Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ДЕФОРМАЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ

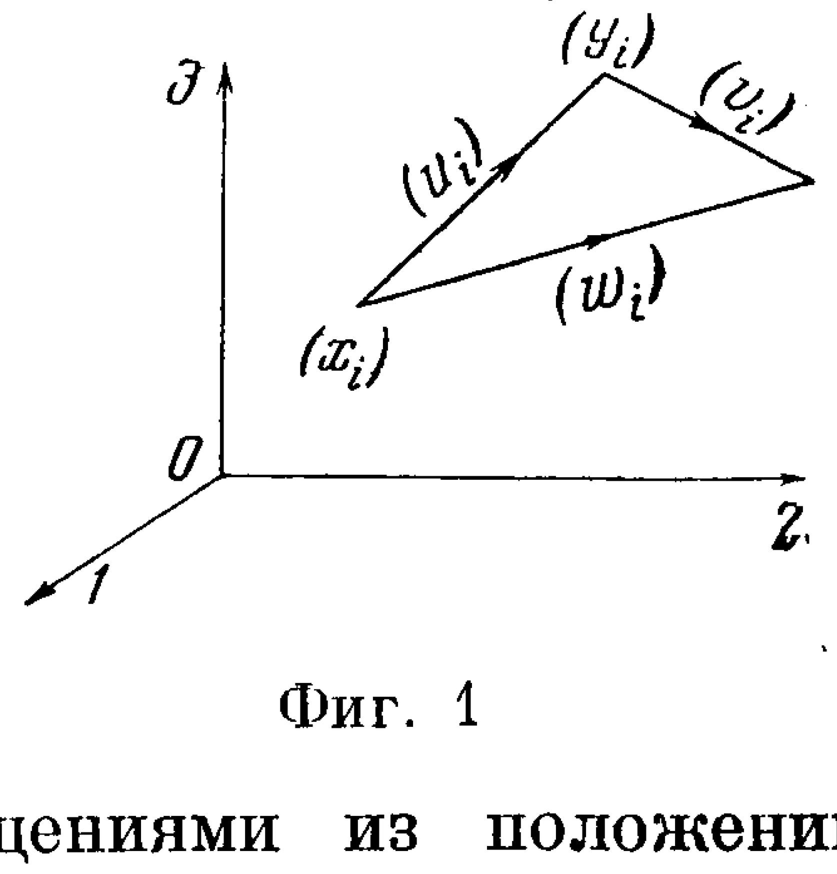
Б. А. Берг

(Ленинград)

Под деформационной анизотропией в этой работе понимается анизотропия, возникающая в теле вследствие его упругой деформации. Рассматривая вопрос о напряженном состоянии тела, подвергающегося из «естественного» состояния двум последовательным упругим деформациям. Показывается, что если первая деформация является однородной и отличной от равномерного всестороннего растяжения или сжатия, то при наложении на нее второй деформации тело деформируется вообще как ортотропное, главные направления упругости которого совпадают с главными осями однородной деформации и упругие постоянные которого могут быть выражены через упругие постоянные первоначально изотропного тела и его главные удлинения при первой деформации. Это открывает возможность при решении поставленного вопроса пользоваться теорией упругости анизотропных тел. В качестве приложений приводятся наложение кручения на растянутый стержень и наложение изгиба на пластинку после ее растяжения и после сдвига.

§ 1. Обозначения. Деформируемое тело как до деформации, так и после нее относится к трем неподвижным взаимно-перпендикулярным осям *1*, *2*, *3*. Координаты любой точки тела до первой деформации (в «естественном» состоянии) обозначаются x_i (здесь и далее $i = 1, 2, 3$). Координаты той же точки после первой деформации (в «начальном» состоянии, так как оно является таковым для второй деформации) обозначаются y_i. Первая деформация характеризуется перемещениями u_i, так что $y_i = x_i + u_i$ (фиг. 1). Компоненты первой деформации определяются по формулам [1,2]

$$e_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_r \frac{\partial u_r}{\partial x_i}\frac{\partial u_r}{\partial x_k} \qquad (i,\ k,\ r = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Вторая деформация характеризуется перемещениями из положений точек тела после первой деформации. Компоненты второй деформации определяются по формулам

$$f_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} + \sum_r \frac{\partial v_r}{\partial y_i}\frac{\partial v_r}{\partial y_k} \qquad (i,\ k,\ r = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.2}$$

Вся деформация, т. е. получающаяся в результате первой и второй деформаций, характеризуется перемещениями $w_i = u_i + v_i$ точек тела из их положений в естественном состоянии.

Компоненты всей деформации определяются по формулам

$$g_{ik} = \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \sum_r \frac{\partial w_r}{\partial x_i}\frac{\partial w_r}{\partial x} \qquad (i,\ k,\ r = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.3}$$

Компоненты напряжения после двух деформаций $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sigma_{ij}''$.

Здесь σ_{ij}' обозначают напряжения, соответствующие перемещениям u_i. Эти напряжения называются «начальными», так как они являются таковыми для второй деформации; σ_{ij}'' обозначают напряжения, соответствующие перемещениям v_i. Эти напряжения называются «вторичными».

§ 2. Первая деформация. Первая деформация предполагается однородной и чистой. В общем ее случае перемещения точки тела будут $u_1 = \alpha_1 x_1$, $u_2 = \alpha_2 x_2$, $u_3 = \alpha_3 x_3$, если оси координат *1*, *2*, *3* (см. § 1) направить параллельно главным осям деформации. Постоянные $\alpha_i = \partial u_i / \partial x_i$ являются главными удлинениями. Координаты точки после деформации и главные компоненты деформации будут соответственно

$$\begin{aligned} y_1 &= (1+\alpha_1)\,x_1, & y_2 &= (1+\alpha_2)\,x_2, & y_3 &= (1+\alpha_3)\,x_3 \\ e_1 &= 2\alpha_1 + \alpha_1^2, & e_2 &= 2\alpha_2 + \alpha_2^2, & e_3 &= 2\alpha_3 + \alpha_3^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Сохранение в последних выражениях квадратичных членов показывает, что первая деформация не предполагается, как в линейной теории упругости, малой или что по тем или иным соображениям требуется учесть эффекты второго порядка при этой деформации.

Инварианты деформации определяются по формулам

$$J_n = e_1^n + e_2^n + e_3^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.2}$$

получающимся из выражений

$$\begin{aligned} J_1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33}, \qquad J_2 = e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{31}^2 + 2e_{12}^2 \\ J_3 &= e_{11}^3 + e_{22}^3 + e_{33}^3 + 3e_{11}(e_{12}^2 + e_{31}^2) + 3e_{22}(e_{12}^2 + e_{23}^2) + \\ &\quad + 3e_{33}(e_{31}^2 + e_{23}^2) + 6e_{23}e_{31}e_{12} \end{aligned} \tag{2.3}$$

полагая в них компоненты деформации с различными индексами, равными нулю, и обозначая e_{ii} через e_i.

В линейной теории упругости главные напряжения, упругий потенциал Φ (плотность потенциальной энергии деформации, отнесенная к единице объема тела до деформации) и связь между ними имеют вид:

$$\sigma = \lambda\theta + 2\mu\alpha_i, \qquad \Phi = \frac{\lambda}{8} J_1^2 + \frac{\mu}{4} J_2, \qquad \sigma_i = 2\frac{\partial\Phi}{\partial e_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_i} \tag{2.4}$$

где $\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ и инварианты деформации берутся по (2.2), причем компоненты деформации (2.1) входят в них без квадратичных членов.

Сохраняя эти квадратичные члены, будем определять главные напряжения, соответствующие перемещениям $u_i = \alpha_i x_i$, т. е. начальные напряжения (см. § 1), относя напряжения σ_i' к единице площади деформированного тела, по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= (\lambda\theta + 2\mu\alpha_1) / [(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)] = (\lambda\theta + 2\mu)(1 - \alpha_2 - \alpha_3) \\ \sigma_2' &= (\lambda\theta + 2\mu\alpha_2)(1 - \alpha_3 - \alpha_1), \qquad \sigma_3' = (\lambda\theta + 2\mu\alpha_3)(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

с точностью до квадратов главных удлинений включительно. В отличие от (2.4) связь между главными напряжениями и упругим потенциалом Φ_1, отнесенным к единице объема тела до деформации, выражается в нелинейной теории упругости формулами [1]

$$\sigma_i' = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right)^2 2\,\frac{\partial \Phi_1}{\partial e_i} \tag{2.6}$$

где $\Delta = D(y_1, y_2, y_3) / D(x_1, x_2, x_3)$ — отношение объемов элемента тела после и до деформации, а y_i дается в рассматриваемом случае формулами (2.1). Сравнивая (2.6) и (2.4), заметив при этом, что в силу (2.1) $\partial / \partial\alpha_1 = 2(1+\alpha_i)\,\partial / \partial e_i$, найдем

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_1} = \lambda\theta + 2\mu\alpha_1, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_2} = \lambda\theta + 2\mu\alpha_2, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha_3} = \lambda\theta + 2\mu\alpha_3 \tag{2.7}$$

интегрируя которые, получим выражение упругого потенциала первой деформации через главные удлинения:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \lambda(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \tag{2.8}$$

Чтобы найти выражение этого потенциала через инварианты первой деформации, разложим получающееся из (2.1) выражение $\alpha_i = \sqrt{1+e_i} - 1$ в ряд по степеням e_i, сходящийся при $|e_i| < 1$. Ограничиваясь двумя первыми членами этого ряда, т. е. полагая

$$\alpha_i = \frac{1}{2}e_i - \frac{1}{8}e_i^2 \tag{2.9}$$

и ставя это выражение в (2.8), получим

$$\Phi_1 = \frac{\lambda}{8}J_1^2 + \frac{\mu}{4}J_2 - \frac{\lambda}{16}J_1J_2 - \frac{\mu}{8}J_3 \tag{2.10}$$

Здесь инварианты деформации берутся по (2.2) и входящие в них главные компоненты деформации по (2.1). В силу условия $|e_i| < 1$ из (2.9) следует, что упругий потенциал (2.10) и соответствующие ему формулы (2.5) применимы к таким деформациям изотропных тел, при которых главные удлинения $\alpha_i < 0.375$.

Упругий потенциал (2.10) может быть сопоставлен с упругим потенциалом «пятиконстантной» теории, развитой Мурнаганом [3,4]:

$$\Phi' = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\rm I} - 2\mu\varepsilon_{\rm II} + l\varepsilon_{\rm I}^3 + m\varepsilon_{\rm I}\varepsilon_{\rm II} + n\varepsilon_{\rm III} \tag{2.11}$$

Здесь l, m, n — новые (сверх λ, μ) упругие постоянные, которые должны быть определены из опытов или теоретических соображений. Упругий потенциал (2.11) написан в эйлеровых переменных, т. е. за независимые переменные взяты координаты y точек тела после деформации в отличие от формул (1.1). Инварианты деформации $\varepsilon_{\rm I}, \varepsilon_{\rm II}, \varepsilon_{\rm III}$ также взяты в форме, отличной от принятой нами (2.3). Можно показать, что написанный в лагранжевых переменных (независимые переменные — координаты x_i точек тела до деформации) и при инвариантах в форме (2.3) упругий потенциал (2.11) будет иметь вид:

$$\Phi' = \frac{\lambda}{8}J_1^2 + \frac{\mu}{4}J_2 - \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{m}{16} + \frac{n}{16}\right)J_1J_2 + \left(\frac{l}{8} + \frac{m}{16} + \frac{n}{48}\right)J_1^3 + \left(\frac{n}{24} - \frac{\mu}{2}\right)J_3 \tag{2.12}$$

Сравнивая это выражение с (2.10), находим, что

$$l = {}^3/_2\lambda + 3\mu, \quad m = -(3\lambda + 9\mu), \quad n = 9\mu \tag{2.13}$$

Следовательно, при таких значениях упругих постоянных упругий потенциал пятиконстантной теории совпадает с нашим. Интересно отметить, что в своей работе Н. В. Зволинский и П. М. Риз [5], исходя из других соображений, приводят значения упругих постоянных пятиконстантной теории, которые совпадают с (2.13).

§ 3. Наложение деформаций. Пусть на первую упругую деформацию накладывается вторая, также упругая. Обозначая, согласно § 1, через f_{ik}, g_{ik} соответственно компоненты второй и всей деформации, найдем по (1.3) компоненты, принимая во внимание (1.1), (1.2) и (2.1)

$$g_{ii} = 2\alpha_i + \alpha_i^2 + (1+\alpha_i)^2 f_{ii}, \qquad g_{ik} = (1+\alpha_i)(1+\alpha_k) f_{ik} \tag{3.1}$$

$(i \neq k)$

Подставив в (2.10), вместо входящих туда инвариантов первой деформации инварианты всей деформации, получаемые по (2.3) с заменой e_{ik} на g_{ik}, и разделив результат на $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)$, получим отнесенный к начальному состоянию упругий потенциал всей деформации

$$\Phi = \Phi_1^* + \Phi_{12} + \Phi_2 \tag{3.2}$$

где

$$\Phi_1^* = \frac{1}{[(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)]}\left[\frac{\lambda}{8}J_1'^2 + \frac{\mu}{4}I_2' - \frac{\lambda}{16}J_2'J_2' - \frac{\mu}{8}J_3'\right] \text{ и}$$

инварианты первой деформации отмечены штрихами,

$$\Phi_{12} = K_1 f_{11} + K_2 f_{22} + K_3 f_{33}$$

$$\Phi_2 = L_1 f_{11}^2 + L_2 f_{22}^2 + L_3 f_{33}^2 + M_1 f_{22} f_{33} + M_2 f_{33} f_{11} + M_3 f_{11} f_{22} + \\ + N_1 f_{23}^2 + N_2 f_{31} + N_3 f_{12}^2$$

$$K_1 = \frac{1+\alpha_1}{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}\left[\frac{\lambda}{4}J_1' + \frac{\mu}{2}e_1 + \frac{\lambda}{16}(J_2' + 2J_1'e_1) + \frac{3}{8}\mu e_1^2\right]$$

$$L_1 = \frac{(1+\alpha_1)^3}{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}\left[\frac{\lambda+2\mu}{8} - \frac{\lambda}{16}J_1' - \frac{\lambda+3\mu}{8}e_1\right]$$

$$M_1 = \frac{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}{1+\alpha_1}\left[\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{8}(e_2+e_3)\right]$$

$$N_1 = \frac{(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)}{1+\alpha_1}\left[\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{8}J_1' - \frac{3}{8}\mu(e_2+e_3)\right]$$

K_2, K_3; L_2, L_3; M_2, M_3; N_2, N_3 получаются соответственно из K_1, L_1, M_1, N_1 круговой перестановкой индексов у α и e.

Для упрощения выкладок мы отбрасывали члены выше второй степени относительно f, т. е. считали вторую деформацию малой, поэтому f в (3.2) должны быть взяты по (1.2) без квадратичных членов. Φ_1^* есть упругий потенциал первой деформации, отнесенный, как и другие слагаемые в (3.2), к единице объема тела в начальном состоянии. Φ_{12} выражает, как можно показать, «удельную» работу во время второй деформации начальных напряжений. Φ_2, выражающее упругий потенциал второй деформации, является упругим потенциалом ортотропного тела [6], главные направления упругости которого совпадают с главными осями первой деформации. Это показывает, что при наложении второй деформации тело деформируется как ортотропное, т. е. что в результате первой деформации оно становится ортотропным. Поэтому напряжения, обусловленные перемещениями v_i второй деформации, т. е. вторичные напряжения, могут быть взяты из соответствующих решений теории упругости анизотропных тел. Нашей задачей будет найти выражения упругих постоянных этого ортотропного тела.

Замечание 1. Если бы первая деформация не была однородной и чистой, то после нее тело стало бы ортотропным в каждой своей точке (т. е. в ее бесконечно малой окрестности), но главные направления упругости и упругие постоянные в разных точках тела были бы вообще различны Главные удлинения α_i были бы функциями координат точек тела, и перемещения $u_i = \alpha_i x_i$ определяли бы деформацию в точке (x_i) только с точностью до поворота вокруг этой точки ее окрестности.

Замечание 2. Утверждение, что Φ_2 является упругим потенциалом второй деформации, требует пояснения. Во время второй деформации, кроме сил, ее производящих, продолжают действовать силы, вызвавшие первую деформацию (мы будем называть их постоянно действующими). Поэтому к плотности энергии деформации — упругому потенциалу Φ (3.2) — должна быть добавлена плотность Ψ потенциальной энергии, соответствующей этим силам (т. е. энергии механической системы, вызвавшей первую деформацию), и вторичные напряжения выразятся через производные по компонентам f второй деформации от суммы $\Phi + \Psi$. Можно, однако, показать, что

$$\frac{\partial(\Phi + \Psi)}{\partial f_{ik}} = \frac{\partial(\Phi_1{}^* + \Phi_{12} + \Phi_2 + \Psi)}{\partial f_{ik}} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{ik}} \tag{3.3}$$

Поэтому Φ_2 и названо упругим потенциалом второй деформации. Действительно, как уже указывалось, Φ_{12} представляет удельную работу во время второй деформации начальных напряжений. Так как эта работа равна удельной работе постоянно действующих сил во время той же деформации, то соответствующая последним плотность потенциальной энергии Ψ уменьшается, если эта работа положительна, и увеличивается, если она отрицательна. Считая Ψ в начальном состоянии равным нулю (что не нарушает общности), получим $\Psi = -\Phi_{12}$, откуда и вытекает равенство (3.3). Отсутствие в сумме $\Phi + \Psi$ вследствие $\Psi = -\Phi_{12}$ членов первой степени относительно f выражает устойчивость начального состояния тела относительно деформации.

Если вторая деформация не является малой, то $\Psi \neq -\Phi_{12}$. Не имея возможности входить в подробности, заметим только, что в этом случае можно разложить Ψ в ряд по степеням компонент f второй деформации. Тогда в сумме $\Phi + \Psi$ по условию устойчивости начального состояния Φ_{12} сократится с членами первой степени относительно f, входящими в Ψ, и к Φ_2 добавятся слагаемые с высшими степенями f. Кроме того, добавочные к Φ_2 слагаемые получатся и в (3.2), так так теперь нельзя брать f по (1.2) без квадратичных членов, как это делалось при выводе (3.2).

Замечание 3. Впервые вопрос о характере анизотропии, возникающей вследствие упругой деформации, рассматривался, по-видимому, Фойгтом[13]. Он пришел к выводу, что после большой деформации (на которую накладывается затем малая) тело приобретает упругую симметрию ромбического кристалла, если первая деформация однородна, и гексогонального кристалла, если она является одноосным растяжением. Однако, пользуясь предложенным им пятиконстантным упругим потенциалом, Фойгт берет компоненты деформации, которую он считает не малой, без квадратичных членов, и зависимость между упругим потенциалом и напряжениями принимает такой же, как и в линейной теории упругости. Выше мы пришли другим путем к результату, качественно эквивалентному выводу Фойгта, если принять во внимание, что упругий потенциал и обобщенный закон Гука для ромбического и гексагонального кристаллов имеют тот же вид, что и, соответственно, для ортотропного и трансверсально-изотропного тела.

§ 4. Упругие постоянные ортотропные тела. Входящие в закон Гука для ортотропного тела

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \tfrac{1}{2}(A_{11}f_{11} + A_{12}f_{22} + A_{13}f_{33}), & \sigma_{23} &= A_{44}f_{23} \\
\sigma_{22} &= \tfrac{1}{2}(A_{12}f_{11} + A_{22}f_{22} + A_{23}f_{33}), & \sigma_{31} &= A_{55}f_{31} \\
\sigma_{33} &= \tfrac{1}{2}(A_{13}f_{11} + A_{23}f_{22} + A_{33}f_{33}), & \sigma_{12} &= A_{66}f_{12}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

«модули упругости» A_{ik} выражаются через «компоненты деформации» a_{ik}

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2}{\Delta}, & A_{23} = A_{32} &= \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{13}}{\Delta}, & A_{44} &= \frac{1}{a_{44}} \\
A_{22} &= \frac{a_{33}a_{11} - a_{13}{}^2}{\Delta}, & A_{31} = A_{13} &= \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{\Delta}, & A_{55} &= \frac{1}{a_{55}} \\
A_{33} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2}{\Delta}, & A_{12} = A_{21} &= \frac{a_{31}a_{32} - a_{12}a_{33}}{\Delta}, & A_{66} &= \frac{1}{a_{66}}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{12}{}^2a_{33} - a_{13}{}^2a_{22} - a_{23}{}^2a_{11}$$

Известно, что коэффициенты деформации связаны с так называемыми «техническими постоянными» ортотропного тела зависимости[7]

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{33} = \frac{1}{E_3}, \quad a_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}} \tag{4.3}$$

$$a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} = -\frac{\nu_{23}}{E_1}$$

где E_i, G_{ik}, ν_{ik} — модули Юнга, модули сдвига и коэффициенты Пуассона. Вводя (4.1) в известное выражение упругого потенциала

$$\Phi = \frac{1}{2}(\sigma_{11}e_{11} + \sigma_{22}e_{22} + \sigma_{33}e_{33} + \sigma_{23}e_{23} + \sigma_{31}e_{31} + \sigma_{12}e_{12}) \tag{4.4}$$

после замены в нем e_{ii}, e_{ik} на $^1/_2 f_{ii}, f_{ik}$ и сравнивая полученное выражение с Φ_2 в (3.2), получим выражение модулей упругости A_{ik} через λ, μ, α, а затем после подстановки

$$\lambda = \frac{E_0\nu_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}, \qquad \mu = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \tag{4.5}$$

через E_0, ν_0, α_i. Подставляя в (4.2) полученные выражения модулей упругости A_{ik} и выражения (4.3), получим уравнения, из которых технические постоянные ортотропного тела могут быть выражены через модуль Юнга E_0 и коэффициент Пуассона ν_0 первоначально изотропного тела и через его главные удлинения при однородной деформации. Опуская все промежуточные выкладки, приводим выражения этих технических постоянных с точностью до удлинений α_i во второй степени:

$$\begin{aligned} E_1 = E_0 \Big[1 &- \frac{2\nu_0^2}{1-2\nu_0}\alpha_1 - \frac{1-\nu_0}{1-2\nu_0}(\alpha_2+\alpha_3) - \frac{15-15\nu_0-12\nu_0^2+6\nu_0^3+4\nu_0^4}{2(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}\alpha_1^2 + \\ &+ \frac{2-\nu_0-11\nu_0^2+8\nu_0^3}{2(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}(\alpha_2^2+\alpha_3^2) - \frac{3\nu_0-3\nu_0^2+2\nu_0^3}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3) + \\ &+ \frac{1+\nu_0-8\nu_0^3}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}\alpha_2\alpha_3\Big] \end{aligned} \tag{4.6}$$

(для E_2 и E_3 — круговые перестановки индексов у (α);

$$\begin{aligned} \nu_{12} = \nu_0\Big[1 &+ (1+\nu_0)\alpha_1 - \frac{3-9\nu_0+4\nu_0^2+4\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)}\alpha_1^2 + \frac{6-12\nu_0+4\nu_0^2}{1-2\nu_0}\alpha_2^2 - \\ &- \frac{4\nu_0(1-\nu_0)}{1-2\nu_0}\alpha_3^2 - \frac{1-4\nu_0+3\nu_0^2}{1-2\nu_0}\alpha_1\alpha_2 + \frac{\nu_0-3\nu_0^2}{1-2\nu_0} + 4\nu_0\alpha_2\alpha_3\Big] \end{aligned} \tag{4.7}$$

(для ν_{23} и ν_{31} — круговые перестановки; ν_{ki} получаются из ν_{ik} перестановкой индексов i и k);

$$\begin{aligned} G_{12} = G_0\Big[1 &- \frac{1-\nu_0}{1-2\nu_0}\alpha_3 - \frac{1}{2(1-2\nu_0)}(\alpha_1+\alpha_2) - \frac{3(3-4\nu_0)}{4(1-2\nu_0)}(\alpha_1^2+\alpha_2^2) + \\ &+ \frac{2-3\nu_0}{2(1-2\nu_0)}\alpha_3^2 - \frac{2(1-\nu_0)}{1-2\nu_0}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3\Big] \end{aligned} \tag{4.8}$$

(для G_{23} и G_{31} — круговые перестановки).

§ 5. Частные случаи. В формулах, выражающих начальные напряжения (2.5), и в формулах (4.6)—(4.8), определяющих упругие постоянные ортотропного тела, каковым становится изотропное тело после первой однородной деформации, главные удлинения α_i при этой деформации предполагаются независимыми. Ниже приводятся случаи, когда они связаны некоторыми соотношениями.

1. *Всестороннее растяжение или сжатие.* В этом случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ $\alpha > 0$ в случае растяжения). Так как в равенствах (4.6)—(4.8) все величины E_i, G_{ik} и ν_{ik} отличаются одна от другой только расположением индексов у α, то все модули Юнга, модули сдвига и коэффициенты Пуассона ортотропного тела окажутся равными, т. е. изотропия тела после всестороннего равномерного растяжения или сжатия не нарушится. Эта деформация только изменит численные значения первоначальных, т. е. бывших до деформации, модуля Юнга и коэффициента Пуассона,

которые теперь будут

$$E = E_0\left[1 - \frac{2(1-\nu_0+\nu_0^2)}{1-2\nu_0}\alpha - \frac{9-12\nu_0+10\nu_0^2+4\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)}\alpha^2\right]$$

$$\nu = \nu_0\left[1+(1+\nu_0)\alpha + \frac{1}{2}(7+9\nu_0+2\nu_0^2)\alpha^2\right] \tag{5.1}$$

Начальные напряжения по (2.5) будут

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3' = p = 3k\alpha - 6k\alpha^2 \tag{5.2}$$

где $k = (3\lambda + 2\mu)/3$ — коэффициент объемного расширения.

2. *Одноосное растяжение или сжатие.* Изотропный призматический стержень после растяжения или сжатия ($\alpha < 0$) становится трансверсально изотропным с плоскостями изотропии, перпендикулярными к его оси. Считая, что последняя совпадает с осью координат 3, и полагая $\alpha_3 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -\nu_0\alpha$, получим по (4.6) — (4.8) значения его технических постоянных (в обозначениях, принятых в работе [7]):

$$E = E_1 = E_2 = E_0\left[1-(1+\nu_0^2)\alpha + \frac{2-5\nu_0-15\nu_0^2+25\nu_0^3+2\nu_0^4-4\nu_0^5}{2(1-2\nu_0)}\alpha^2\right]$$

$$\nu = \nu_{12} = \nu_0\left[1-\nu_0(1+\nu_0)\alpha - \frac{\nu_0(1+\nu_0)(8-13\nu_0-2\nu_0^2+4\nu_0^3)}{2(1-2\nu_0)}\alpha^2\right]$$

$$E' = E_3 = E_0\left[1+2\nu_0\alpha - \frac{15-30\nu_0+18\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)}\alpha^2\right] \tag{5.3}$$

$$\nu' = \nu_{32} = \nu_{31} = \nu_0\left[1+(1+\nu_0)\alpha - \frac{1}{2}(3-5\nu_0-3\nu_0^2)\alpha^2\right]$$

$$G' = G_{23} = G_{31} = G_0\left[1-\frac{1}{2}(1-\nu_0)\alpha - \frac{9-18\nu_0+7\nu_0^3-2\nu_0^3}{4(1-2\nu_0)}\alpha^2\right]$$

Начальные напряжения по (2.5) будут

$$\sigma_1' = \sigma_2' = 0, \quad \sigma_3' = E_0\alpha(1+2\nu_0\alpha) \tag{5.4}$$

3. *Чистый сдвиг.* Если главные удлинения α_1 и α_2 удовлетворяют условию $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 1$ и $\alpha_3 = 0$, то в осях *1*, *2*, *3* будет иметь место поле деформации чистого сдвига. Пусть сжатие происходит параллельно оси *1*, а растяжение — параллельно оси *2*. Положим [6]

$$\alpha_1 = \sec\beta - \operatorname{tg}\beta - 1, \qquad \alpha_2 = \sec\beta + \operatorname{tg}\beta - 1 \tag{5.5}$$

Эти выражения для главных удлинений удовлетворяют поставленному для них условию. Обозначив $\operatorname{tg}\beta = (\alpha_2 - \alpha_1)/2 = s/2$, получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4+s^2} - \frac{1}{2}s - 1 \approx -\frac{1}{2}s\left(1-\frac{1}{4}s\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4+s^3} + \frac{1}{2}s - 1 \approx \frac{1}{2}s\left(1+\frac{1}{4}s\right) \tag{5.6}$$

с точностью до s^2 включительно. Если чистому сдвигу подвергается пластинка со сторонами, параллельными осям *1*, *2*, то она становится ортотропной и ее технические постоянные определятся подстановкой в (4.6) — (4.8) приведенных выше значений α. Из этих технических постоянных приведем следующие:

$$E_1 = E_0\left[1-\frac{1+\nu_0}{2}s - \frac{7-10\nu_0+3\nu_0^2-2\nu_0^3+2\nu_0^4}{4(1-2\nu_0)(1+\nu_0)}s^2\right]$$

$$E_2 = E_0\left[1+\frac{1+\nu_0}{2}s - \frac{7-10\nu_0+3\nu_0^2-2\nu_0^3+2\nu_0^4}{4(1-2\nu_0)(1+\nu_0)}s^2\right]$$

$$\nu_1 = \nu_{12} = \nu_0\left[1-\frac{1+\nu_0}{2}s - \frac{3-6\nu_0+2\nu_0^2-\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)}s^2\right] \tag{5.7}$$

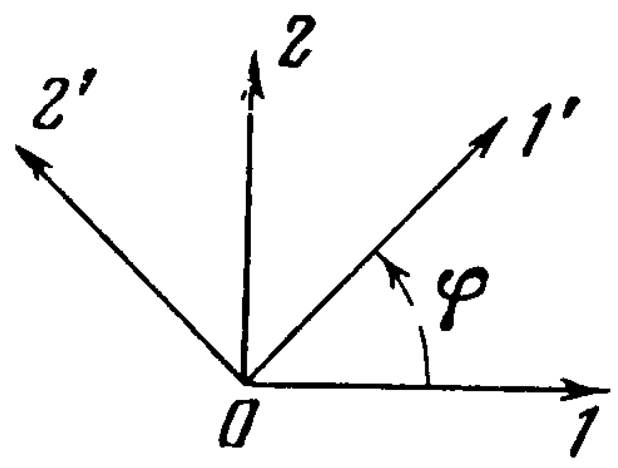
$$\nu_2 = \nu_{21} = \nu_0\left[1+\frac{1+\nu_0}{2}s - \frac{3-6\nu_0+2\nu_0^2-\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)}s^2\right]$$

$$G = G_{12} = G_0\left[1-\frac{3-4\nu_0}{4(1-2\nu_0)}s^2\right]$$

В этих формулах $s = \alpha_2 - \alpha_1$. Начальные напряжения по (2.5) будут

$$\sigma_1' = -\mu s + \frac{\lambda + 3\mu}{4} s^2, \qquad \sigma_2' = \mu s + \frac{\lambda + 3\mu}{4} s^2, \qquad \sigma_3' = \frac{\lambda}{4} s^2 \qquad (5.8)$$

Заметим, что в осях *1'*, *2'*, *3*, получающихся поворотом осей *1*, *2* на угол $\varphi = \pi/4 - \beta/2$ вокруг оси *3* (фиг. 2), главные удлинения (5.6) определяют поле деформации простого сдвига, а s является «величиной» этого сдвига, т. е. в осях *1'*, *2'*, *3* перемещения любой точке (x_i) будут $u_1' = s x_2'$, $u_2' = u_3 = 0$.



Фиг. 2

4. *Плоское напряженное состояние.* При $\sigma_3' = 0$

$$\alpha_3 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{\nu_0}{1 - \nu_0}(\alpha_1 + \alpha_2) \qquad (5.9)$$

Отличные от нуля начальные напряжения при этом по (2.9) будут

$$\sigma_1' = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2}(\alpha_1 + \nu_0 \alpha_2) + \frac{\nu_0}{1 - \nu_0}\alpha_1^2 - \frac{\nu_0(1 - 2\nu_0)}{1 - \nu_0}\alpha_2^2 - \frac{1 - 2\nu_0 - \nu_0^2}{1 - \nu^0}\alpha_1\alpha_2$$
$$(5.10)$$
$$\sigma_2' = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2}(\nu_0 \alpha_1 + \alpha_2) - \frac{\nu_0(1 - 2\nu_0)}{1 - \nu_0}\alpha_1^2 + \frac{\nu_0}{1 - \nu_0}\alpha_2^2 - \frac{1 - 2\nu_0 - \nu_0^2}{1 - \nu_0}\alpha_1\alpha_2$$

§ 6. Некоторые приложения. 1. *Кручение растянутого или сжатого стержня.* Пусть относительное удлинение оси стержня, совпадающей с осью координат *3*, равно α. Начальные напряжения найдутся по (5.4). Стержень будет скручиваться, как трансверсально изотропный с упругими постоянными (5.3), при действии растягивающей силы $p = sE_0\alpha(1 + 2\nu_0\alpha)$, где s — площадь поперечного сечения стержня после растяжения. Однако в случае трансверсально-изотропного стержня растягивающая сила не влияет в первом приближении на величину и распределение касательных напряжений, и последнее при заданном скручивающем моменте M_t^* одинаково с таковым в изотропном стержне[7]. Поэтому в стержне, сечение которого до растяжения ограничено, например, контуром $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, отличные от нуля вторичные напряжения будут

$$\sigma_{13}'' = -\frac{2M_t x_2}{\pi a b^3 (1 - \nu_0\alpha)^3} \approx -\frac{2M_t x_2}{\pi a b^3}(1 + 3\nu_0\alpha + 6\nu_0^2\alpha^2)$$
$$(6.1)$$
$$\sigma_{23}'' = \frac{2M_1 x_1}{\pi a^3 b (1 - \nu_0\alpha)^3} \approx \frac{2M_t x_1}{\pi a^3 b}(1 + 3\nu_0\alpha + 6\nu_0^2\alpha^2)$$

Здесь учтено, что после растяжения стержня его сечение будет ограничено эллипсом $y_1^2/[a^2(1 - \nu_0\alpha)^2] + y_2^2/[b^2(1 - \nu_0\alpha)^2] = 1$. Жесткость при кручении растянутого или сжатого стержня будет

$$G = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}(1 - \nu_0\alpha)^4 G' \approx G_t^\circ\left[1 - \frac{1 + 7\nu_0}{2}\alpha - \frac{9 - 26\nu_0 + 7\nu_0^2 + 30\nu_0^3}{4(1 - 2\nu_0)}\alpha^2\right] \qquad (6.2)$$

где G' дается (5.3) и G_t° обозначает жесткость нерастянутого и несжатого стержня.

2. *Изгиб растянутой или сжатой пластинки.* Прямоугольная изотропная пластинка, растянутая (сжатая) в двух направлениях, парал-

лельных сторонам, будет изгибаться произвольной нормальной нагрузкой, как ортотропная с главными направлениями, параллельными сторонам, при действии равномерно распределенных по этим сторонам продольных сил $p_1 = \sigma_1' h$, $p_2 = \sigma_2' h$ на единицу длины, причем σ_1' и σ_2' даются (5.10), а толщина пластинки в силу (5.9)

$$h = h_0\left[1 - \frac{\nu_0}{1-\nu_0}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] \tag{6.3}$$

если h_0 — толщина пластинки до растяжения, а α_1 и α_2 — ее относительные удлинения. Теория изгиба ортотропных пластинок хорошо разработана (см. работы [8—11]). Необходимые для расчета пластинки согласно этой теории жесткости изгиба и кручения

$$\begin{gathered} D_1 = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_1\nu_2), \quad D_2 = E_2 h^3 / 12(1 - \nu_1\nu_2) \\ D_k = G h^3 / 12, \quad D_3 = D_2\nu_1 + 2D_k \end{gathered} \tag{6.4}$$

найдутся при помощи формул (4.6)—(4.8), полагая в них

$$\nu_{12} = \nu_1, \ \nu_{21} = \nu_2, \quad G_{12} = G, \quad \alpha_3 = -\nu_0(\alpha_1 + \alpha_2)/(1 - \nu_0) \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} D_1 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}\Bigg[1 - \frac{2\nu_0}{1-\nu_0}\alpha_1 - \frac{1 + 2\nu_0 - \nu_0^2}{1-\nu_0}\alpha_2 - \frac{15 - 60\nu_0 + 76\nu_0^2 - 26\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)^2}\alpha_1^2 + \\ + \frac{2 - 3\nu_0 - \nu_0^2 - 7\nu_0^3 + 4\nu_0^4}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)^2}\alpha_2^2 - \frac{\nu_0 - 10\nu_0^2 + 24\nu_0^3 - 10\nu_0^4}{(1-2\nu_0)(1-\nu_0)^2}\alpha_1\alpha_2\Bigg] \end{aligned}$$

(для D_2 надо в этом выражении поменять местами индексы 1 и 2),

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{G_0 h_0^3}{12}\Bigg[1 - \frac{1 + 5\nu_0}{2(1-\nu_0)}(\alpha_1 + \alpha_2) - \\ &- \frac{9 - 34\nu_0 + 29\nu_0^2 + 10\nu_0^3}{4(1-2\nu_0)(1-\nu_0)^2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \frac{2 - 8\nu_0 + 4\nu_0^2 + 9\nu_0^3}{(1-2\nu_0)(1-\nu_0)^2}\alpha_1\alpha_2\Bigg] \\ D_1\nu_2 &= \frac{E_0\nu_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}\Bigg[1 - \frac{2\nu_0}{1-\nu_0}(\alpha_1 + \alpha_2) - \\ &- \frac{3 - 12\nu_0 + 16\nu_0^2 - 2\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)^2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \frac{1 - 3\nu_0 + 3\nu_0^2 + 4\nu_0^3}{(1-2\nu_0)(1-\nu_0)^2}\alpha_1\alpha_2\Bigg] \end{aligned} \tag{6.6}$$

Если пластинка растянута или сжата не в двух, но в одном направлении, то она будет изгибаться, как трансверсально изотропная с плоскостями изотропии, перпендикулярными к направлению растяжения при действии по двум противоположным сторонам продольных сил $p = E_0 h\alpha(1 + 2\nu_0\alpha)$ [ср. (5.4)]. Здесь α — относительное удлинение пластинки и $h = h_0(1 - \nu_0\alpha)$, если h_0 — толщина пластинки до растяжения. Отличное от нуля начальное напряжение

$$\sigma' = E_0\alpha(1 + 2\nu_0\alpha) \tag{6.7}$$

Необходимые для расчета пластинки на изгиб жесткости могут быть найдены, полагая в (6.5), (6.6) $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -\nu_0\alpha$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[1 - \nu_0(1-\nu_0)\alpha - \frac{15 - 45\nu_0 + 27\nu_0^2 + 24\nu_0^3 - 23\nu_0^4 + 4\,5\nu_0^5}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)}\alpha^2\right] \\ D_3 &= \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[1 - (1 + 3\nu_0)\alpha + \frac{2 - \nu_0 - 15\nu_0^2 + 18\nu_0^3 - 6\nu_0^4}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)}\alpha^2\right] \\ D_k &= \frac{G_0 h_0^3}{12}\left[1 - \frac{1 + 5\nu_0}{2}\alpha - \frac{9 - 24\nu_0 + 13\nu_0^2 + 10\nu_0^3}{4(1-2\nu_0)}\alpha\right] \\ D_1\nu_2 &= \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[\nu_0 - 2\nu_0^2\alpha - \frac{3\nu_0 - 11\nu_0^2 + 14\nu_0^3 - 6\nu_0^4 + 2\nu_0^5}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)}\alpha^2\right] \end{aligned} \tag{6.8}$$

3. *Изгиб пластинки после сдвига.* Предположим сначала, что изгиб накладывается на пластинку после ее чистого сдвига. Пусть стороны пластинки параллельны осям *1*, *2* на фиг. 2, т. е. главным направлениям при чистом сдвиге. Начальные напряжения определяются по (5.8). При последующем приложении нормальной нагрузки пластинка будет изгибаться, как ортотропная, с главными направлениями, параллельными ее сторонам, при действии по этим сторонам продольных сил $\sigma_1'h$ и $\sigma_2'h$, причем σ_1' и σ_2' берутся по (5.8). Необходимые для расчета жесткости найдутся подстановкой в (6.4) выражения (5.7):

$$D_1 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[1 - \frac{1+\nu_0}{2}s - \frac{7-24\nu_0+26\nu_0^2-7\nu_0^3}{4(1-2\nu_0)(1-\nu_0)}s^2\right] \quad (s = \alpha_2 - \alpha_1)$$

$$D_2 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[1 + \frac{1+\nu_0}{2}s - \frac{7-24\nu_0+26\nu_0^2-7\nu_0^3}{4(1-2\nu_0)(1-\nu_0)}s^2\right] \tag{6.9}$$

$$D_k = \frac{G_0 h^3}{12}\left[1 - \frac{3-4\nu_0}{4(1-2\nu_0)}s^2\right], \qquad D_2,\ \nu_1 = \frac{E_0\nu_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[1 - \frac{2-7\nu_0+7\nu_0^2}{4(1-2\nu_0)(1-\nu_0)}s^2\right]$$

Пусть теперь две стороны прямоугольной пластинки в поле деформации чистого сдвига совпадают с осями *1'*, *2'*, повернутыми относительно главных направлений *1*, *2* чистого сдвига на угол $\varphi = {}^1/_4\pi - {}^1/_2\beta$ и $\operatorname{tg}\beta = {}^1/_2 s$, где s — величина простого сдвига (фиг. 2). Пластинка будет испытывать простой сдвиг (см. замечание в конце § 5). Соответствующие ему напряжения находятся по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{11}' &= \sigma_1'\cos^2\varphi + \sigma_2'\sin^2\varphi = \tfrac{1}{4}(\lambda+\mu)s^2\\ \sigma_{22}' &= \sigma_1'\sin^2\varphi + \sigma_2'\cos^2\varphi = \tfrac{1}{4}(\lambda+\mu)s^2\\ \sigma_{12}' &= (\sigma_2' - \sigma_1')\sin\varphi\cos\varphi = \mu s\end{aligned} \tag{6.10}$$

где σ_1', σ_2' берутся по (5.8). Формулы (6.10) показывают, что деформация простого сдвига не может быть вызвана одними касательными усилиями, если она значительна, кроме них, по сторонам пластинки должны быть приложены нормальные усилия, пропорциональные квадрату величины s сдвига (о недостаточности касательных усилий см., например, у Грина [12]). Жесткости пластинки относительно осей *1*, *2* даются формулами (6.9). Необходимые для расчета жесткости изгиба вокруг осей *1'*, *2'* — D_{11}', D_{22}', жесткость кручения D_{66}' и приведенный коэффициент Пуассона $\gamma_1 = D_{12}'/D_{22}'$, а также побочные жесткости D_{16}', D_{26}', отсутствующие в осях *1*, *2*, определяются формулами [8]

$$\begin{aligned}D_{11}' &= D_1\cos^4\varphi + 2D_3\sin^2\varphi\cos^2\varphi + D_2\sin^4\varphi\\ D_{22}' &= D_1\sin^4\varphi + 2D_3\sin^2\varphi\cos^2\varphi + D_2\cos^4\varphi\\ D_{66}' &= D_k + (D_1 + D_2 - 2D_3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{D_{22}'}\left[D_2\nu_1 + (D_1 + D_2 - 2D_3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right]$$

$$D_{16}' = \frac{1}{2}(D_2\sin^2\varphi - D_1\cos^2\varphi + D_3\cos 2\varphi)\sin 2\varphi$$

$$D_{26}' = \frac{1}{2}(D_2\cos^2\varphi - D_1\sin^2\varphi - D_3\cos 2\varphi)\sin 2\varphi$$

Подставляя в (6.11) выражения (6.9) и $\varphi = {}^1/_4\pi - {}^1/_2\beta$, получим необходимые для расчета пластинки на изгиб жесткости:

$$D_{11}' = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[1 - \frac{3 - 9\nu_0 + 7\nu_0^2}{3(1-2\nu_0)(1-\nu_0)} s^2\right]$$

$$D_{22}' = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[1 - \frac{2 - 7\nu_0 + 8\nu_0^2 - 2\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)} s^2\right]$$

$$D_{66}' = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}\left[\frac{1+\nu_0}{2} s - \frac{7 - 26\nu_0 + 33\nu_0^2 - 14\nu_0^3}{2(1-2\nu_0)(1-\nu_0)} s^2\right] \qquad (6.12)$$

$$\gamma_1 = \nu_0 - \frac{1}{2}(1-\nu_0)^2 s^2, \qquad D_{16}' = D_{26}' = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)} \frac{1+\nu_0}{4} s$$

Для проверки выкладок могут служить следующие из (6.11) соотношения:

$$\begin{aligned} D_{11}' + D_{22}' + 2D_{12}' &= D_1 + D_2 + 2D_2\nu_1 \\ D_{66}' - D_{12}' &= D_k - D_2\nu_1 \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Поступила 2 VII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Brillouin L. Les tenseurs en mécanique et en élasticité. Paris, 1938.
2. Треффц. Математическая теория упругости. Гостехиздат, 1934.
3. Murnaghan F. D. Finite deformations of an elastic solid. Amer. Journ. of Math., vol. LIX, № 2, 1937.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
5. Зволинский Н. В. и Риз П. М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПММ, т. II, вып. 4, 1938.
6. Ляв П. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
7. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропных тел. Гостехиздат, 1950.
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947.
9. Huber M. T. Teorja plyt. Lwow, 1921.
10. Huber M. T. Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten. Warszawa, 1929
11. Huber M. T. Einige Anwendungen der Biegungstheorie ortotroper Platten. ZAMM, Bd. 6, H. 3., 1926.
12. Green A. E., Zerna W. Theoretical Elasticity, Oxford, 1954.
13. Voigt W. Ueber eine anscheinend notwendige Erweiterung der Elastitätstheorie. Götting. Nachrichten, 1894.