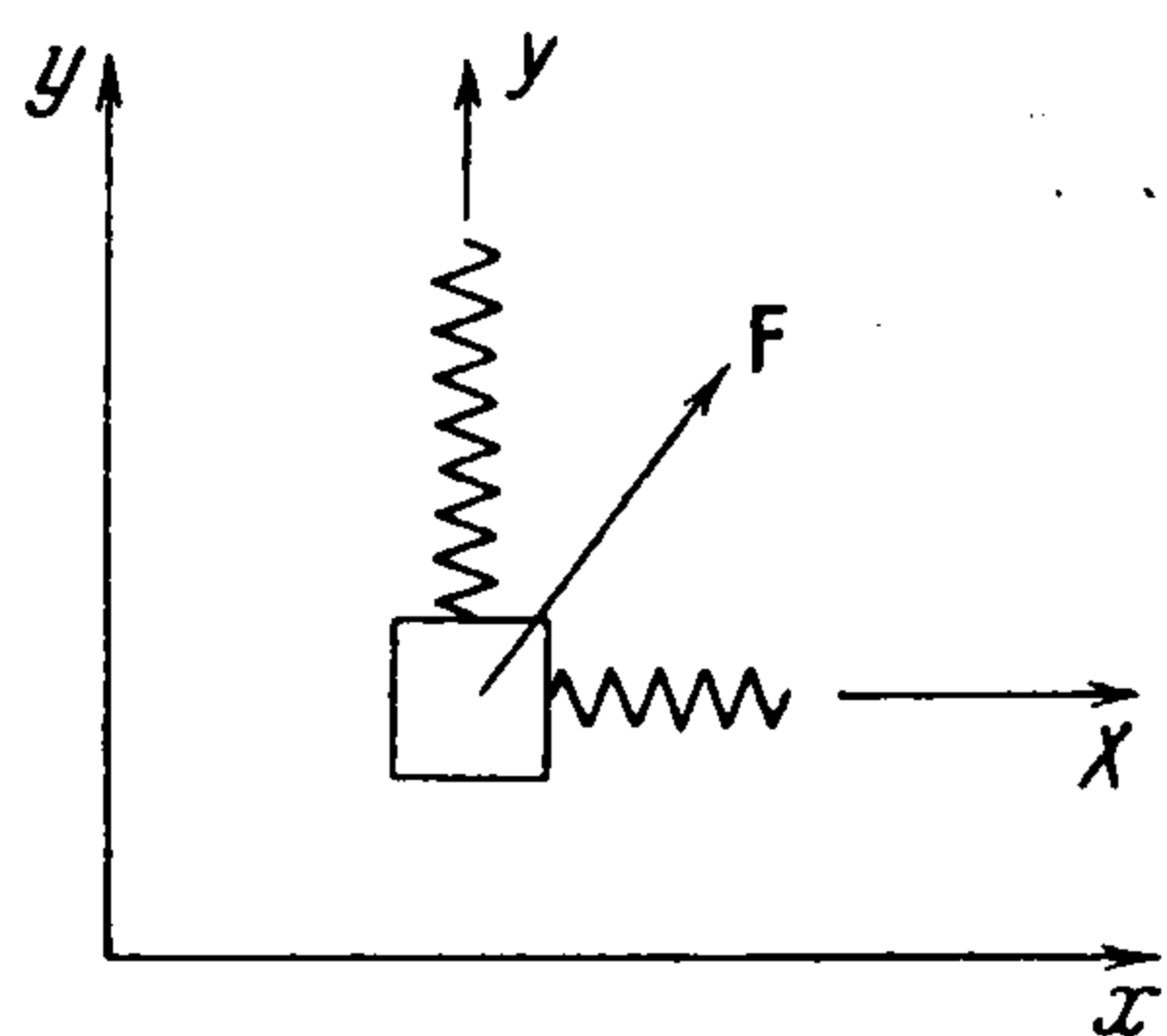
Уже давно было обращено внимание на то, что существует некоторая аналогия между сопротивлением пластической деформации и сухим трением. Так, например, поведение идеального упруго-пластического тела при простом растяжении и сжатии может быть уподоблено перемещению конца пружины, другой конец которой прикреплен к телу, лежащему на горизонтальной плоскости (фиг. 1).

Данная аналогия может быть распространена и на случай совместного действия двух напряжений, например, нормального  $\sigma_{xx} = \sigma$  и касательного  $\sigma_{xy} = \tau$ . В этом случае уравнение границы текучести записывается в виде

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{2}{3} \sigma_T \quad (2.1)$$

где

$$X = \frac{2}{3} \sigma, \quad Y = \frac{2}{3} \tau \quad (2.2)$$



Фиг. 2

Компоненты дивергента тензора деформации  $\varepsilon'_{xx}$  и  $\varepsilon'_{xy}$ , соответствующие напряжениям  $\sigma$  и  $\tau$ , могут быть сопоставлены с перемещениями  $u$  и  $v$  концов двух пружин, прикрепленных под прямым углом к телу, лежащему на горизонтальной плоскости. Если силы  $X$  и  $Y$  подчиняются равенству (2.1), то сила трения погашается равнодействующей натяжений обеих пружин.

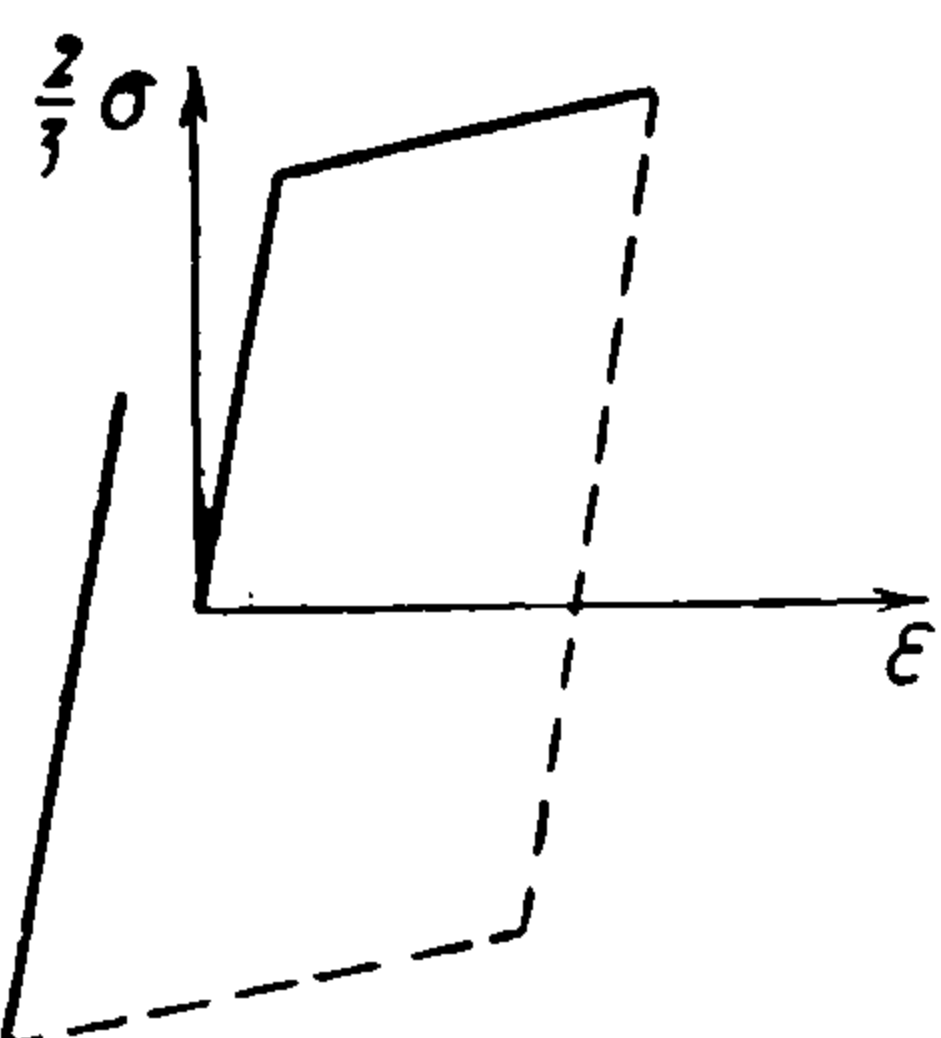
Пусть далее одна из сил (например,  $X$ ) получает! бесконечно малое приращение  $\Delta X$ , причем считается, что  $\Delta F > 0$ . Тогда тело начнет скользить по плоскости, однако не в направлении той силы, которая

возросла, а в направлении равнодействующей сил  $X$  и  $Y$ , поскольку только в этом последнем направлении сила трения уравновешена.

Таким образом, из изложенной выше механической аналогии вытекает, что тензор приращения пластической деформации должен быть соосен тензору напряжений (а не тензору их приращений), как это и принимается в теории течения.

При распространении данной аналогии на случай, когда материал обладает упрочнением, имеются три возможности:

а) считать, что упрочнение есть эффект необратимый и может быть интерпретировано как непрерывное возрастание силы трения в процессе активной деформации;



Фиг. 3

б) считать, что оно вызывается внутренними упругими силами, сопротивляющимися пластической деформации;

в) считать, что имеет место как упрочнение типа «а», так и упрочнение типа «б».

Если принять «а», то указанная выше механическая модель (при рассуждениях, аналогичных изложенным выше) приведет к представлению о равномерно расширяющейся во все стороны границе текучести и к соосности тензоров  $d\varepsilon_{ij}^p$  и  $\sigma_{ij}$ , т. е. приведет к гипотезам теории течения.

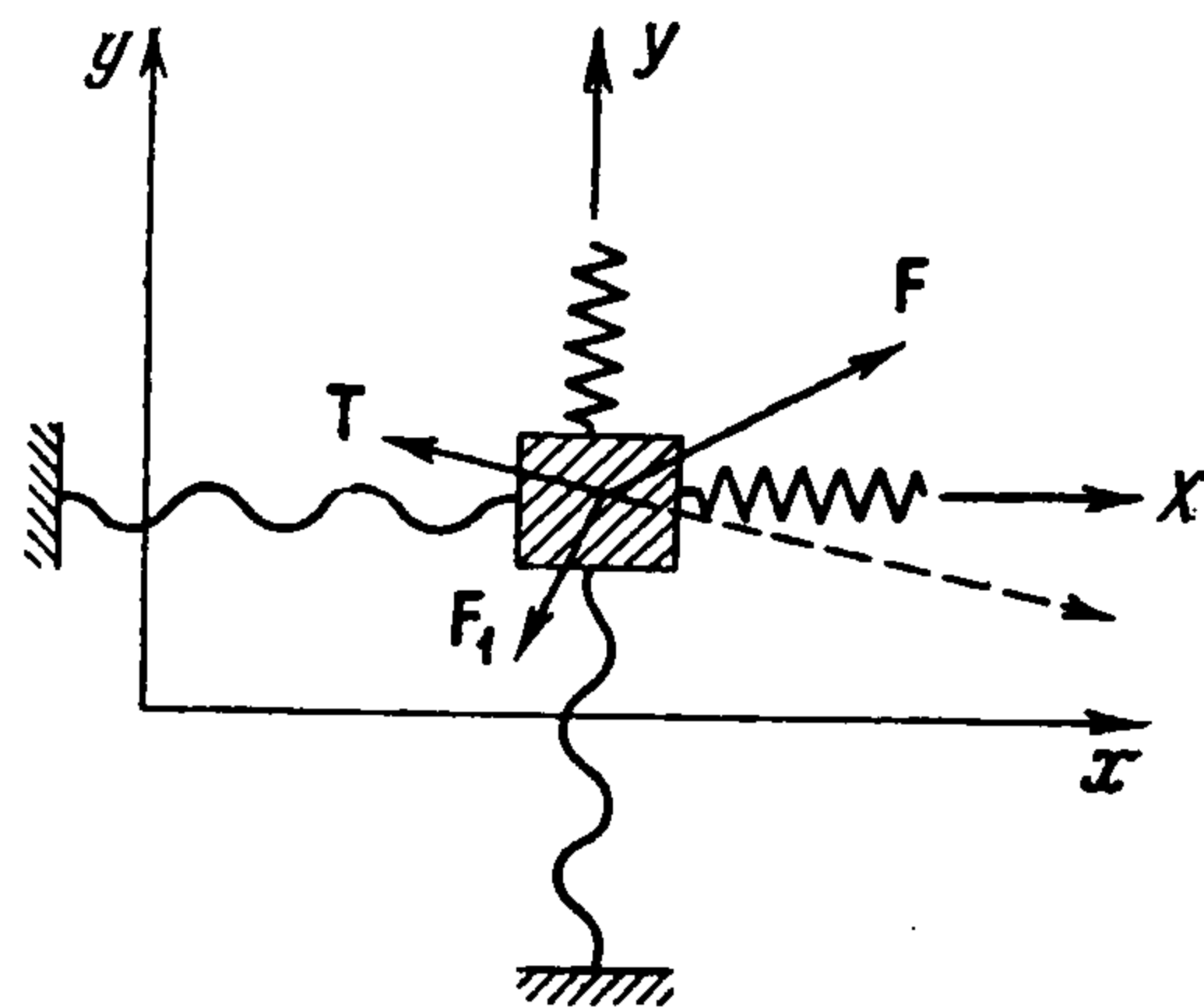
Если приписать эффект упрочнения упругим силам, то получится иная картина, представленная на фиг. 3.

Рассматривая, как и раньше, тело, находящееся на плоскости и нагруженное (через посредство двух взаимно-перпендикулярных пружин) силами  $X$  и  $Y$ , мы должны присоединить к телу в данном случае еще две пружины, противоположные предыдущим (фиг. 4). Условие уравнивания силы трения (уравнение границы текучести) при этом напишется следующим образом:

$$\sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} = \frac{2}{3} \sigma_T \quad (2.3)$$

где  $X_1$ ,  $Y_1$  — усилия в дополнительных пружинах.

Таким образом, в рассматриваемом случае граница текучести (на плоскости  $x = \frac{2}{3} \sigma$ ,  $y = 2/\sqrt{3} \tau$ ) есть круг постоянного радиуса  $\frac{2}{3} \sigma_T$  с центром в



Фиг. 4

$$X_1 = s_{xx} = s, \quad Y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} s_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} t$$

Если сообщить силе  $X$  бесконечно малое приращение  $\Delta X$  (такое, чтобы равнодействующая сил  $X$ ,  $Y$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$  превосходила силу трения), то тело начнет перемещаться к новому положению равновесия, причем вектор этого перемещения будет направлен не в сторону внешней силы  $F(x, y)$  и не в сторону ее приращения, а по направлению равнодействующей сил  $F(x, y)$  и  $F_1(x, y)$  (показанному на фиг. 4 пунктиром), по-

сколькx только в этом направлении сила трения является уравновешенной.

Нетрудно видеть, что описанной механической схеме в теории пластичности соответствуют уравнения (1.8), (1.9) и (1.10).

Действительно, равенство (1.8) утверждает, что граница текучести не изменяет при деформации ни формы, ни размеров, соотношение (1.9) — что тензоры  $d\varepsilon_{ij}^p$  и  $\sigma_{ij}' - s_{ij}$  подобны (а следовательно, и соосны), а формулы (1.10) — что  $\varepsilon_{ij}^p$  есть тензор упругих деформаций по отношению к напряжениям  $s_{ij}$ . Физический смысл этих последних величин состоит в том, что они являются теми скрытыми «внутренними» ([5], стр. 136—137) упругими микронапряжениями, которые возникают в теле при пластической деформации. После снятия нагрузки эти напряжения остаются (поскольку сами по себе они не могут преодолеть сил сухого трения, препятствующих пластическим сдвигам).

Можно рассмотреть и механическую схему, соответствующую случаю «в», когда упрочнение является эффектом, не полностью упругим. При этом условие уравновешивания силы сухого трения (в двухмерном случае) будет иметь вид:

$$\sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} = \rho \quad (2.4)$$

где  $X, Y, X_1, Y_1$  связаны с напряжениями  $\sigma, \tau, s, t$  так, как было указано выше. В (2.4)  $\rho$  — монотонно возрастающая при активной деформации инвариантная величина, ограниченная неравенствами

$$\frac{2}{3} \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} \geq \rho \geq \frac{2}{3} \sigma_T \quad (2.5)$$

При нижнем предельном значении  $\rho$  получаем границу текучести (2.3), соответствующую идеальному эффекту Баушингера, а при верхнем его предельном значении — равномерно расширяющуюся границу текучести с неподвижным центром (0.3).

Применив к случаю «в» те же рассуждения, что и ранее, приходим к выводу, что и в данном случае тензор приращения пластических деформаций должен быть соосен не тензору истинных напряжений  $\sigma_{ij}$ , а тензору активных напряжений  $\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij} - s_{ij}$ , причем  $s_{ij}$ , как и в случае «б», — упругие остаточные напряжения, характеризующие перемещение центра границы текучести.

Случаю «в» соответствует система формул (1.5), (1.10), причем функция  $f(T^o)$  характеризует в них пластическую часть упрочнения, а функция  $g(T_s)$  — его упругую часть.

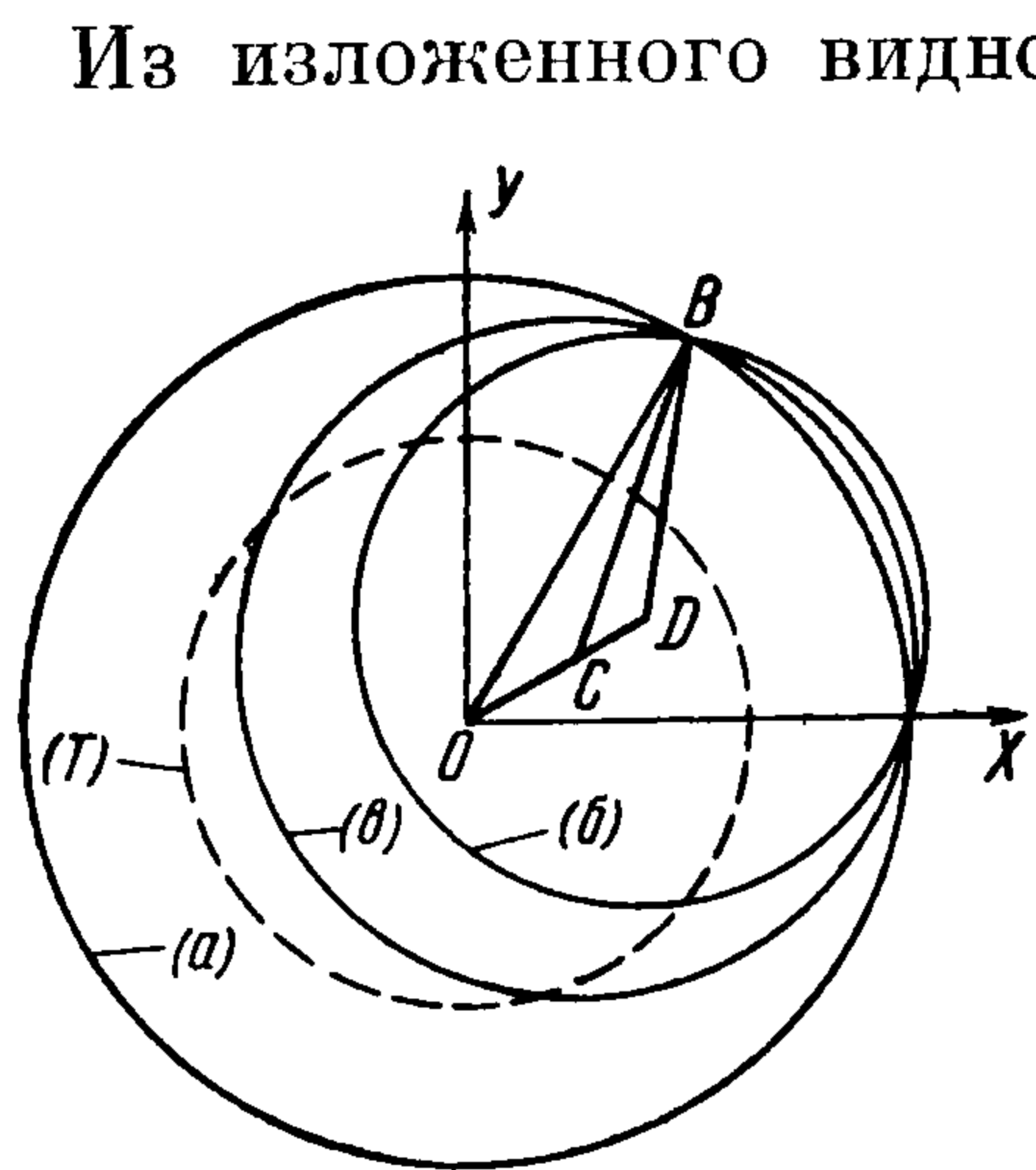
Для определения этих двух функций требуются опыты: на растяжение и на последующее обратное ему сжатие.

Пластические свойства реальных квазиизотропных тел ближе всего описываются схемой «в».

Следует при этом отметить, что материал, работающий по схеме «б», т. е. материал с идеальным эффектом Баушингера, по своим механическим свойствам, несомненно, ближе к действительности, чем материал, работающий по схеме «а».

Последнее видно из фиг. 5, где  $OB = F, OD = F_1, OC = F_2$ ,

круги  $a$  и  $b$  — граница текучести с неподвижным центром и граница, перемещающаяся, как твердое целое, круг  $c$  — граница, дающая эффект Баушингера примерно такой, какой бывает у реальных материалов, а круг  $\tau$  — начальная граница текучести. Ввиду этого случай идеального эффекта Баушингера, описываемый формулами (1.8), (1.9) и (1.10), представляет несомненный интерес и заслуживает изучения.



Фиг. 5

Из изложенного видно, почему в предлагаемой теории тензор приращения пластических деформаций был принят подобным именно тензору активных напряжений  $\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij} - s_{ij}$ , а не тензору  $\sigma_{ij}$ . Объяснено также, почему  $s_{ij}$  были выражены через пластические деформации по принципу упругой взаимосвязи. Становится понятен и термин «остаточные» напряжения, поскольку напряжения  $s_{ij}$  сохраняются в теле и после снятия внешней нагрузки, так как сами по себе они не могут преодолеть пластического сопротивления.

*Замечание 1.* В работе [6] было обращено внимание на противоречие, в которое можно впасть, проводя аналогию между сухим трением и сопротивлением пластическим деформациям, если при этом пытаться учесть влияние среднего нормального напряжения на пластический сдвиг. Однако современная теория пластичности указанным влиянием обычно пренебрегает. Так, в частности, поступили и мы. В дальнейшем (если это понадобится) не представит труда ввести в предлагаемую теорию соответствующее уточнение (перенести в нее известное представление о пластическом потенциале).

*Замечание 2.* Проводя выше аналогию с сухим трением, мы ограничились рассмотрением частного случая, когда отличны от нуля только два напряжения:  $\sigma_{xx} = \sigma$  и  $\sigma_{xy} = \tau$ . Аналогия, однако, может быть распространена и на самый общий случай, а именно, пластическое сопротивление квазиизотропного материала при произвольной картине нагружения может быть уподоблено сухому трению, действующему на тело, перемещающееся в пятимерном пространстве [7], где каждому девиатору приводится в соответствие некоторый вектор, а первоначальная граница текучести есть сфера с центром в начале координат; в двухмерном случае вышеуказанное пространство вырождается в евклидову плоскость и абстрактный образ гипертела, перемещающегося в пятимерном пространстве, превращается в тот совершенно наглядный образ, которым мы оперировали выше.

**§ 3. Интегрирование соотношений между напряжениями и деформациями для некоторых частных видов сложного нагружения.** В экспериментальных работах часто используются следующие пути нагружения.

(А). Тонкостенный круговой цилиндр, имеющий начальные напряжения  $\sigma_{11} = \sigma_0$ ,  $\sigma_{12} = \tau_0$  и начальные остаточные напряжения  $s_{11} = s_0$ ,  $s_{12} = t_0$ , подвергается затем дополнительному растяжению до  $\sigma_{11} = \sigma$  при постоянном  $\sigma_{12} = \tau = \tau_0$ .

(Б). Тот же случай, но цилиндр подвергается не дополнительному растяжению, а дополнительному кручению до напряжений  $\sigma_{12} = \tau$  (при  $\sigma_{11} = \sigma_0$ ).

(В). Тонкостенный круговой цилиндр, предварительно растянутый в пластической области до напряжений  $\sigma = \sigma_0$ , затем подвергается совме-

стному растяжению и кручению, причем напряжения изменяются, подчиняясь закону

$$\sigma - \sigma_0 = c \sqrt{3} \tau \quad (c = \text{const}) \quad (3.1)$$

Определим пластические деформации для этих трех случаев, полагая, что эффект Баушингера идеален, а упрочнение линейно. Во всех сформулированных выше задачах

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = \tau, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ s_{11} = s, \quad s_{22} = s_{33} = -\frac{1}{2}s, \quad s_{12} = t, \quad s_{23} = s_{13} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

в соответствии с чем условие (1.8) принимает вид:

$$\left(\frac{2}{3}\sigma - s\right)^2 + \frac{4}{3}(\tau - t)^2 = \frac{4}{9}\sigma_T^2 \quad (3.3)$$

а соотношения (1.9) и (1.10) приводятся к виду

$$d\varepsilon_{11}^p = \left(\frac{2}{3}\sigma - s\right) d\lambda, \quad d\varepsilon_{12}^p = (\tau - t) d\lambda \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{11}^p = \frac{1}{2g_0} s, \quad \varepsilon_{12}^p = \frac{1}{2g_0} t \quad (3.5)$$

где  $g_0$  (в силу предположения о линейности упрочнения) — постоянный коэффициент. Исключив  $\varepsilon_{ij}^p$  из (3.4) и (3.5), приходим к следующим соотношениям, связывающим истинные напряжения с остаточными:

$$ds = \left(\frac{2}{3}\sigma - s\right) d\lambda^*, \quad dt = (\tau - t) d\lambda^*, \quad \lambda^* = 2g_0\lambda \quad (3.6)$$

(А). Пусть  $\sigma = \sigma_0$ ,  $\tau = \tau_0$ ,  $s = s_0$ ,  $t = t_0$  при  $\lambda^* = 0$ , а дальнейший процесс нагружения сводится к возрастанию  $\sigma$  при постоянном  $\tau$ . Тогда из (3.6) следует, что

$$t = Ce^{-\lambda^*} + \tau_0 = (t_0 - \tau_0) e^{-\lambda^*} + \tau_0 \quad (3.7)$$

После этого на основании (3.7) и (3.3) получаем

$$\frac{2}{3}\sigma - s = \frac{2}{3}\sigma_T \sqrt{1 - k^2 e^{-2\lambda^*}}, \quad k = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_T} (\tau_0 - t_0) \quad (3.8)$$

Подставив (3.8) в правую часть первого равенства (3.6) и выполнив затем интегрирование, с учетом начальных условий и соотношения, которое между ними должно иметь место ввиду (3.3), будем иметь

$$s = s_0 - \frac{2}{3}\sigma_T (x - x_0) + \frac{1}{3}\sigma_T \ln \left( \frac{1+x}{1+x_0} \frac{1-x_0}{1-x} \right) \quad (3.9)$$

причем

$$x = \sqrt{1 - k^2 e^{-2\lambda^*}}, \quad x_0 = \frac{\sigma_0 - 3/2 s_0}{\sigma_T} \quad (3.10)$$

Формулы (3.7) и (3.9) можно привести к виду

$$s = \frac{2}{3} [\sigma - \sigma_T \text{th } u], \quad t = \tau_0 - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{1}{\text{ch } u} \quad (3.11)$$

Здесь

$$u = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_T} + \alpha_0, \quad \text{th } \alpha_0 = x_0 \quad (3.12)$$

(Б). Данный случай отличается от предыдущего только тем, что в процессе нагружения изменяется не  $\sigma$ , а  $\tau$  (при  $\sigma = \sigma_0$ ). Соотношения

(3.6) интегрируются совершенно аналогично случаю (А), причем получаются следующие окончательные формулы:

$$S = \frac{2}{3} \left( \sigma_0 - \frac{\sigma_T}{\operatorname{ch} V} \right), \quad t = \tau - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \operatorname{th} V \quad (3.13)$$

в которых

$$V = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_T} (\tau - \tau_0) + \beta_0, \quad \operatorname{th} \beta_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_T} (\tau_0 - t_0) \quad (3.14)$$

(В). Для рассмотрения этой задачи введем новую переменную  $\varphi$  определив ее равенствами

$$\frac{2}{3} \sigma - s = \frac{2}{3} \sigma_T \cos \varphi, \quad \tau - t = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \sin \varphi \quad (3.15)$$

При этом соотношение (3.3) оказывается тождественно удовлетворенным. Выразив  $s$  и  $t$  на основании (3.15) и подставив в соотношения (3.6), получаем

$$d\sigma + \sigma_T \sin \varphi d\varphi = \sigma_T \cos \varphi d\lambda^* \quad (3.16)$$

$$d\tau - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \sin \varphi d\lambda^* \quad (3.17)$$

Отсюда

$$\sqrt{3} \cos \varphi d\tau - \sin \varphi d\sigma = \sigma_T d\varphi \quad (3.18)$$

В случае (В) между  $\sigma$  и  $\tau$  в процессе нагружения существует зависимость (3.1), т. е.

$$d\sigma = \sqrt{3} c d\tau \quad (3.19)$$

Подставив ее в (3.18), получаем

$$d\tau = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - c \sin \varphi} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{d\Psi}{\cos \Psi} \cos \gamma_0 \quad (3.20)$$

где

$$\Psi = \varphi + \gamma_0, \quad \operatorname{tg} \gamma_0 = c \quad (3.21)$$

Проинтегрировав (3.20), получаем

$$\tau = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \cos \gamma_0 \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \Psi}{1 - \sin \Psi} \frac{1 - \sin \gamma_0}{1 + \sin \gamma_0}}$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_T \sin \gamma_0 \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \Psi}{1 - \sin \Psi} \frac{1 - \sin \gamma_0}{1 + \sin \gamma_0}} \quad (3.22)$$

После этого, используя (3.15), можно написать и выражения для остаточных напряжений:

$$s = \frac{2}{3} \left\{ \sigma_0 - \sigma_T \cos \varphi + \sigma_T \sin \gamma_0 \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \Psi}{1 - \sin \Psi} \frac{1 - \sin \gamma_0}{1 + \sin \gamma_0}} \right\}$$

$$t = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left\{ -\sin \varphi + \cos \gamma_0 \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \Psi}{1 - \sin \Psi} \frac{1 - \sin \gamma_0}{1 + \sin \gamma_0}} \right\} \quad (3.23)$$

Выразив далее на основании (3.22)  $\varphi$  через  $\tau$  и подставив в (3.23), приходим к следующим окончательным формулам:

$$s = \frac{2}{3} \left\{ \sigma - \sigma_T \left[ \operatorname{th} V_0 \operatorname{th} \tau^* + \frac{1}{\operatorname{ch} V_0 \operatorname{ch} \tau^*} \right] \right\} \quad (3.24)$$

$$t = \tau - \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{sh} \tau^* - \operatorname{sh} V_0}{\operatorname{ch} V_0 \operatorname{ch} \tau^*}$$

где

$$\tau^* = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_T \cos \gamma_0} + V_0, \quad \text{th } V_0 = \sin \gamma_0 \quad (3.25)$$

Рассмотренные выше задачи могут быть решены и в том более общем случае, когда упрочнение линейно, а эффект Баушингера не идеален. За недостатком места не будем на этом останавливаться, отметив лишь, что исходные соотношения в данном случае имеют вид:

$$ds = g_0 \frac{2/3 \sigma - s}{T^0} dT^0, \quad dt = g_0 \frac{\tau - t}{T^0} dT^0 \quad \left(g_0 = \frac{G_2}{G_1}\right) \quad (3.26)$$

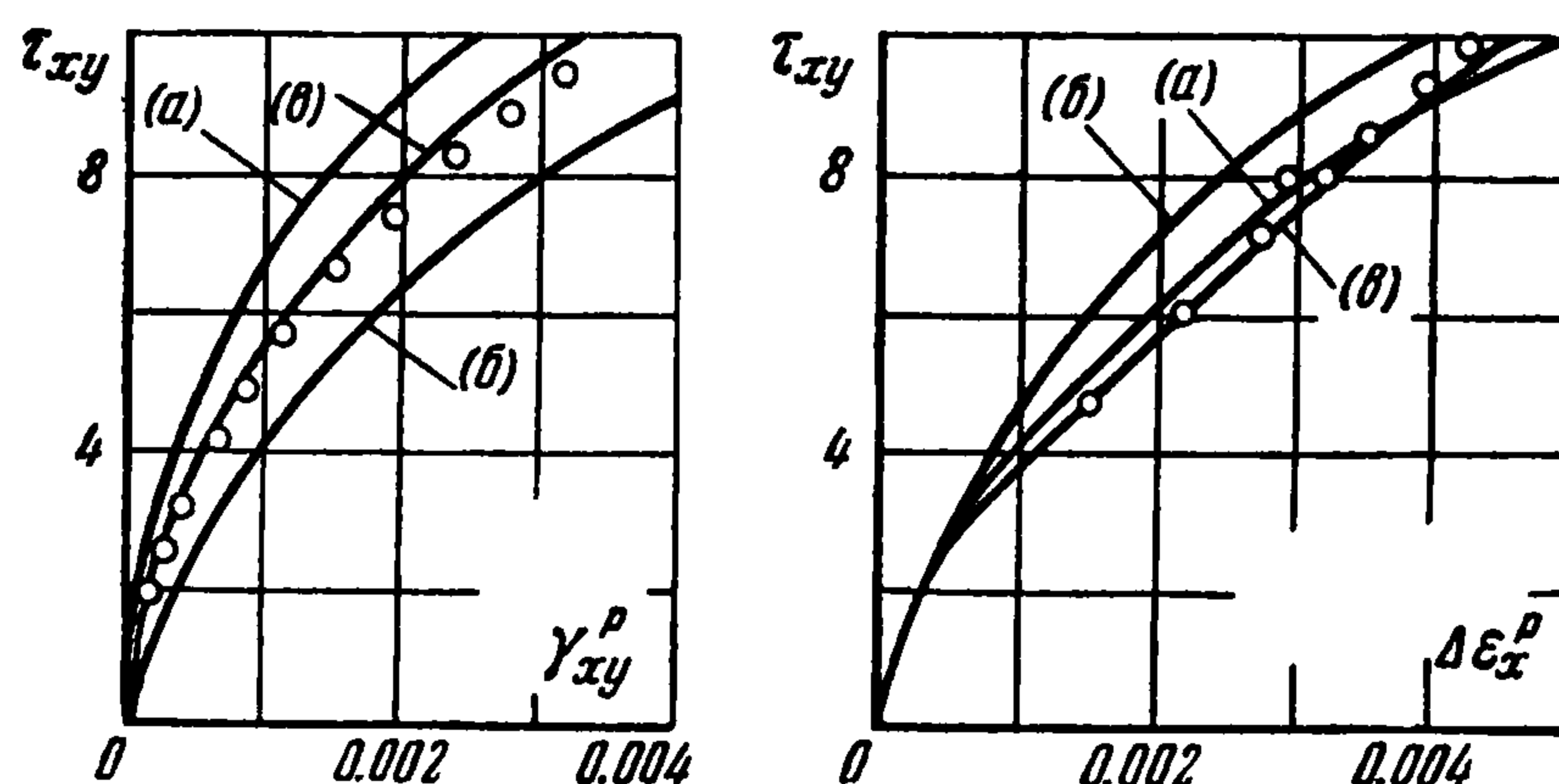
где  $G_2$ ,  $G_1$  — модули упругого и пластического упрочнения (соответственно). После определения  $s$  и  $t$  пластические деформации находятся по формулам

$$\varepsilon_{11}^p = \frac{1}{2G_2} s, \quad \varepsilon_{12}^p = \frac{1}{2G_2} t \quad (3.27)$$

**§ 4. Сопоставление теории с экспериментами.** Экспериментальных работ в области сложного нагружения очень много. Основные выводы из них могут быть вкратце сформулированы следующим образом.

1. Результаты опытов, как правило, лежат между результатами вычислений по теории течения и по теории малых пластических деформаций.

2. Экспериментальные кривые в общем более близки к теории течения, нежели к теории малых пластических деформаций. Эта последняя



Фиг. 6

теория дает особенно плохое совпадение с опытом, если в процессе нагружения резко меняется вид напряженного состояния. Однако для относительно плавных путей нагружения экспериментальные кривые иногда оказываются примерно одинаково близкими и к теории течения и к теории малых пластических деформаций.

3. Имеются опыты [8], данные которых находятся в противоречии с предположением, что тензор приращения пластических деформаций соосен тензору напряжений  $\sigma_{ij}$ .

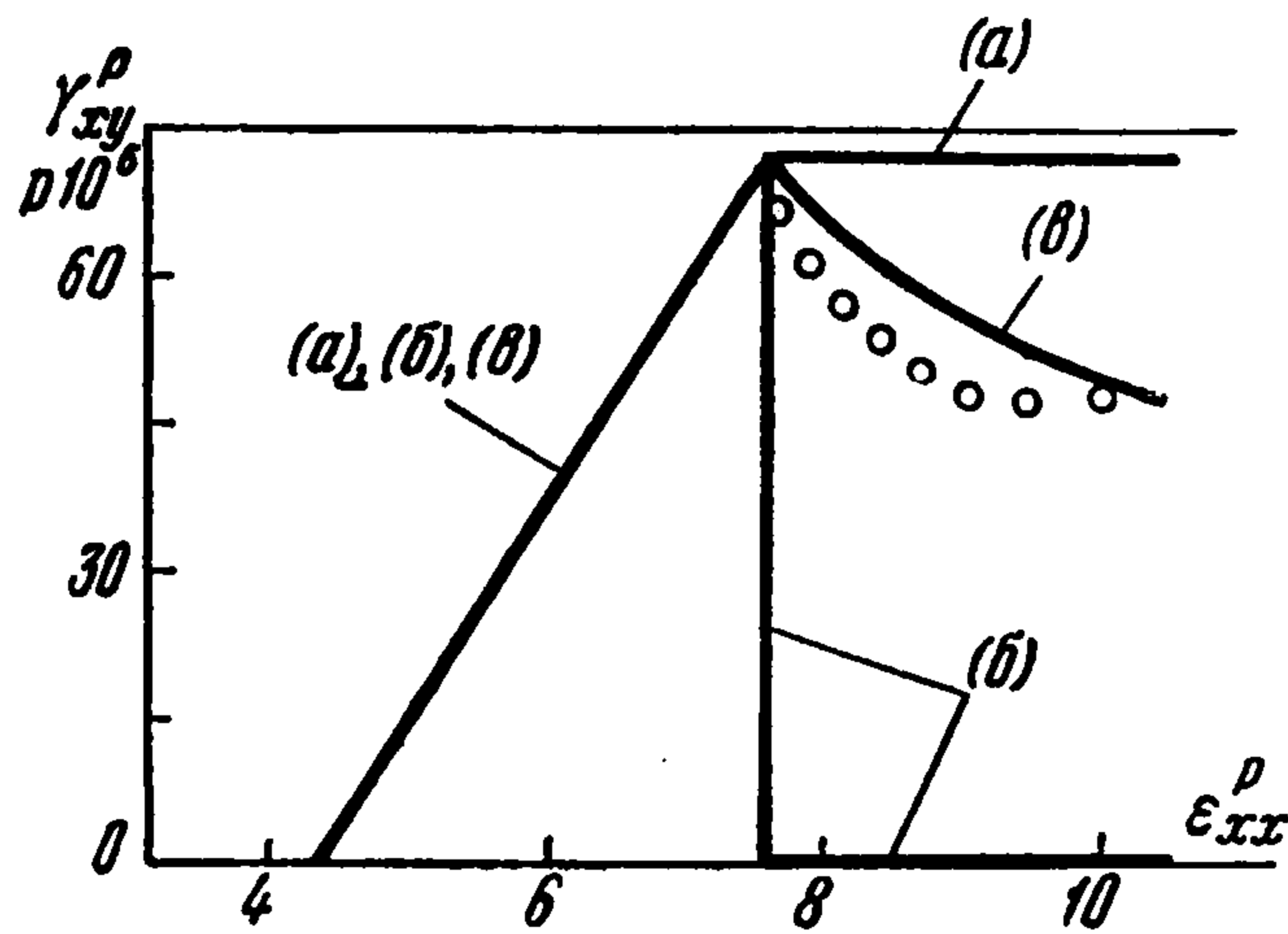
При сравнении предлагаемой теории с экспериментом мы будем пользоваться работами [8, 9], результаты которых представляются достаточно типичными.

На фиг. 6 показаны кривые деформаций  $\varepsilon_x^p$ ,  $\varepsilon_{xy}^p$ , получающиеся при сложном нагружении, состоящем из двух этапов: 1) сжатие до напря-

жения  $\sigma_{xx} = -\sigma_0$ ; 2) совместное действие сжатия и сдвига, изменяющихся в отношении

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d\tau_{xy}} = 0.052$$

При этом кривая *a* соответствует теории течения, кривая *b* — теории малых пластических деформаций, кривая *c* — предлагаемой теории (причем эффект Баушингера считается идеальным, а упрочнение линейным). На том же графике приведены (в виде отдельных точек) и экспериментальные данные, заимствованные из работы [9] (стр. 510). Как



Фиг. 7

видно, предлагаемая теория дает результаты, более близкие к опыту, чем теория течения и теория малых пластических деформаций. Примерно то же получается и при сопоставлении трех рассматриваемых теорий с экспериментальными данными работы [9], полученными при других путях нагружения.

В [8] путь нагружения состоял из последовательно чередующихся этапов: 1) растяжение трубы при постоянном крутящем моменте; 2) растяжение без кручения и т. д. При этом автор работы [8] отмечает, что второй этап сопровождался пластическим раскручиванием образца, что стоит в явном противоречии с теорией течения. Этот результат можно объяснить только ценой отказа от допущения, что тензор напряжения и тензор приращений пластических деформаций соосны. На фиг. 7 экспериментальные данные работы [8] (по первым двум этапам нагружения) сравниваются с теорией течения *a*, с теорией малых пластических деформаций *b* и с предлагаемой теорией *c* (причем, как и выше, эффект Баушингера принимался идеальным, а упрочнение линейным).

Как видно, теория и в данном случае удовлетворительно совпадает с опытом, причем она предугадывает то раскручивание образцов, которое удивило автора работы [8].

При построении изложенной выше теории пластичности, учитывающей перемещение центра границы текучести, пришлось ввести понятия остаточных микронапряжений и активных напряжений. Первое из них, будучи новым в теории пластичности, отнюдь не ново для металловедения. В уже цитированной книге Н. Н. Давиденкова [5] на эти напряжения возлагается ответственность за эффект Баушингера, причем они считаются упругими. В книге [10] (стр. 207, 210) также говорится об остаточных микронапряжениях в металле, подвергнутом пластической деформации. Таким образом, существование остаточных микронапряжений и основные их свойства металловедам хорошо известны. Однако до сих пор эти напряжения не были включены в математическое описание картины пластических деформаций. Предлагаемая работа восполняет данный пробел и показывает, что учет остаточных напряжений позволяет объяснить такие

факты, как эффект Баушингера, эффект несовпадения главных направлений приращений пластических деформаций с главными направлениями напряжений, отмеченный в работе [8], и, наконец, тот факт, что экспериментальные кривые обыкновенно проходят между кривыми, следующими из теории течения и теории малых пластических деформаций.

Поступила 5 X 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. B a t d o r f S., B u d i a n s k y B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. Naca T. N., 1871, 1949.
2. L i n T. N. A proposed theory of plasticity based on slips. Proc. of the second USA Congr. of appl. mech., 1954 (Имеется перевод, Сб. переводов, Механика, № 3, 1956).
3. S a n d e r s I. L. Plasticstress-strain relation based on linear loading functions. Proc. of the second USA Congr. of appl. mech., 1954 (Имеется перевод. Механика, № 3, 1956).
4. E d e l m a n F., D r u c k e r D. C. Some Extension of elementary plasticity theory. Journ. of the Franklin inst., vol. 251, June, 1951.
5. Д а в и д е н к о в Н. Н. Механическое испытание металлов. Л., 1930.
6. D r u c k e r D. C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quart. of appl., math. vol. VII, № 4, 1950.
7. И л ь ю ш и н А. А. О связи между напряжениями и деформациями в механике сплошных сред. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.
8. F e i g e n M. Inelastic behavior under tension and torsion. Proc. of the second USA Congr. of appl. mech., 1954 (Имеется перевод. Механика, № 3, 1956).
9. B u d i a n s k y B., D a w N., P e t e r s R., S h e p h e r d R. Experimental studies of polyaxial stress-Strain laws of plasticity. Proc. of the First U. S. Nat. Congr. of appl. mech., 1951.
10. O s g o o d. Residual stresses in metals and metal construction. New York, 1954. (Имеется русский перевод 1957 г.).
11. И ш л и н с к и й А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Украинский математический журнал, № 3, 1954.