

## КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ РЕЛЕ С ОПЕРЕЖАЮЩЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

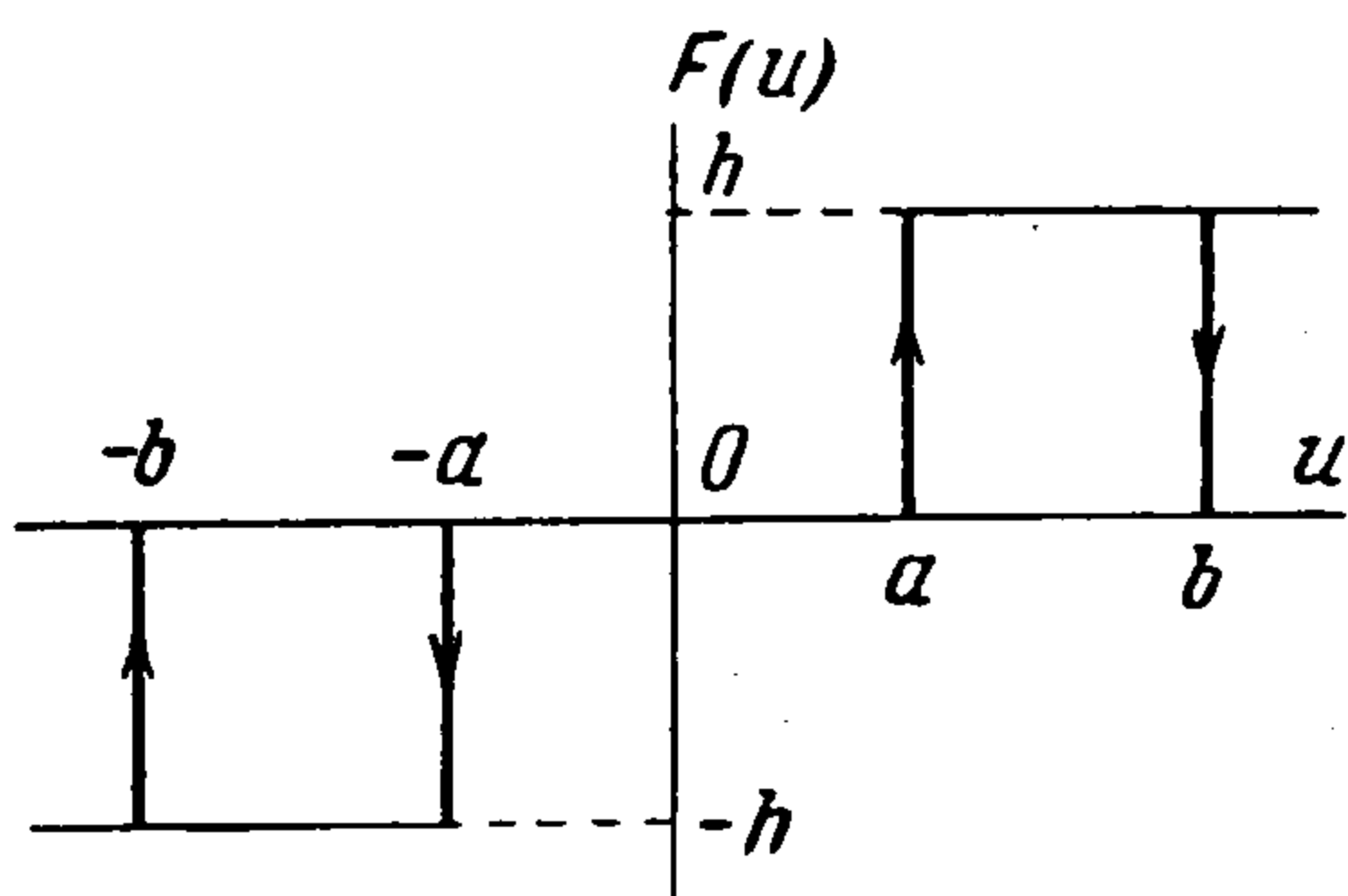
И. Б. Челпанов

(Ленинград)

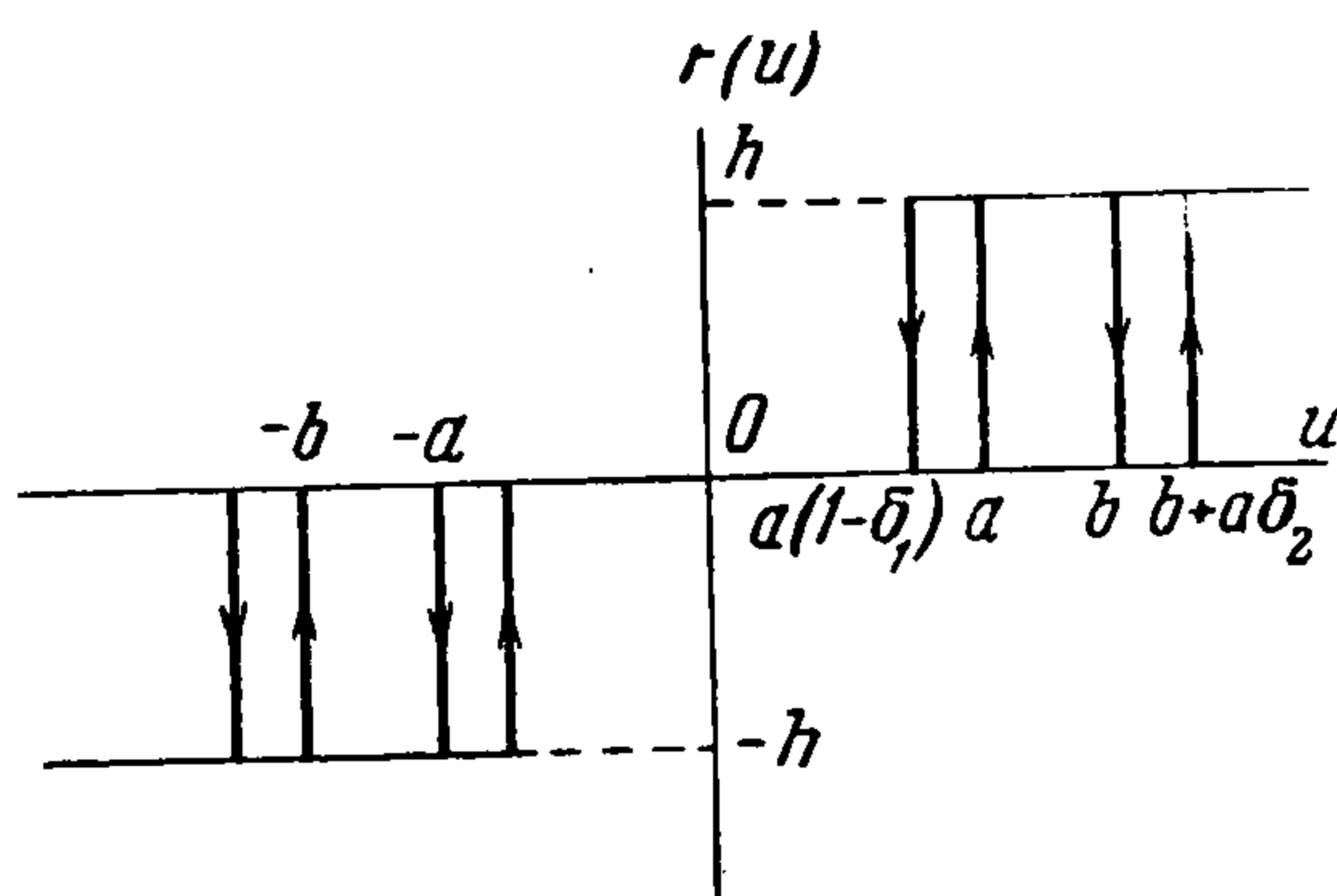
Исследуются динамические свойства системы с одной степенью свободы, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + L \frac{du}{dt} + Mu = y \quad (y = -F(u)) \quad (0.1)$$

Функция  $F(u)$  представляет собой характеристику реле с зоной нечувствительности, двузначную при некоторых значениях входной величины  $u$ . В идеализированном виде характеристика представлена на фиг. 1. При увеличении  $u$  от нуля реле включается при  $u = a$ . Когда  $u$  после достижения максимального значения  $u_{\max}$  начнет уменьшаться, то выключение произойдет при  $u = a$ , если  $u_{\max} < b$ , и при  $u = b$ ,



Фиг. 1



Фиг. 2

если  $u_{\max} > b$ . В последнем случае имеет место эффект опережения. В дальнейшем мы будем вместо идеальной характеристики рассматривать реальную (фиг. 2). Здесь принято во внимание, что выключение реле при уменьшении входной величины от  $u_{\max} < b$  в действительности произойдет не при  $u = a$ , а при несколько меньшем значении  $u = a(1 - \delta_1)$ . Аналогично, если  $u$  после достижения минимального значения  $u_{\min} > a$  начнет возрастать, то реле включится не при  $u = b$ , а при  $u = b + a\delta_2$ .

В зависимости от свойств системы без реле последнее может играть различную роль: 1) если система сама по себе неустойчива ( $L < 0$  или  $M < 0$ ), то реле может обеспечить устойчивость движений при начальных отклонениях, не выходящих за определенные границы; 2) если система сама по себе устойчива, то реле может значительно улучшить ее динамические характеристики.

В § 2—6 разбирается первая задача, в § 7 — вторая.

**§ 1. Формулы преобразования.** В дальнейшем вместо исходного уравнения (0.1) рассматривается более общее, нелинейное уравнение

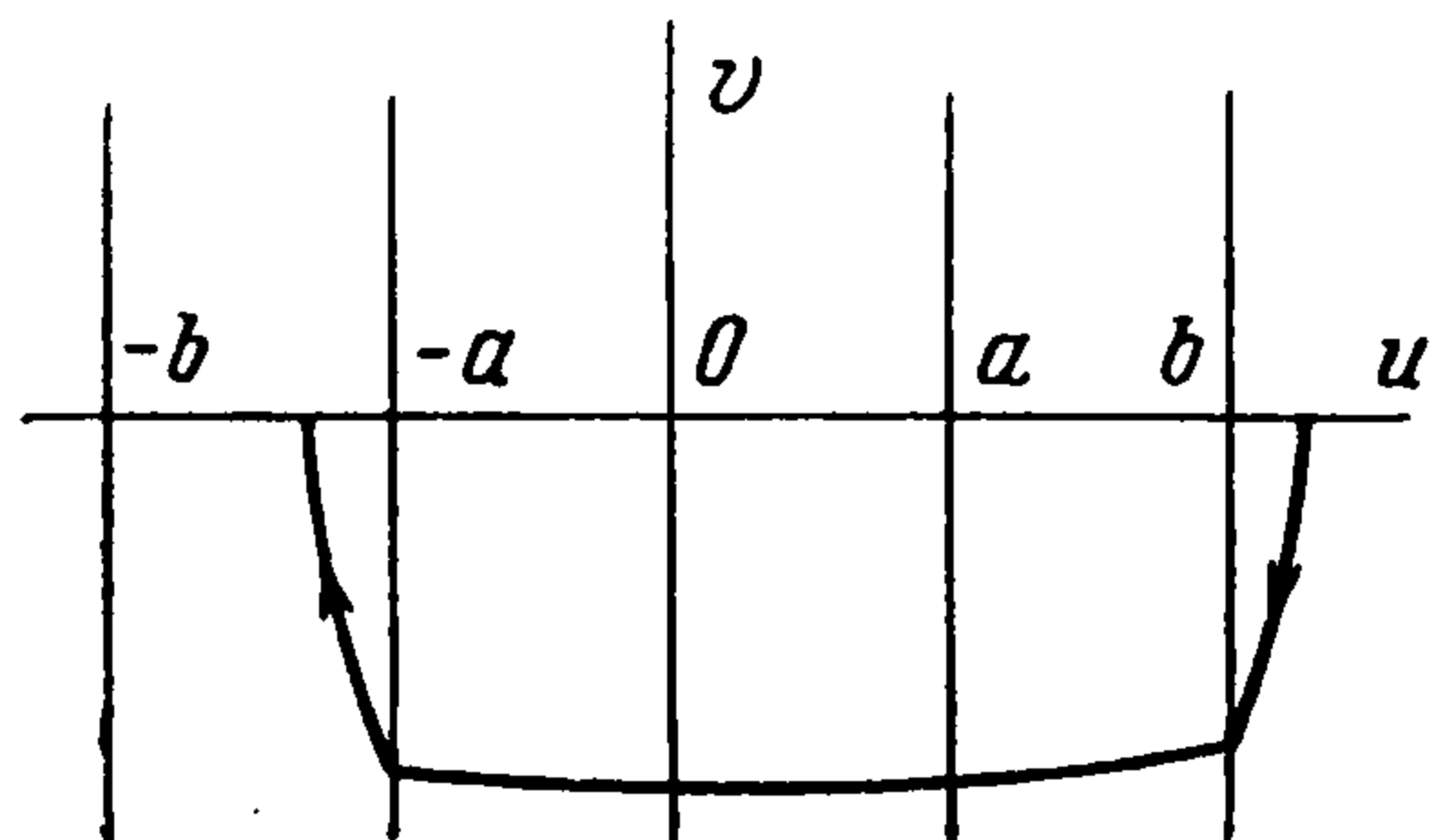
$$\frac{d^2u}{dt^2} + g\left(u, \frac{du}{dt}\right) + f(u) + F(u) = 0 \quad (1.1)$$

Будем предполагать, что на функции  $g$  и  $f$  наложены лишь ограничения весьма общего характера:

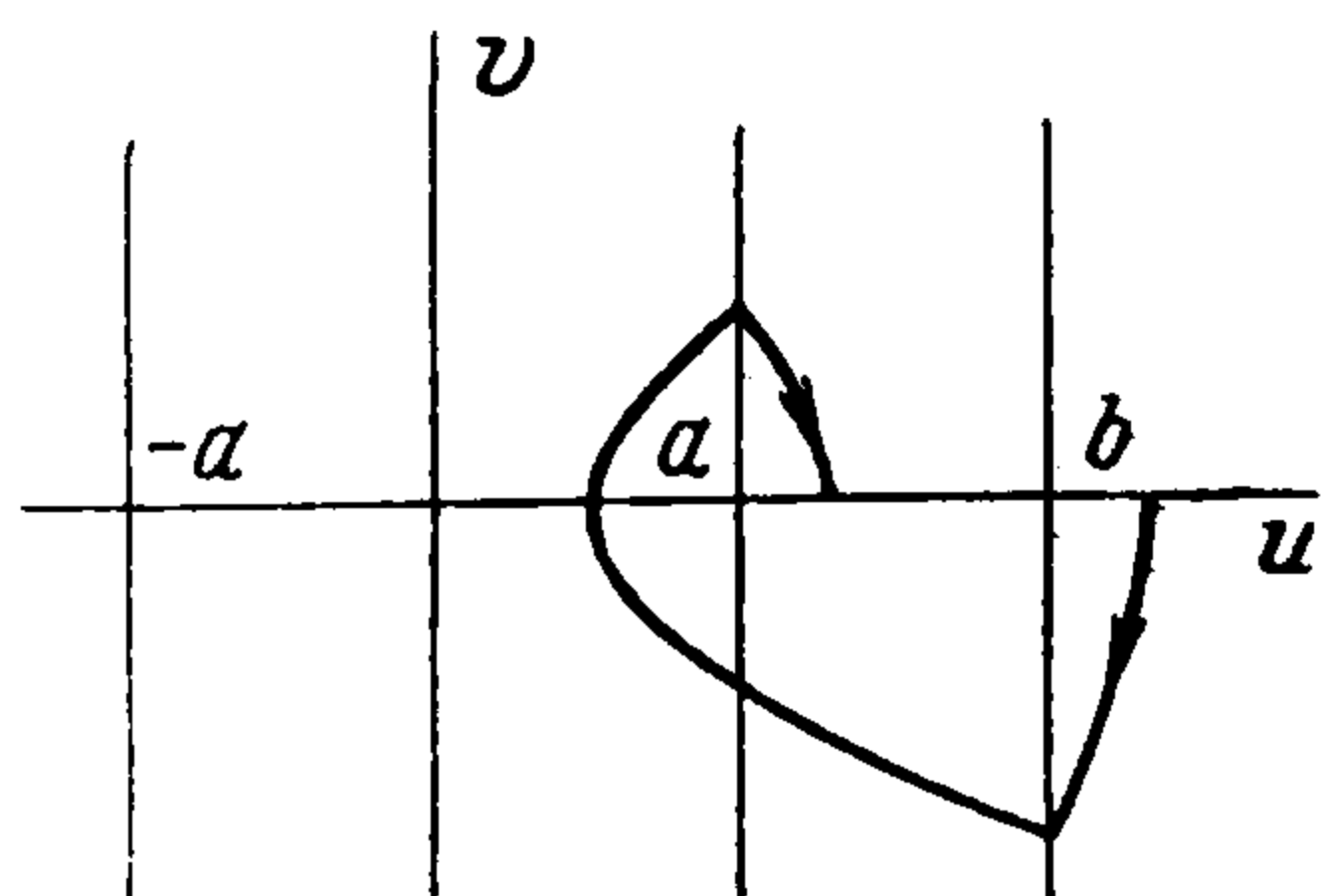
1. Функции  $g$  и  $f$  ограничены в любой ограниченной области.
2. Функция  $f$  нечетна, т. е.  $f(-u) = -f(u)$ .
3. Функция  $g$  четна по  $u$  и нечетна по  $du/dt$ .

Предположения 2 и 3 не имеют принципиального значения, они введены лишь для упрощения дальнейших выводов.

Будем рассматривать переход изображающей точки на фазовой плоскости от исходного положения на оси  $u$  и до конечного положения на

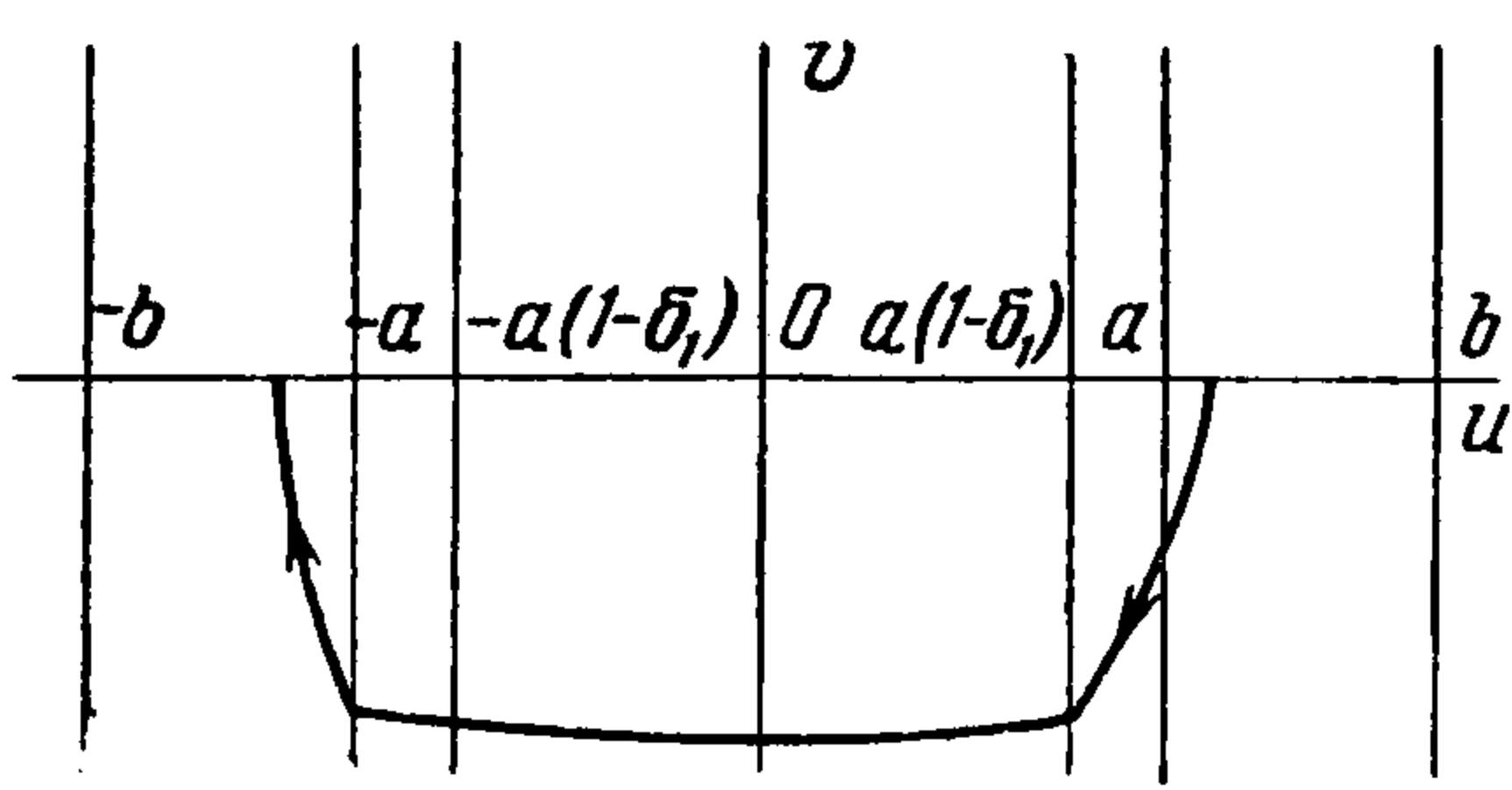


Фиг. 3

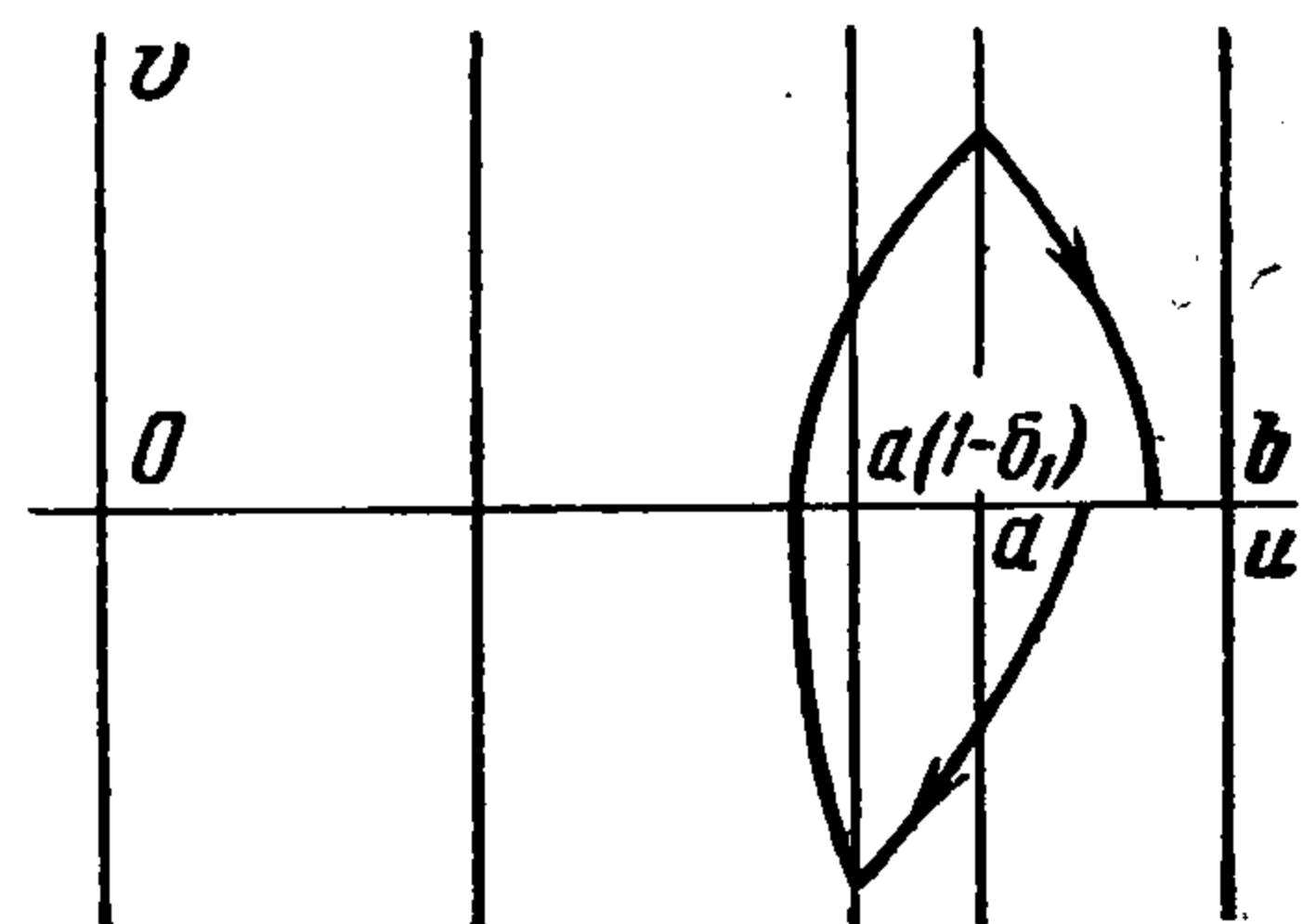


Фиг. 4

той же оси. В зависимости от функций  $g$  и  $f$  и начальных условий последовательные точки пересечения фазовой кривой с осью  $u$  могут быть разделены как однократным срабатыванием реле (только включением или только выключением), так и двукратным (выключением с последующим включением). Условимся переходы, соответствующие однократному



Фиг. 5



Фиг. 6

срабатыванию реле, рассматривать попарно, чтобы получалась комбинация выключение — включение. Вследствие принятых предположений о характере четности функций  $g$  и  $f$  можно в дальнейшем не различать, с какой полуоси, положительной или отрицательной, производится преобразование. Всего возможно пять вариантов преобразований:

1. Преобразование  $ba$  с одной полуоси на другую. Реле выключается при  $u = b$  и включается при  $u = -a$  (фиг. 3).

2. Преобразование  $b_1a_1$  с полуоси на нее же. Реле выключается при  $u = b$  и включается при  $u = a$  (фиг. 4).

3. Преобразование  $aa$  с одной полуоси на другую. Реле выключается при  $u = a(1 - \delta_1)$  и включается при  $u = -a$  (фиг. 5).

4. Преобразование  $a_1a_1$  на ту же полуось. Реле выключается при  $u = a(1 - \delta_1)$  и включается при  $u = a$  (фиг. 6).

5. Преобразование  $bb$  на ту же полуось. Реле выключается при  $u = b$  и включается при  $u = b + a\delta_2$  (фиг. 7).

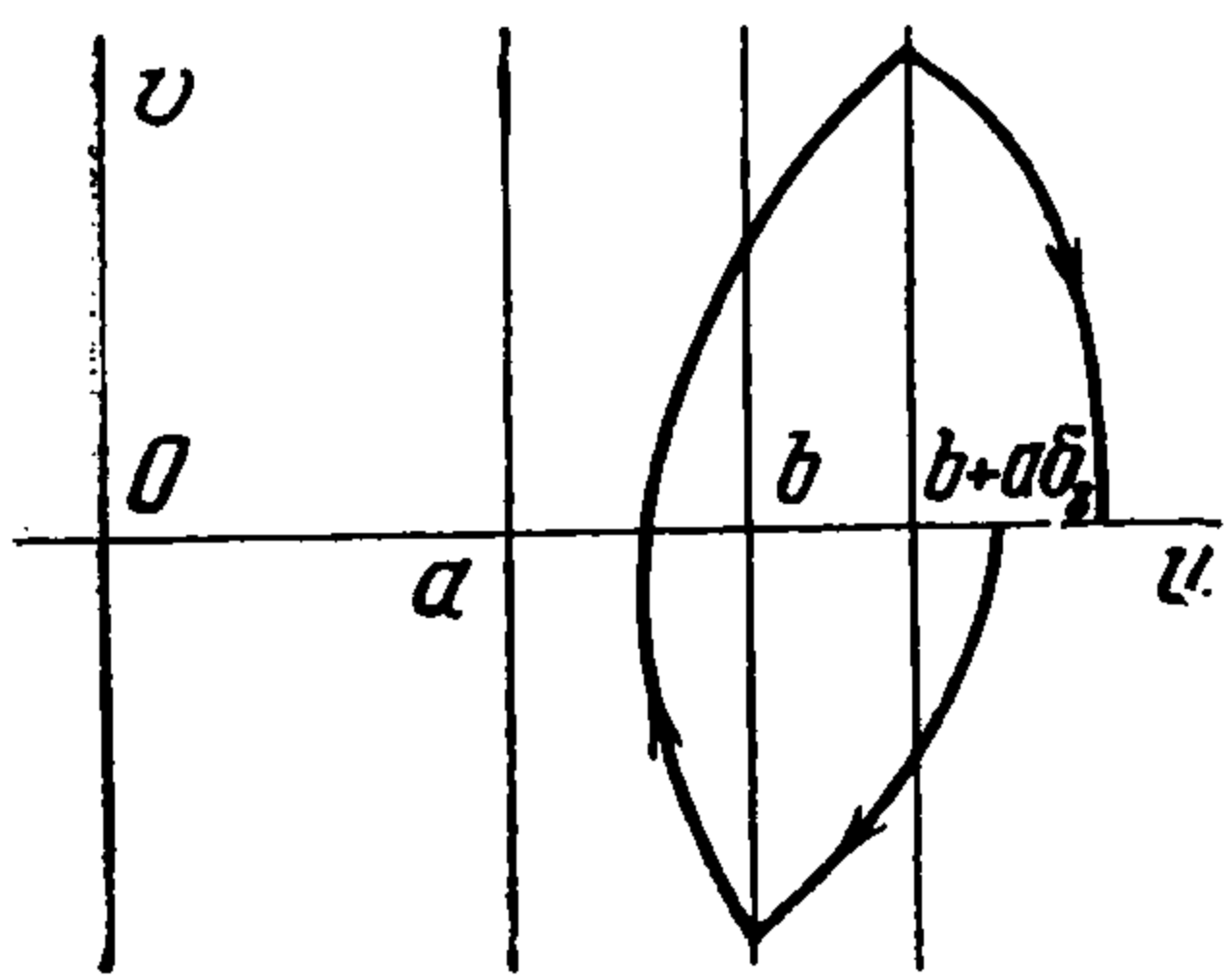
Абсолютные значения координат последовательных точек пересечения фазовой траектории с осью  $u$  будем обозначать соответственно  $A_1, \dots, A_n$ .

Для выяснения характера зависимости последующего значения  $A_{i+1}$  от предыдущего  $A_i$  формально проинтегрируем уравнение (1.1), откуда получим необходимое соотношение

$$\Phi(A_{i+1}) - \Phi(A_i) = - \int_i^{(i+1)} \left[ g\left(u, \frac{du}{dt}\right) + F(u) \right] du$$

$$\left( \Phi(A) = \int_0^A f(A) dA \right) \quad (1.2)$$

Для определенности будем считать, что  $A_i$  соответствует точке на положительной полуоси  $u$ . Тогда, если осуществляется преобразование  $ba$ , то функция  $F$  принимает по участкам следующие значения:



Фиг. 7

$$F(u) = \begin{cases} +h & \text{при } b < u < A_i \\ 0 & \text{при } -a < u < b \\ -h & \text{при } -A_{i+1} < u < a \end{cases} \quad (1.3)$$

Вследствие этого будем иметь

$$\int_i^{(i+1)} F(u) du = h(b-a) + h(A_{i+1} - A_i)$$

Для преобразования  $b_1a_1$  интеграл имеет то же значение.

Для преобразования  $bb$

$$\int_i^{(i+1)} F(u) du = -ha\delta_2 + h(A_{i+1} - A_i)$$

Для преобразований  $aa$  и  $a_1a_1$

$$\int_i^{(i+1)} F(u) du = -ha\delta_1 + h(A_{i+1} - A_i)$$

Таким образом, получаем три формулы.

Для преобразования  $ba$  или  $b_1a_1$

$$[hA_{i+1} + \Phi(A_{i+1})] - [hA_i + \Phi(A_i)] = -h(b-a) - \int_i^{(i+1)} g\left(u, \frac{du}{dt}\right) du \quad (1.4)$$

Для преобразования  $aa$  или  $a_1a_1$

$$[hA_{i+1} + \Phi(A_{i+1})] - [hA_i + \Phi(A_i)] = ha\delta_1 - \int_i^{(i+1)} g\left(u, \frac{du}{dt}\right) du \quad (1.5)$$

Для преобразования  $bb$

$$[hA_{i+1} + \Phi(A_{i+1})] - [hA_i + \Phi(A_i)] = ha\delta_2 - \int_i^{(i+1)} g\left(u, \frac{du}{dt}\right) du \quad (1.6)$$

Аналогично можно формально связать значение  $A_i$  и значение  $A_{i+k}$ , разделенные  $k$  преобразованиями любого вида в любой последовательности. Это соотношение имеет вид:

$$[hA_{i+k} + \Phi(A_{i+k})] - [hA_i + \Phi(A_i)] = R + \Psi \quad (1.7)$$

где  $R$  — постоянная, зависящая от числа преобразований каждого вида,

$$\Psi = - \left\{ \int_{(i)}^{(i+1)} g \left( u, \frac{du}{dt} \right) du + \int_{(i+1)}^{(i+2)} g \left( u, \frac{du}{dt} \right) du + \dots + \int_{(i+k-1)}^{(i+k)} g \left( u, \frac{du}{dt} \right) du \right\} \quad (1.8)$$

Все формулы дают лишь формальную связь между значениями  $A$ , так как путь интегрирования на фазовой плоскости неизвестен.

**§ 2. Устойчивость движения.** Покажем, что за счет выбора достаточно большого значения параметра  $h$  характеристики реле может быть получена следующая общая картина движения точки на фазовой плоскости (фиг. 8):

1) если изображающая точка первоначально находилась в области  $C$ , то при дальнейшем движении она придет в область  $A$ ;

2) если изображающая точка находилась в области  $A$ , то при дальнейшем движении она не выйдет за пределы области  $B$ .

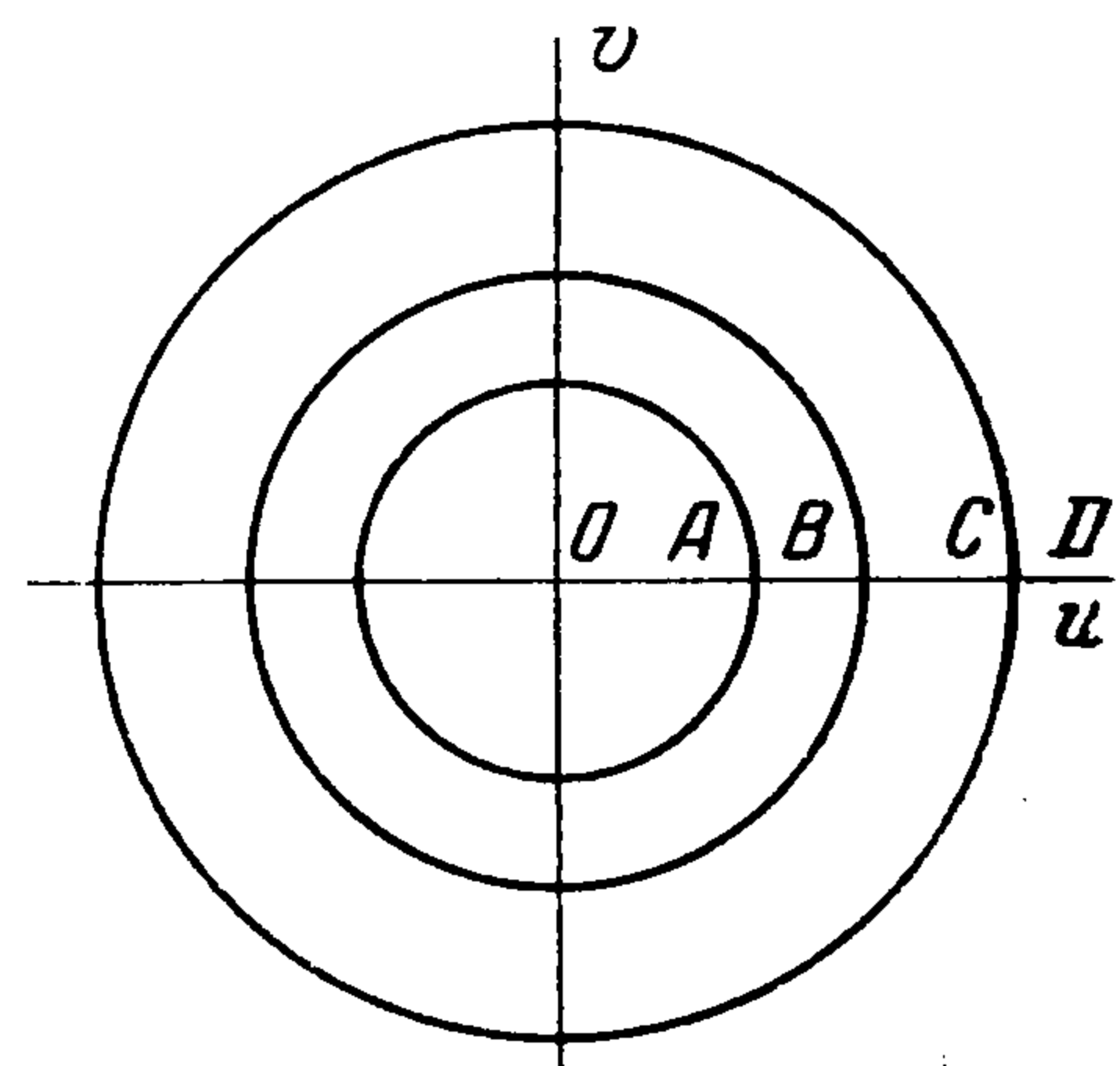
Область  $D$  расходящихся движений может существовать или не существовать в зависимости от свойств функций  $g$  и  $f$ . За счет выбора параметров характеристики реле граница областей  $C$  и  $D$  (если область  $D$  существует) может быть как угодно отодвинута от начала координат, а граница областей  $B$  и  $C$  стянута к началу координат.

Потребуем, чтобы  $h$  удовлетворяло следующим условиям.

1. Функция  $[hA + \Phi(A)]$  должна быть положительной неубывающей при  $d < |u| < N$ , где  $N$  — граница областей  $D$  и  $C$  (может быть задана произвольно),  $d$  — минимальное значение  $A$ , которому соответствует преобразование  $ba$ . Смысл введенного условия заключается в том, что реле должно компенсировать в заданной области статическую неустойчивость системы, если последняя имеет место.

2. Обозначим через  $g_0$  максимальное значение функции  $g$  в области, из пределов которой точка заведомо не выходит, если преобразуется значение  $A < N$ . Потребуем, чтобы  $h(b - a) > 2Ng_0$ . Смысл введенного неравенства заключается в том, что реле должно создавать достаточный эффект «опережения», чтобы компенсировать раскачивающее действие неконсервативной силы, если она недиссипативна.

Если система сама по себе статически устойчива, то первое условие выполняется при любом положительном  $h$ . Второе условие автоматически выполняется, если сила  $g$  диссипативна, т. е.  $g < 0$  (на рассматриваемом отрезке фазовой траектории  $du/dt < 0$ ). В общем случае оба условия могут быть выполнены за счет выбора достаточно большого значения  $h$ .



Фиг. 8

Пусть начальное значение  $A_1$  взято в пределах  $d < A_1 < N$ . Тогда  $A_2$  получится преобразованием  $ba$ . Величина  $A_2$  определится из формулы (1.4). Вследствие

$$\int_{(1)}^{(2)} g\left(u, \frac{du}{dt}\right) du > 2Ng_0$$

будем иметь

$$[hA_2 + \Phi(A_2)] - [hA_1 + \Phi(A_1)] < 0$$

Так как  $[hA + \Phi(A)]$  — неубывающая функция, то отсюда непосредственно следует, что  $A_2 < A_1$ . Если  $A_2$  лежит в тех же пределах, что и  $A_1$ , т. е.  $d < A_2 < N$ , то аналогично можно получить, что  $A_3 < A_2$  и т. д. В результате будем иметь последовательность значений  $A_1, \dots, A_l$ , так что  $A_1 > A_2 > \dots > A_l$ . Размахи будут уменьшаться до тех пор, пока не нарушится условие для преобразования  $ba$ . Этим доказано первое положение: точка из области  $C$  переходит в область  $A$ . Отметим, что устойчивость «в большом» может не иметь места.

За серией преобразований  $ba$  следует одно из преобразований  $b_1a_1$ ,  $aa_1$ ,  $a_1a_1$  или  $bb$ . Эти преобразования могут дать в зависимости от свойств функций  $g$  и  $f$  как  $A_{l+1} < A_l$ , так и  $A_{l+1} > A_l$ . В последнем случае после одного или нескольких преобразований такого вида точка войдет в зону  $B$ , которая объединяет состояния, получающиеся после преобразований  $aa$ ,  $a_1a_1$  и  $bb$ , за которыми должно последовать преобразование  $ba$ . Последнее при следующем размахе вернет точку в зону  $A$ . Таким образом, точка, если она находилась в зоне  $C$ , несколько раз проходит преобразование  $ba$ , пока не придет в зону  $A$ , а затем проходит через комбинации различных преобразований, не выводящих за ее пределы зоны  $B$ .

**§ 3. Устойчивость предельных циклов.** Ограничим класс рассматриваемых функций  $g$  наложением следующих требований:

1) произведение  $g du / dt$  не меняет знака во всей зоне  $A$ , т. е. сила  $g$  должна сохранять диссипативный или антидиссипативный характер;

2) абсолютная величина  $g$  — неубывающая функция  $du / dt$  при любом  $u$ , т. е.

$$\left| g\left[u, \left(\frac{du}{dt}\right)_1\right] \right| \leq \left| g\left[u, \left(\frac{du}{dt}\right)_2\right] \right| \quad \text{при } 0 < \left(\frac{du}{dt}\right)_1 < \left(\frac{du}{dt}\right)_2 \quad (3.1)$$

Докажем теперь основное положение: если в системе есть предельные циклы, то все предельные циклы устойчивы при  $g(u, du/dt)(du/dt) > 0$  и неустойчивы при  $g(u, du/dt)(du/dt) < 0$ .

Для частного случая линейного уравнения и принципиально сходной характеристики реле особенность подобных систем — возможность существования нескольких устойчивых предельных циклов при отсутствии неустойчивых — была отмечена в работе А. С. Алексеева [1]. Там же было показано, что в зависимости от соотношения между параметрами в системе могут существовать сложные предельные циклы. Естественно

ожидать существования таких циклов и в общем случае. Их устойчивость будем исследовать вне зависимости от их сложности.

Ранее была получена формула (1.7) связи  $A_i$  и  $A_{i+k}$ , разделенных любой последовательностью  $k$  преобразований. Возьмем от (1.7) полный дифференциал. Получим

$$[h + f(A_{i+k})] dA_{i+k} - [h + f(A_i)] dA_i = \frac{d\Psi}{dA_i} dA_i$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{dA_{i+k}}{dA_i} = \frac{[h + f(A_i)] + d\Psi / dA_i}{h + f(A_{i+k})} \quad (3.2)$$

Пусть последовательность  $A_i, \dots, A_{i+k}$  принадлежит предельному циклу, который замыкается на  $k$ -м размахе, т. е.  $A_i = A_{i+k}$ . Как известно [2], устойчивость цикла определяется величиной производной (3.2), где в правую часть должно быть подставлено  $A_{i+k} = A_i$ . После подстановки получим

$$\frac{dA_{i+k}}{dA_i} = \frac{[h + f(A_i)] + d\Psi / dA_i}{h + f(A_i)} \quad (3.3)$$

Устойчивость цикла зависит от знака производной  $d\Psi / dA_i$ . Возьмем производную по  $A_i$  от первого слагаемого в функции  $\Psi$ . Получим

$$\frac{d}{dA_i} \int_{(i)}^{(i+1)} g\left(u, \frac{du}{dt}\right) du = g(A_i, 0) + g(A_{i+1}, 0) \frac{dA_{i+1}}{dA_i} + \int_{(i)}^{(i+1)} \frac{dg}{dA_i} du \quad (3.4)$$

Все три слагаемых имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком  $g$  на рассматриваемом участке фазовой траектории. Действительно, так как фазовые траектории, начинающиеся в двух бесконечно близких точках, не могут пересекаться, то  $dA_{i+1}/dA_i > 0$ . Фазовая траектория, начинающаяся в точке  $A_i + dA_i$ , идет выше. Поэтому, если учесть, что  $g$  — неубывающая функция  $du/dt$ , мы получим, что интеграл в тех же пределах по этому пути больше по абсолютному значению, т. е.

$$\operatorname{sgn} \int_{(i)}^{(i+1)} \frac{dg}{dA_i} du = \operatorname{sgn} g$$

Те же рассуждения применимы к остальным интегралам — слагаемым в функции  $\Psi$ . Окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dA_{i+k}}{dA_i} > 1 & \quad \text{при } \frac{d\Psi}{dA_i} > 0, \text{ т. е. при } g \frac{du}{dt} < 0 \\ \frac{dA_{i+k}}{dA_i} < 1 & \quad \text{при } \frac{d\Psi}{dA_i} < 0, \text{ т. е. при } g \frac{du}{dt} > 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

В первом случае мы констатируем неустойчивость предельного цикла, во втором — устойчивость.

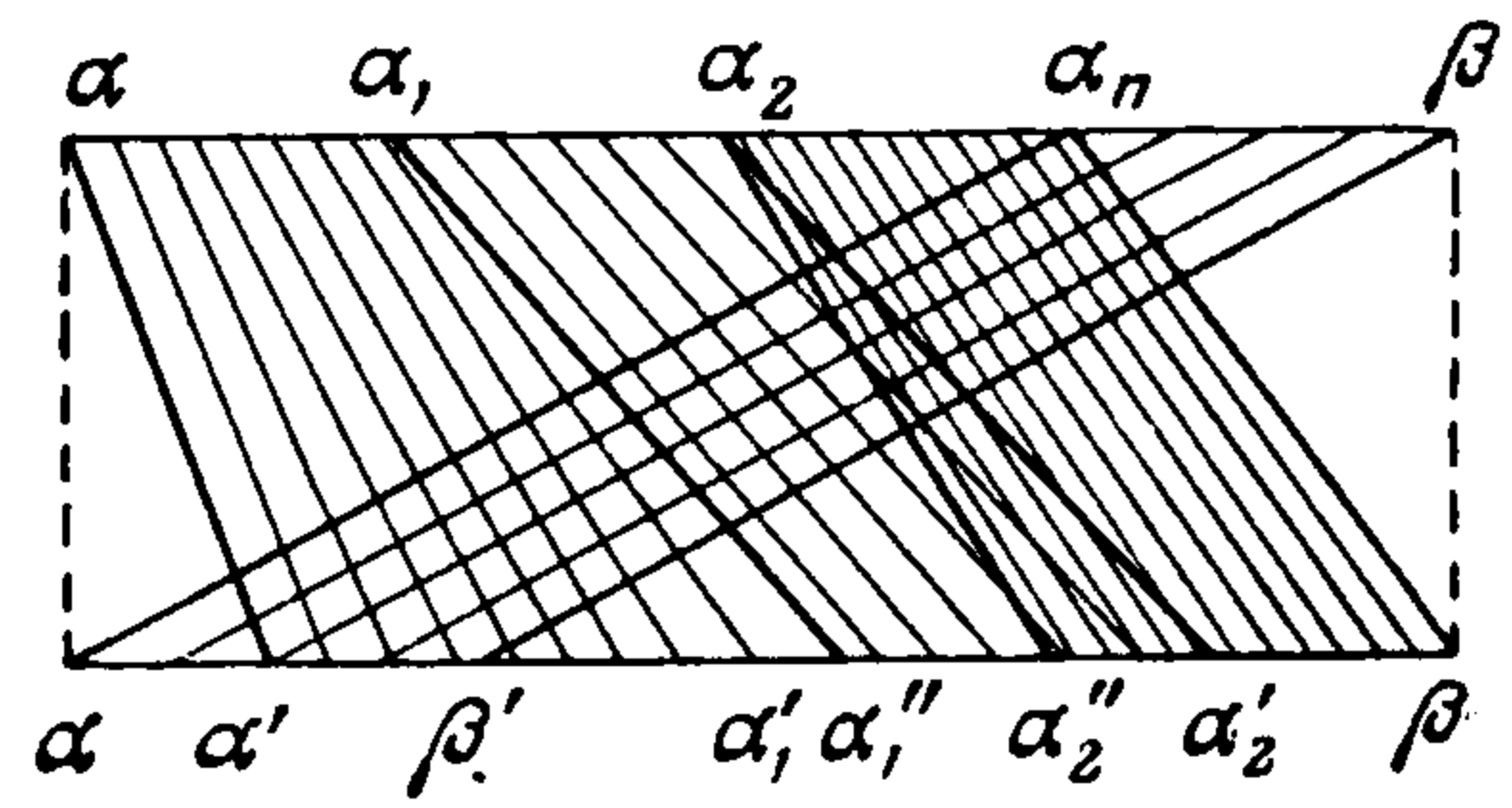
Общая картина движения, выявленная в § 2, в обоих случаях остается той же самой: имеется область  $c$ , из которой фазовые траектории переходят в область  $A$ , ближе к началу координат. Во втором случае, когда в системе могут быть устойчивые предельные циклы, нетрудно представить себе дальнейшее движение точки. После того как она вошла в область  $A$ , фазовая траектория наматывается на один из предельных циклов или стремится к началу координат. Движение приобретает гораздо



чае нарушает обратную однозначность (фиг. 9). На некоторые отрезки (например,  $\alpha'\beta'$  и  $\alpha''_2 \alpha'_2$ ) преобразование производится многократно с различных участков исходного интервала. Наоборот, на другие отрезки (например,  $\alpha'_1, \alpha''_1$ ) не преобразуются никакие отрезки исходного интервала. Очевидно, что на всех участках основного интервала значений  $A_2$  плотности вероятности от отдельных элементарных преобразований складываются.

Поэтому получим следующее обобщение формулы (4.3):

$$p_2(A_2) = \sum_i p_1(A_1) \frac{1}{\varphi'_i(A_1)}, \quad \varphi_i(A_1) = A_2 \quad (4.5)$$



Фиг. 9

Суммирование на каждом отрезке интервала  $(\alpha, \beta)$  распространяется на те значения  $i$ , которым соответствуют функции, осуществляющие преобразования на рассматриваемый отрезок.

Как говорилось выше, для уравнения второго порядка имеется пять функций, каждая из которых осуществляет взаимно-однозначное преобразование  $(ba, b_1a_1, aa, a_1a_1, bb)$ . Поэтому в общем случае задача преобразования может быть достаточно сложной.

**§ 5. Стационарная плотность вероятности.** В общем случае, если функция  $p_1$  назначена произвольно, то функция  $p_2$  после преобразования получается отличной от исходной. В дальнейшем рассматривается вопрос о том, как найти такую плотность вероятности, которая после преобразования по формулам (4.5) давала бы ту же плотность, т. е.  $p_1 \equiv p_2 = p_0$ . Очевидно, что такая функция будет воспроизводиться после любого числа преобразований, так как формулы преобразования остаются каждый раз теми же. Поэтому функцию  $p_0$  будем называть стационарной плотностью вероятности. Будем считать, что стационарная плотность вероятности, конечная в любой точке интервала, существует и она единственна.

Для практического нахождения функции  $p_0$  можно использовать метод последовательных приближений. Для этого задаем произвольную функцию  $p_1$ , удовлетворяющую интегральному условию (4.2), и многократно преобразуем ее по формулам (4.5) до тех пор, пока приближения не начнут совпадать с заданной степенью точности. Вопрос о сходимости процесса здесь не исследуется.

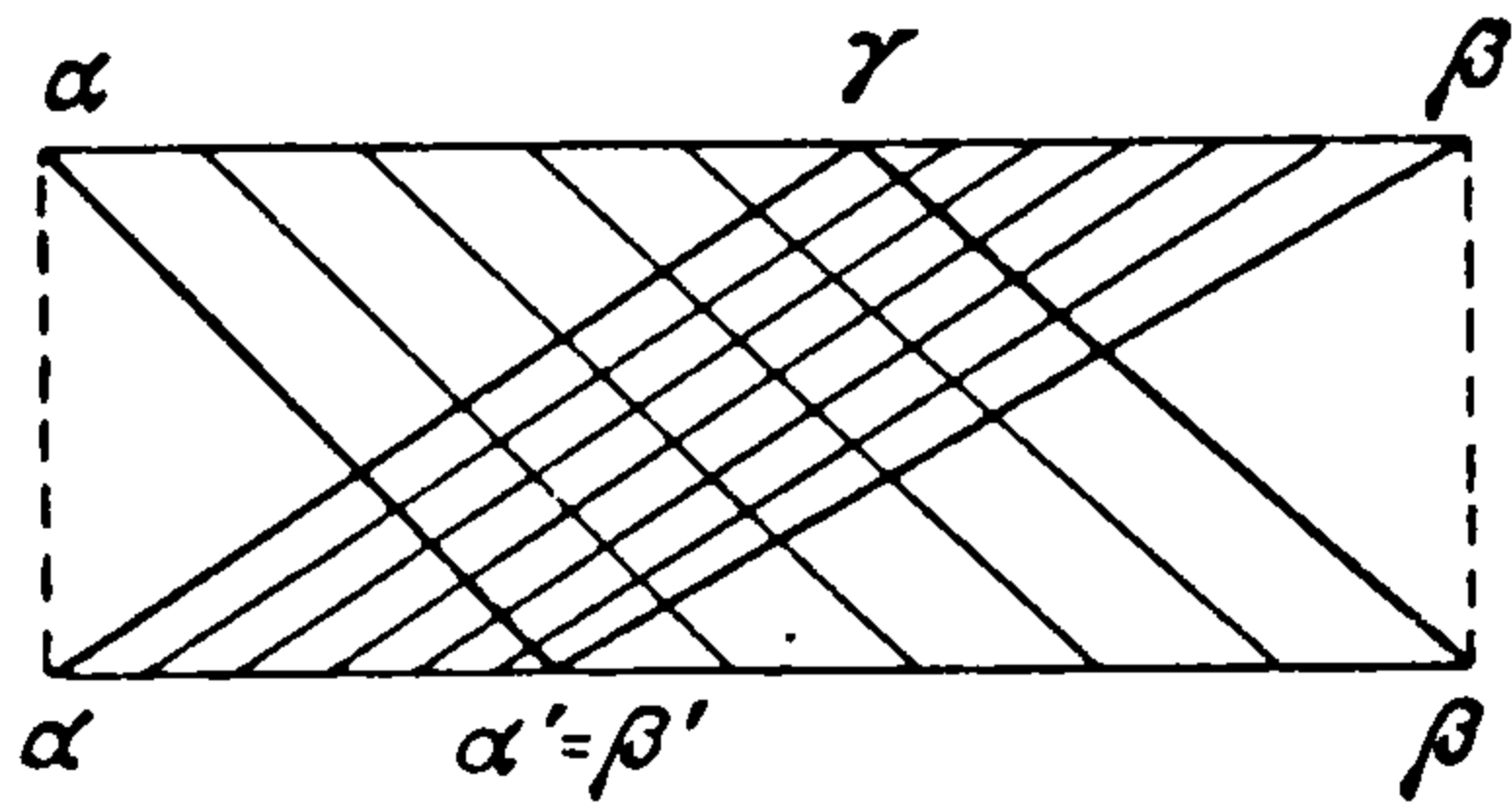
Рассмотрим некоторые особенности функции  $p_0$ , которые выясняются при использовании метода последовательных приближений. С целью упрощения дальнейшего изложения исключим из рассмотрения статически неустойчивые системы. Тогда вместо пяти элементарных функций преобразования останутся только две:  $\varphi_1$ , соответствующая преобразованию  $ba$ , и  $\varphi_2$ , соответствующая преобразованию  $aa$ .

В зависимости от свойств преобразующих функций можно получить три принципиально различные картины преобразования:

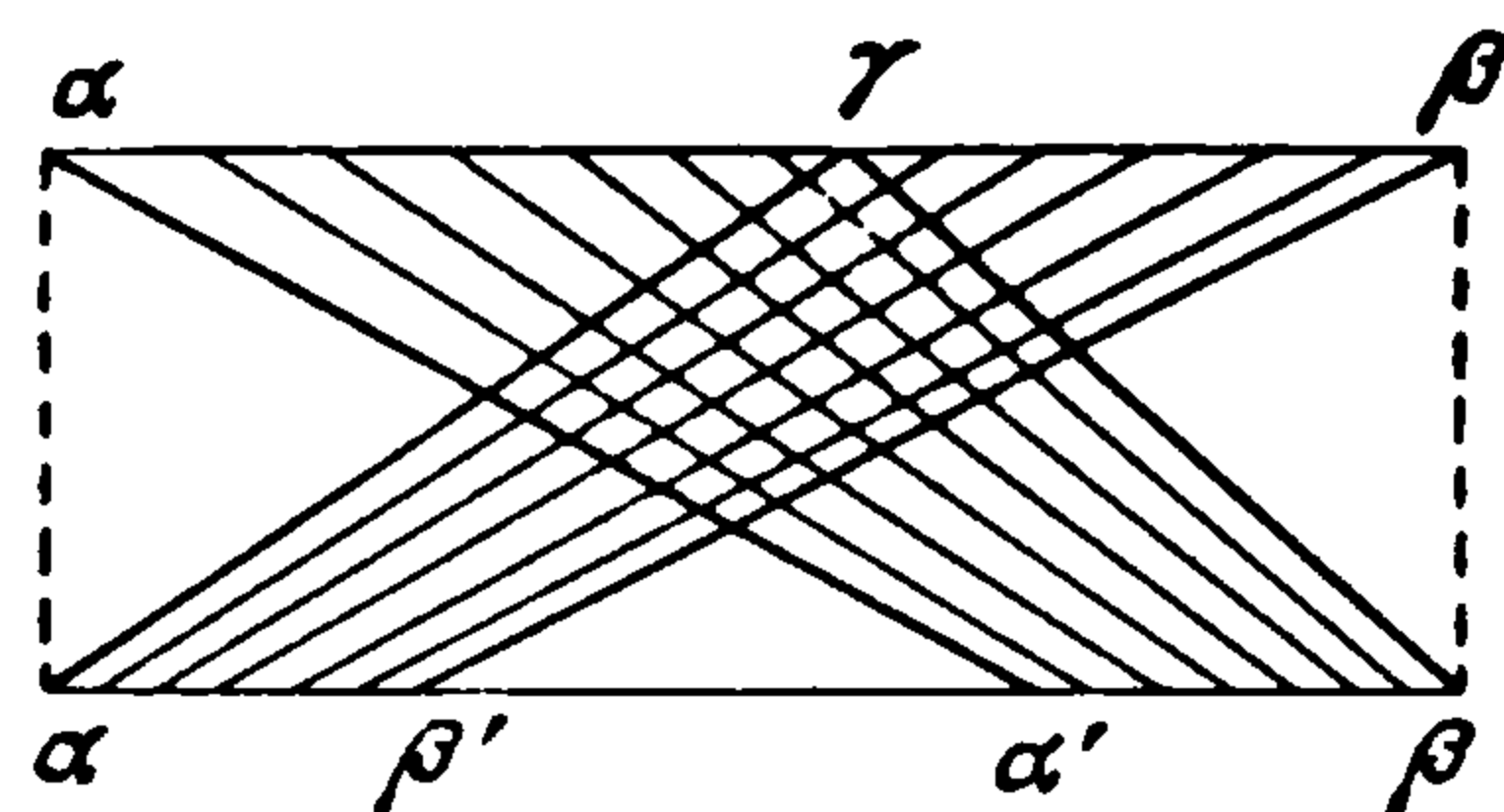
1. Преобразование первого вида взаимно-однозначно на всем интервале (фиг. 10).
2. Преобразование второго вида взаимно-однозначно на всем интервале  $\alpha < A_1 < \beta$  и на части интервала  $\alpha < A_2 < \beta$  (при  $\alpha < A_2 < \beta'$  и при

$\alpha' < A_2 < \beta$ ). На отрезок  $\beta' < A_2 < \alpha'$  преобразования не происходит (фиг. 11).

3. Преобразование третьего вида неоднозначно; на отрезки  $(\alpha, \alpha')$  и  $(\beta' \beta)$  происходит взаимно-однозначное преобразование, на отрезок  $(\alpha' \beta')$  накладываются преобразования (фиг. 12).



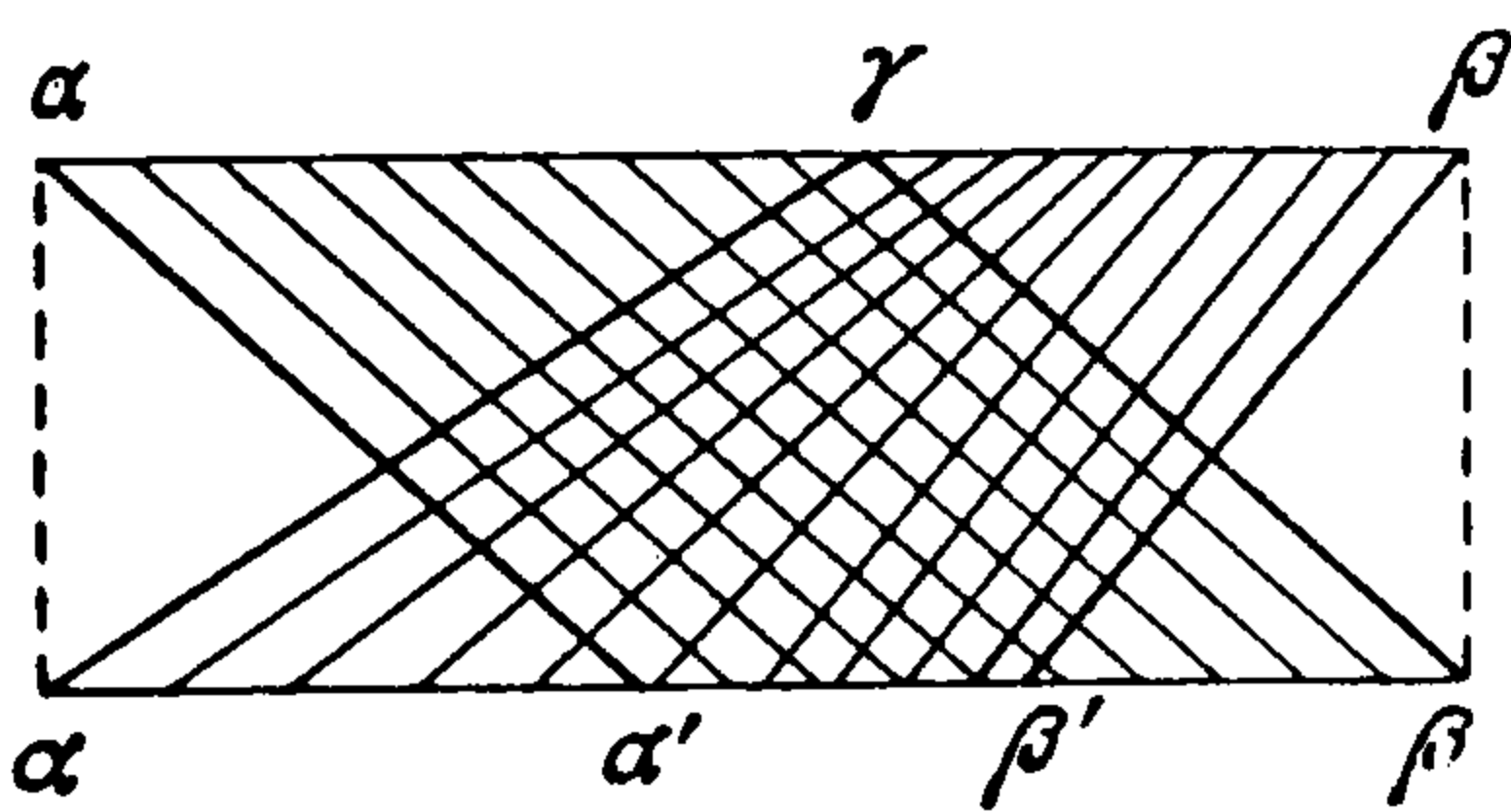
Фиг. 10



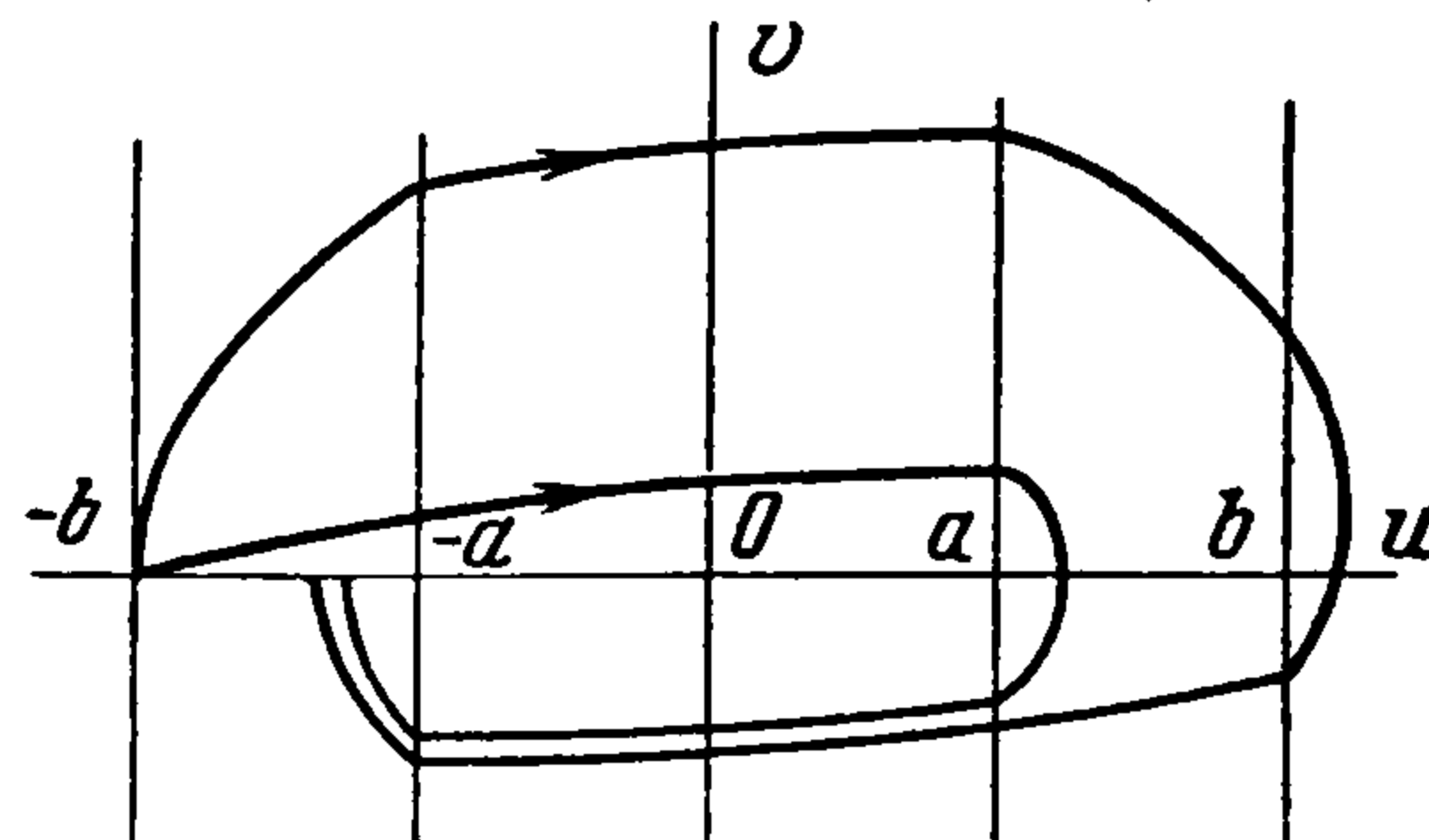
Фиг. 11

Преобразование первого вида будет граничным между преобразованиями второго и третьего видов.

Можно установить связь между видом преобразования и условиями устойчивости предельных циклов, полученными в § 3. Покажем, что при



Фиг. 12



Фиг. 13

$g \frac{du}{dt} > 0$  имеет место преобразование второго вида, при  $g \frac{du}{dt} < 0$  — третьего вида, при  $g \equiv 0$  — первого вида.

Применим формулу (1.7) к последовательности двух преобразований значений  $A_1 = \gamma - 0$  и  $A_1 = \gamma + 0$  (точка  $A_1 = \gamma$  разделяет отрезки значения  $A_1$ , которые должны пройти преобразования  $aa$  и  $ba$  соответственно). Для точки  $\gamma - 0$  будем иметь последовательность преобразований  $(aa - ba)$ , для точки  $\gamma + 0$  — последовательность преобразований  $ba - aa$ . Фазовая траектория для точки  $\gamma - 0$  охватывает траекторию для точки  $\gamma + 0$  (фиг. 13). По тем же соображениям, которые были использованы при доказательстве устойчивости предельных циклов в § 3, получим

$$|\Psi_-| > |\Psi_+|$$

где  $\Psi_-$  соответствует преобразованию точки  $\gamma - 0$ ,  $\Psi_+$  соответствует преобразованию точки  $\gamma + 0$ .

Постоянная  $R$  в формуле (1.7) не зависит от последовательности элементарных преобразований и поэтому в обоих случаях имеет одно и то же значение. Имея в виду, что  $[hA + f(A)]$  — неубывающая функция  $A$ , получим

$$\alpha' > \beta' \quad \text{при } g \frac{du}{dt} > 0, \quad \alpha' = \beta' \quad \text{при } g \equiv 0, \quad \alpha' < \beta' \quad \text{при } g \frac{du}{dt} < 0$$

Иными словами, если возможны только устойчивые предельные циклы, то имеет место преобразование второго вида, если неустойчивые — пре-

образование третьего вида, в пограничном случае — преобразование первого вида. Рассмотрим протекание процесса последовательных приближений для каждого вида преобразования.

Начнем с преобразования второго вида. Предположим, что на интервале  $(\alpha, \beta)$  произвольно задана конечная, нигде не равная нулю функция  $p_1$ . После первого преобразования появится отрезок  $(\beta'\alpha')$ , на котором функция второго приближения  $p_2$  равна нулю. С каждым новым преобразованием удельный вес участков, где функция  $i$ -го приближения равна нулю, повышается. Можно представить себе, что в пределе при неограниченно большом числе преобразований получится система  $\delta$ -функций, что соответствует одному или нескольким устойчивым предельным циклам. Разумеется, изложенные построения непригодны для практического нахождения устойчивых предельных циклов, и они приводятся для того, чтобы установить общую точку зрения для всех видов преобразований.

По-видимому, процесс последовательных приближений для третьего вида преобразования не приведет к системе  $\delta$ -функций, что соответствует факту отсутствия в системе устойчивых предельных циклов.

В том случае, когда имеет место преобразование первого вида, нет надобности использовать для нахождения стационарной плотности вероятности метод последовательных приближений. Выражение для нее можно записать, исходя из следующих соображений.

Для преобразования первого вида мы имеем  $\Psi \equiv 0$ . Поэтому формула (3.2) приобретает вид:

$$\frac{dA_2}{dA_1} = \frac{h + f(A_1)}{h + f(A_2)}$$

Эта формула одинаково справедлива и для преобразования  $ba$  и для преобразования  $aa$ . Таким образом, имеем следующую единую формулу для преобразования плотности вероятности:

$$p_2(A_2) = p_1(A_1) \frac{h + f(A_1)}{h + f(A_2)} \quad (5.1)$$

Это соотношение определяет взаимно-однозначное преобразование функции  $p_1$  из интервала  $(\alpha, \beta)$  на тот же самый интервал. Следовательно, преобразовав при помощи его функцию

$$p^*(A) = \frac{1}{T} [h + f(A)] \quad (5.2)$$

где  $T$  — постоянная, мы получим в результате ту же самую функцию  $p^*(A)$ . Значит, с точностью до постоянного множителя  $p^*(A)$  представляет собой искомую функцию  $p_0(A)$ . Этот постоянный множитель выбирается так, чтобы выполнялось основное интегральное соотношение (4.2).

Окончательно получим следующую формулу для стационарной плотности вероятности:

$$p_0(A) = [h + f(A)] \left( \int_{\alpha}^{\beta} [h + f(A)] dA \right)^{-1} \quad (5.3)$$

Результаты исследования первого вида преобразования, соответствующего полному отсутствию неконсервативной силы, по-видимому, можно использовать для приближенного описания движения в случае преобразования третьего вида, если функция  $g$  по абсолютной величине достаточно мала.

Таким образом, в случае преобразования второго вида движение описывается при помощи предельных циклов, а в случае преобразований первого и третьего видов — при помощи стационарной плотности вероятности. Можно провести известную аналогию в поведении системы, когда она имеет устойчивые предельные циклы и когда она их не имеет. В первом случае движение, начавшееся при произвольных начальных условиях, стремится с течением времени к стационарному состоянию, не зависящему от начальных условий. Во втором случае движение также стремится к стационарному состоянию, не зависящему от начальных условий (или от вероятностного распределения по начальным условиям). Но в первом случае это стационарное состояние является вполне определенным периодическим движением, точно фиксированным на фазовой плоскости, а во втором — непериодическим, с различными неповторяющимися величинами размахов, но это состояние описывается стационарной плотностью вероятности.

По-видимому, если достаточно иметь усредненные характеристики движения за большие промежутки времени, то описание поведения исследуемой системы при помощи плотности вероятности ничем не хуже, чем для системы с устойчивыми предельными циклами — при помощи параметров циклов. Зная стационарную плотность вероятности, мы имеем возможность рассчитать средний «период», среднее значение размаха и т. п. Отметим, что предельные значения некоторых величин (минимальный период, максимальный размах) могут быть получены просто из рассмотрения движения на фазовой плоскости без нахождения стационарной плотности вероятности.

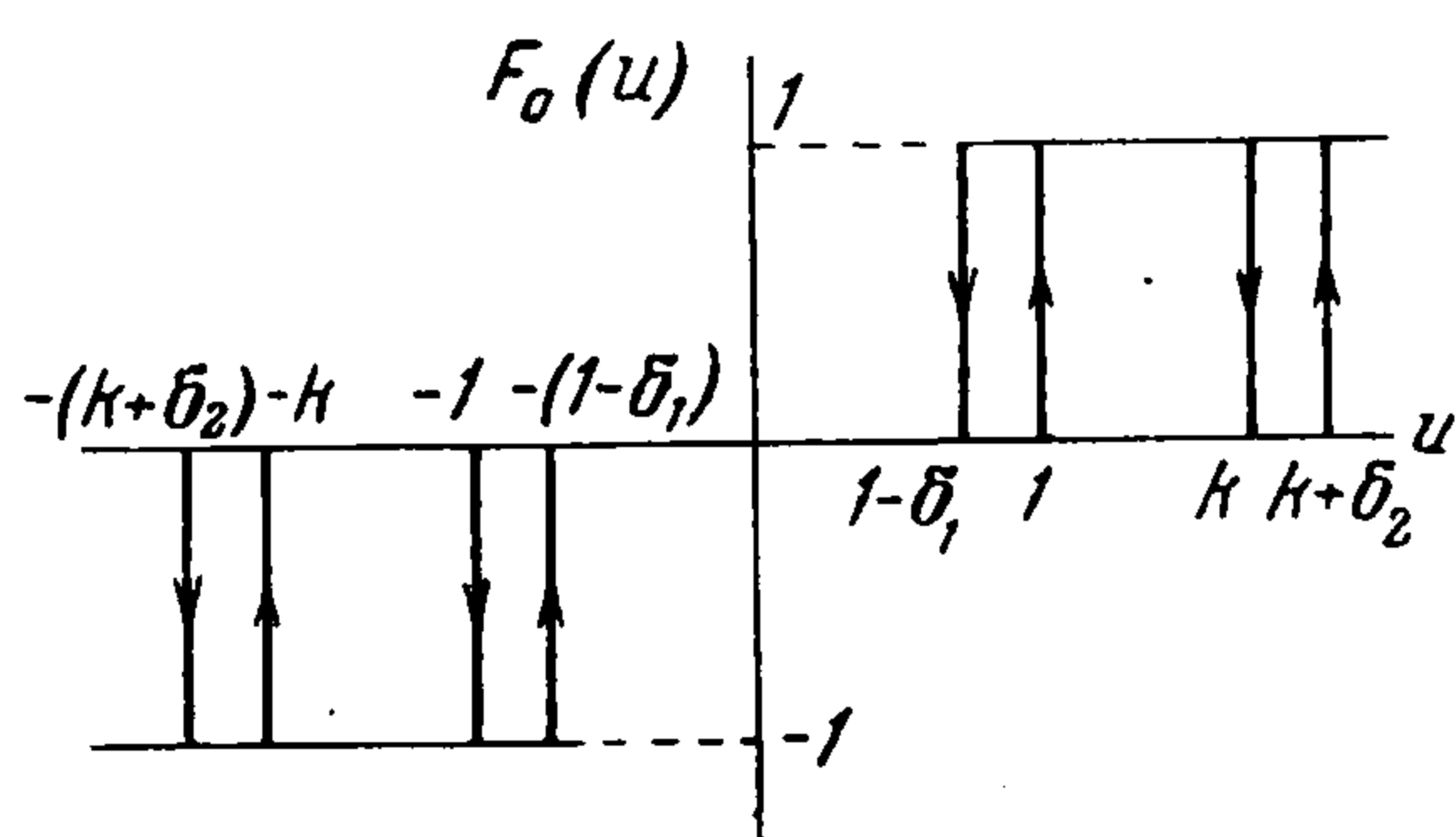
**§ 6. Линейное уравнение (отсутствие устойчивых циклов).** Возвращаемся к исходному линейному уравнению (0.1). Произведем следующую замену переменных:

$$\tau = t \sqrt{h}, \quad u^\circ = \frac{u}{a}$$

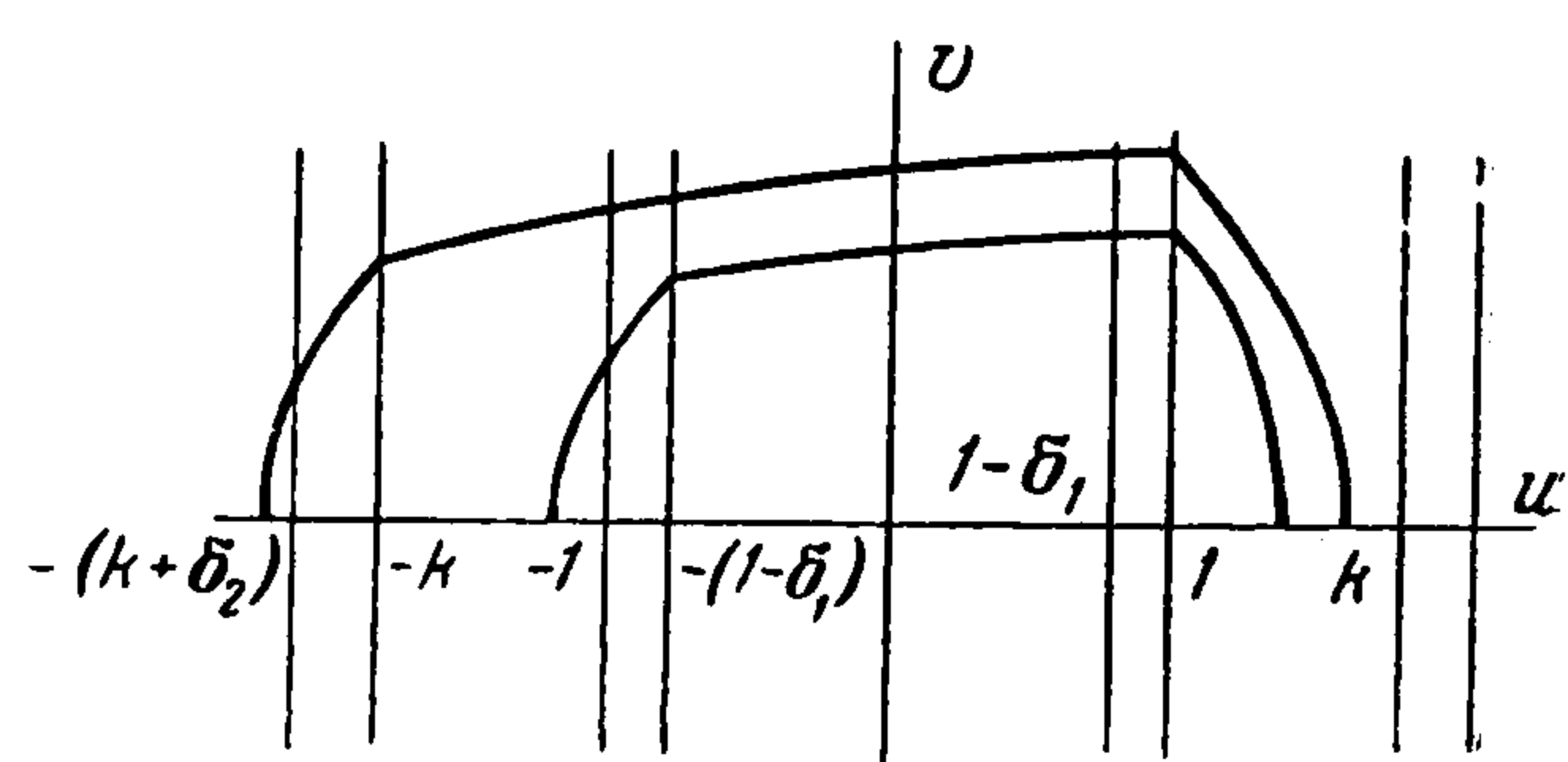
Получим уравнение

$$\frac{d^2 u^\circ}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{du^\circ}{d\tau} + r u^\circ + F_0(u^\circ) = 0 \quad (6.1)$$

где характеристика  $F_0(u^\circ)$  имеет вид, изображенный на фиг. 14. В уравнение входят пять независимых параметров:  $\varepsilon$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ .



Фиг. 14



Фиг. 15

В этом параграфе мы будем рассматривать только значения  $\varepsilon \leq 0$ , что соответствует отсутствию устойчивых предельных циклов.

Начнем с простейшего случая  $\varepsilon = 0$ . При этом условии граница областей  $C$  и  $D$  уходит в  $\infty$  и система устойчива «в большом». Как следует из § 5, при  $\varepsilon = 0$  имеет место преобразование первого вида. Формула (5.3) для стационарной плотности вероятности приобретает вид:

$$p_0(A) = (1 + rA) \left( \int_{\alpha}^{\beta} (1 - rA) dA \right)^{-1} = \frac{1 + rA}{(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}r(\beta^2 - \alpha^2)} \quad (6.2)$$

Пределы интегрирования устанавливаются из рассмотрения движения на фазовой плоскости (фиг. 15). Уравнения отрезков фазовых траекторий имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} r u^{\circ 2} &= C_1 && \text{на участках, где } F_0(u^\circ) = 0 \\ \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} r u^{\circ 2} + u^\circ \operatorname{sgn} u^\circ &= C_2 && \text{на участках, где } F_0(u^\circ) = 1 \operatorname{sgn} u^\circ \end{aligned}$$

После «сшивания» отрезков фазовых траекторий по прямым  $u^\circ = -(1 - \delta_1)$  и  $u^\circ = 1$  для преобразования  $aa$  и по прямым  $u^\circ = -k$  и  $u = 1$  для преобразования  $ba$  получим

$$\begin{aligned} A_2 &= \sqrt{\left(A_1 + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{2}{r}(k-1)} - \frac{1}{r} && \text{(преобразование } ba) \\ A_2 &= \sqrt{\left(A_1 + \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2}{r}\delta_1} - \frac{1}{r} && \text{(преобразование } aa) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Значения  $\alpha$  и  $\beta$  получим, преобразуя по этим формулам величину  $A_1 = k + \delta_2$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\left(k + \delta_2 + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{2}{r}(k-1)} - \frac{1}{r} \\ \beta &= \sqrt{\left(k + \delta_2 + \frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2}{r}\delta_1} - \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Через рассчитанные таким образом значения  $\alpha$  и  $\beta$  определяется средняя амплитуда:

$$A_0 = \int_{\alpha}^{\beta} A p_0(A) dA = \frac{1/2(\beta^2 - \alpha^2) + 1/3r(\beta^3 - \alpha^3)}{(\beta - \alpha) + 1/2r(\beta - \alpha^2)} \quad (6.5)$$

Зависимость средней амплитуды  $A_0$  от  $k$  при  $\delta_1 = 1.0$  и  $\delta_1 = 0.5$  для различных значений  $r$  представлена на фиг. 16 и 17. Там же нанесены кривые максимальных и минимальных значений  $A$  ( $A = \alpha$  и  $A = \beta$ ).

При  $r = 0$  значения  $A$  в области  $(\alpha, \beta)$  равновероятны и формула (6.5) принимает вид:

$$A_0 = 1/2(\alpha + \beta)$$

Зависимость величины «полупериода» от величины начального размаха  $A_1$  при  $r = 0$  выражается формулами:

для преобразования  $ba$

$$T = 2\sqrt{2(A_1 - k)} + \frac{k+1}{\sqrt{2(A_1 - k)}} \quad (6.6)$$

для преобразования  $aa$

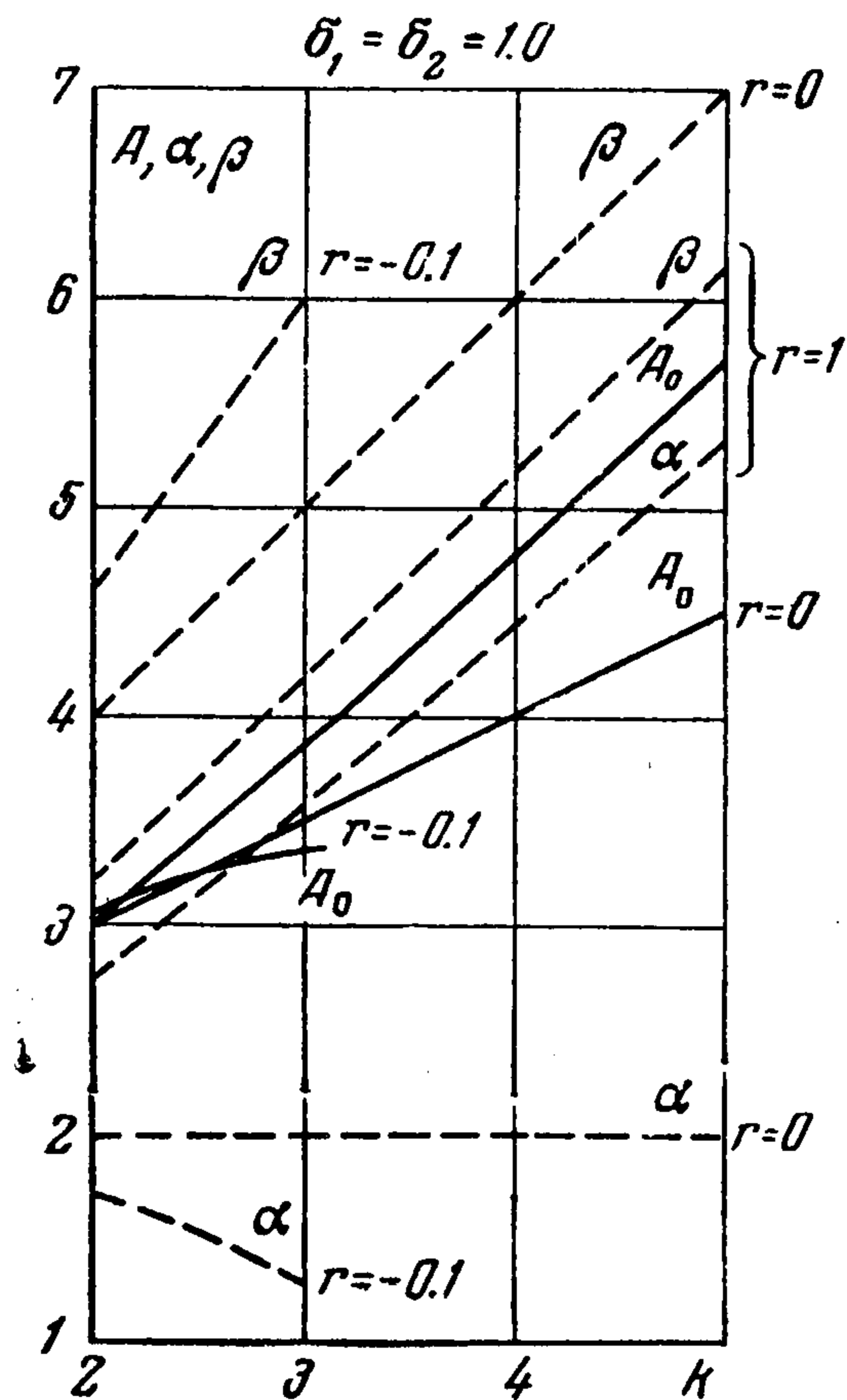
$$T = 2\sqrt{2(A_1 - 1 + \delta_1)} + \frac{2 - \delta_1}{\sqrt{2(A_1 - 1 + \delta_1)}} \quad (6.7)$$

Средний полупериод  $T_0$  может быть рассчитан по формуле

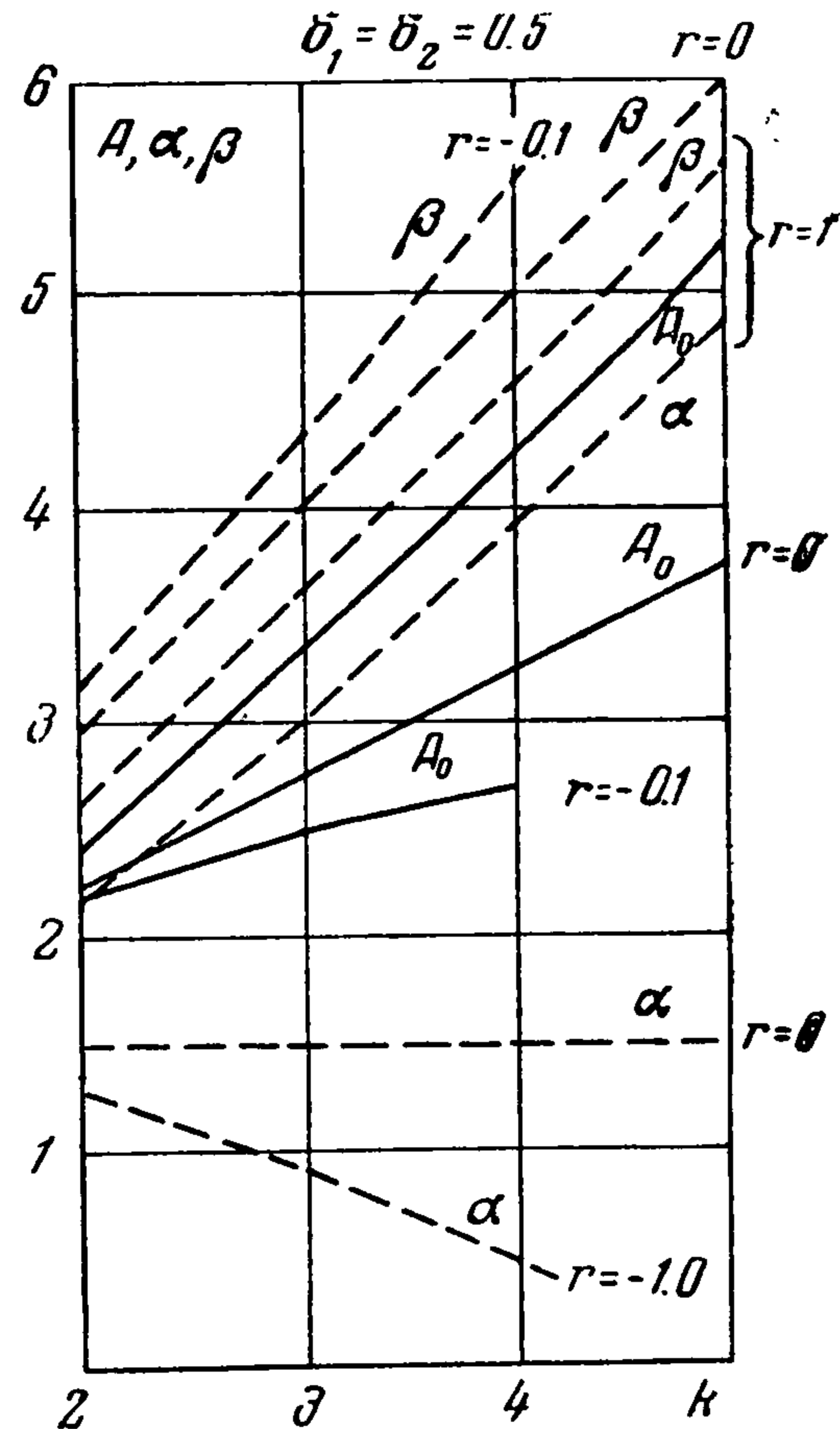
$$T_0 = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} T(A) dA \quad (6.8)$$

Зависимость  $T_0$  от  $k$  при  $\delta_1 = 1.0$  и  $\delta_2 = 0.5$  представлена на фиг. 18.

Переходим к рассмотрению характеристик движения при  $\varepsilon < 0$ . Зависимость  $A_2$  от  $A_1$ , которая может быть получена, как и (6.3), методом



Фиг. 16



Фиг. 17

«сшивания» решений, не записывается в явном виде. Ограничимся случаем, когда  $r = 0$ . Тогда уравнения, определяющие  $A_2$  через  $A_1$ , имеют следующий вид:

для преобразования  $aa$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 [A_1 - (1 - \delta_1)] &= \varepsilon v_1 + \ln(1 - \varepsilon v_1) \\ \varepsilon^2 [A_2 - 1] &= \varepsilon v_2 - \ln(1 + \varepsilon v_2) \\ v_1 - v_2 &= \varepsilon(2 - \delta_1) \end{aligned} \quad (6.9)$$

для преобразования  $ba$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 [A_1 - k] &= \varepsilon v_1 + \ln(1 - \varepsilon v_1) \\ \varepsilon^2 [A_2 - 1] &= \varepsilon v_2 - \ln(1 - \varepsilon v_2) \\ v_1 - v_2 &= \varepsilon(k + 1) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Выражение производной для обоих преобразований может быть записано в форме

$$\frac{dA_2}{dA_1} = \frac{v_2(1 - \varepsilon v_1)}{v_1(1 + \varepsilon v_2)}$$

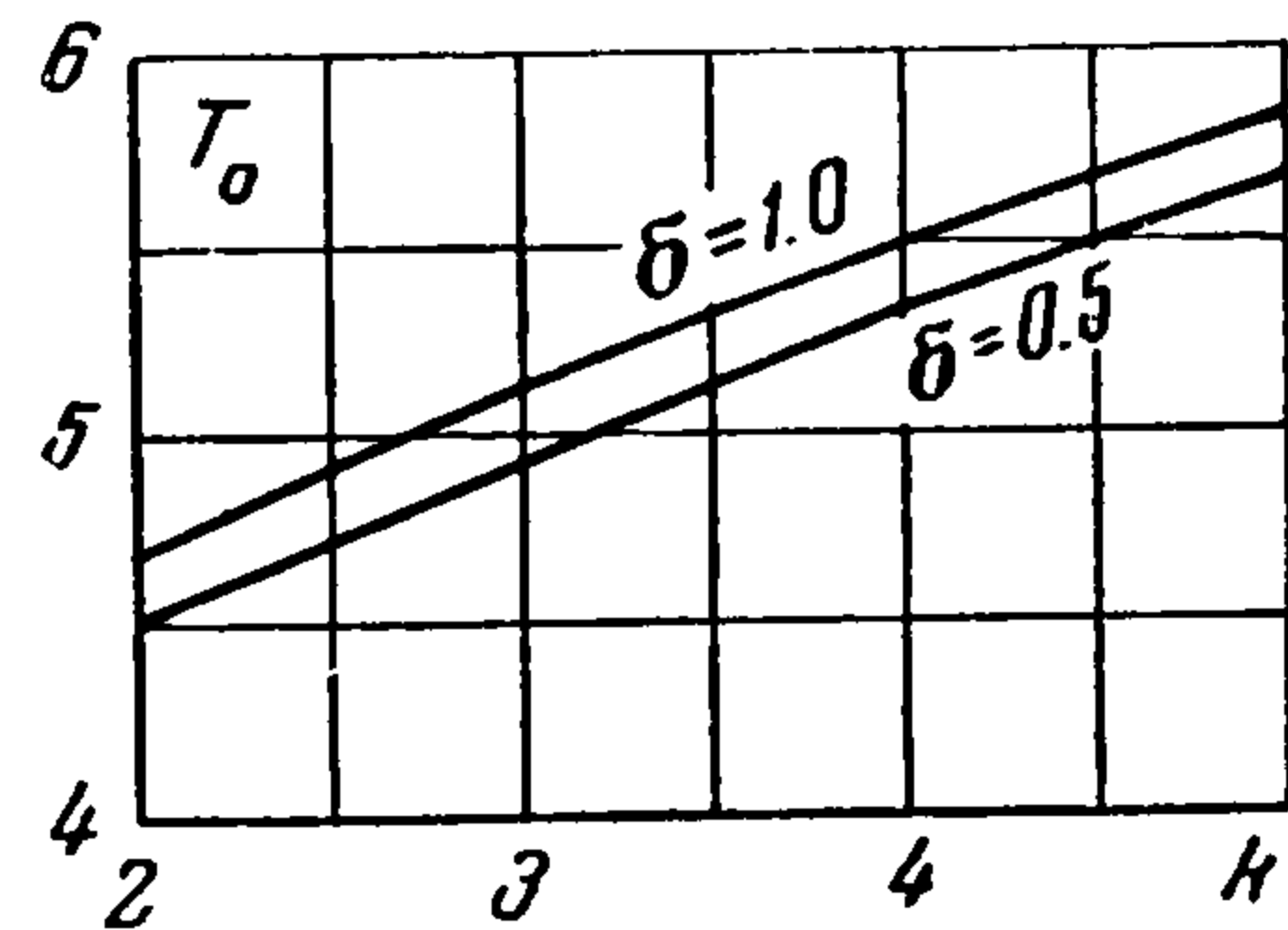
Практический расчет зависимости  $A_2$  от  $A_1$  производится в таком порядке: задаемся значением  $v_1$ , по нему определяем  $v_2$ , а затем находим  $A_1$  и  $A_2$ .

При исследовании движения прежде всего встает вопрос о границе области устойчивости. Для ее определения нужно найти периодическое решение ( $A_1 = A_2$ ) системы уравнений (6.10), соответствующей преобра-

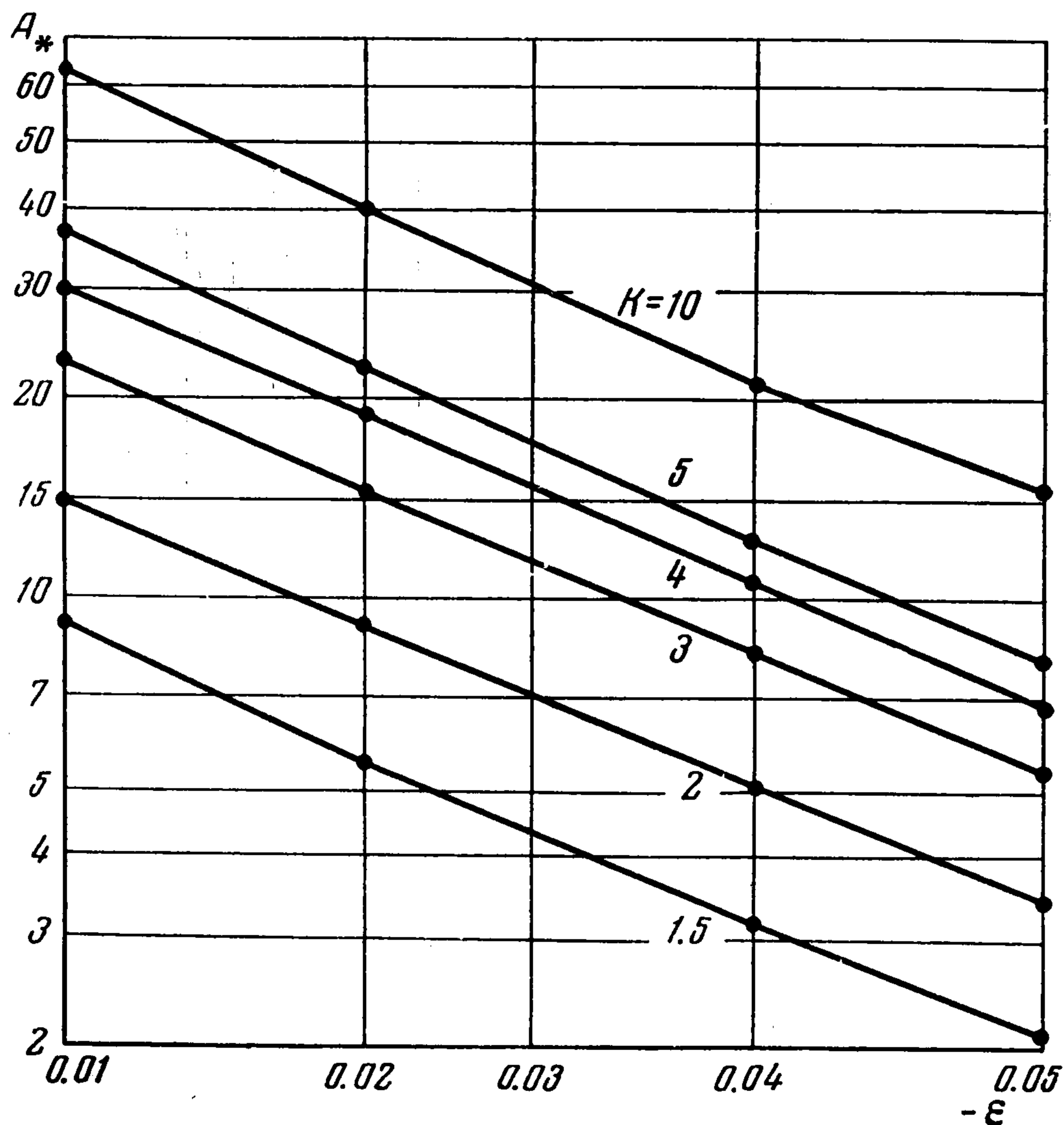
зованию  $ba$ , т. е. найти амплитуду наибольшего неустойчивого предельного цикла  $A_*$ . Зависимость  $A_*$  от  $\varepsilon$  при различных значениях  $k$  представлена на фиг. 19.

Практический расчет стационарной плотности вероятности по методу последовательных приближений является весьма трудоемким процессом. Расчеты удобно вести не в общем виде, так как уже для второго приближения формулы теряют обзорность, а численно, используя графические построения. Положение еще более усложняется тем обстоятельством, что приходится иметь дело с функциями, имеющими разрывы, причем число разрывов с каждым приближением все увеличивается. Но в некоторых случаях, когда не требуется слишком большой точности, можно наметить некоторые пути упрощения расчетов.

Так, например, при  $r = 0$  в формуле (4.5) пересчета вероятности множители при  $p_1(A_1)$  мало зависят от  $A_1$  в широком интервале изменения  $A_1$ . Поэтому эти множители приближенно можно считать постоянными, имеющими различные значения для преобразований  $aa$  и  $ba$ . Если взять за нулевое приближение постоянную, то все дальнейшие преобразования сведутся к последовательному наложению ступен-



Фиг. 18



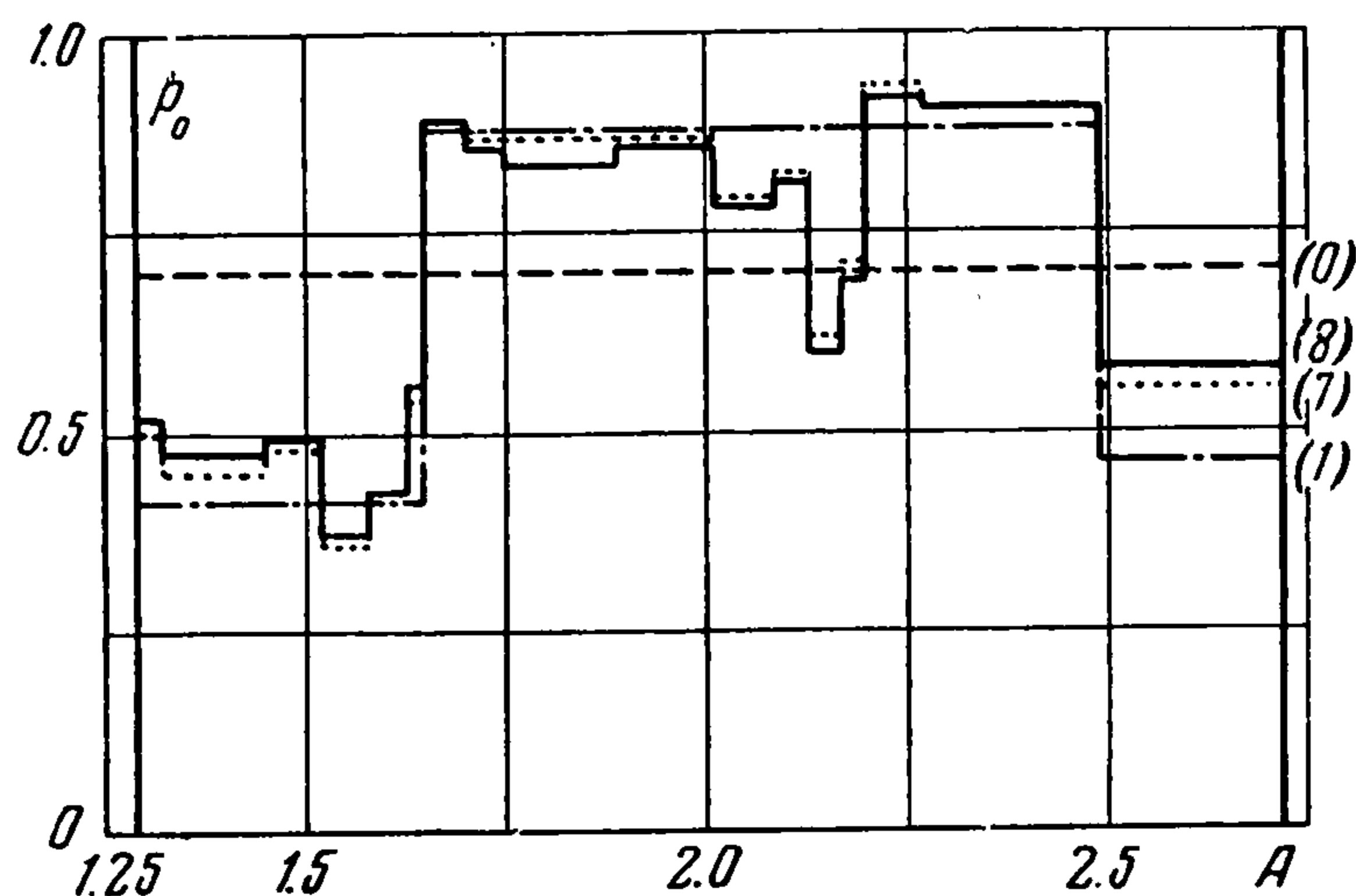
Фиг. 19

чатых функций. Расчет сводится к определению координат точек разрывов и к определению самих величин разрывов.

В качестве примера приведены результаты расчета стационарной плотности вероятности при следующих значениях параметров (фиг. 20, 21):

- 1)  $k = 1.9, \quad \varepsilon = -0.1, \quad \delta_1 = 0.1, \quad \delta_2 = 0.1$
- 2)  $k = 2.9, \quad \varepsilon = -0.01, \quad \delta_1 = 0.1, \quad \delta_2 = 0.1$

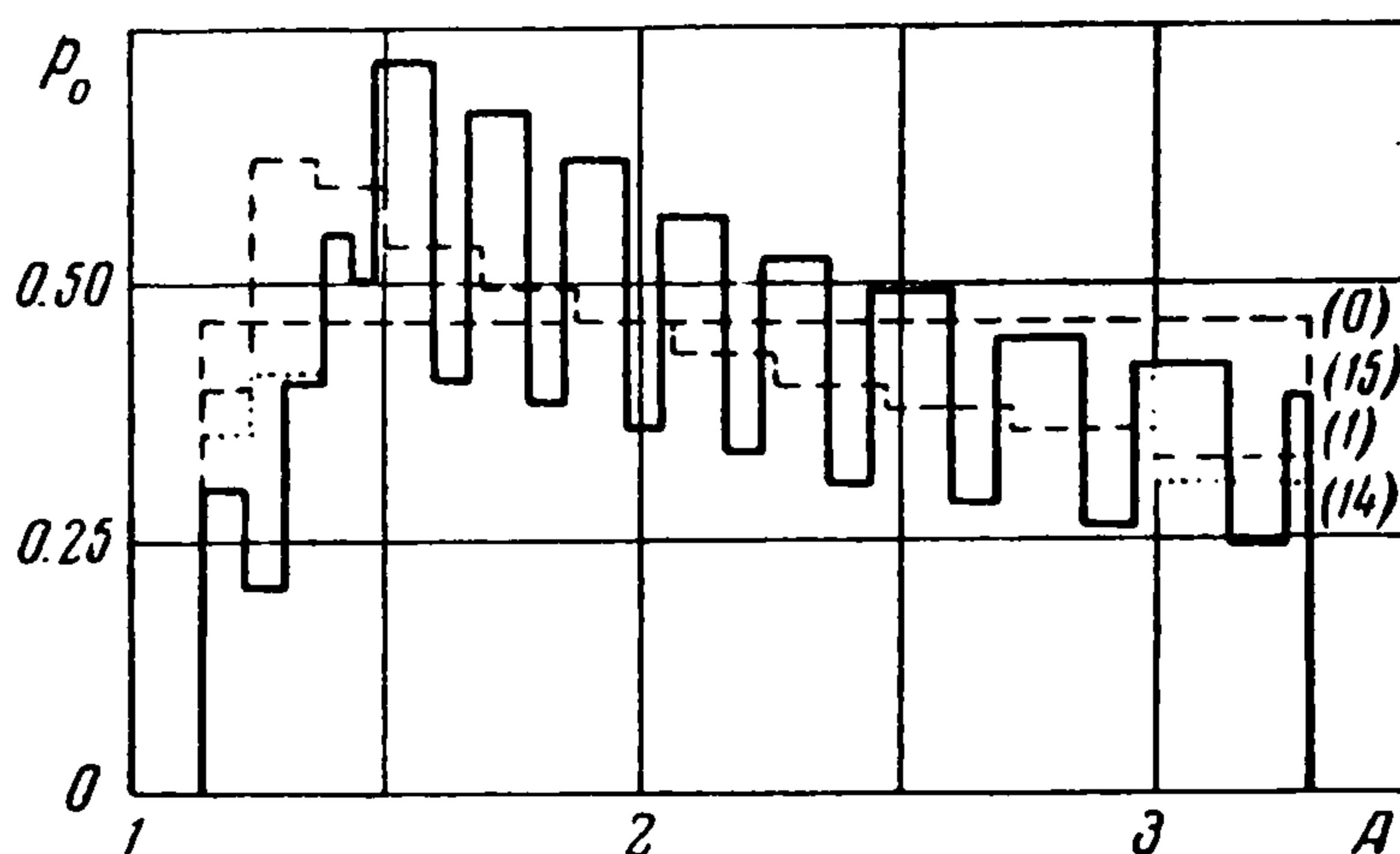
На этих графиках нанесены ломаные линии, соответствующие нулевому, первому, предпоследнему и последнему приближениям. Как видно из приведенных примеров, первое приближение уже передает в основных чертах ход кривой стационарной плот-



Фиг. 20

ности вероятности, хотя в отдельных местах между первым и последним приближениями существуют значительные расхождения.

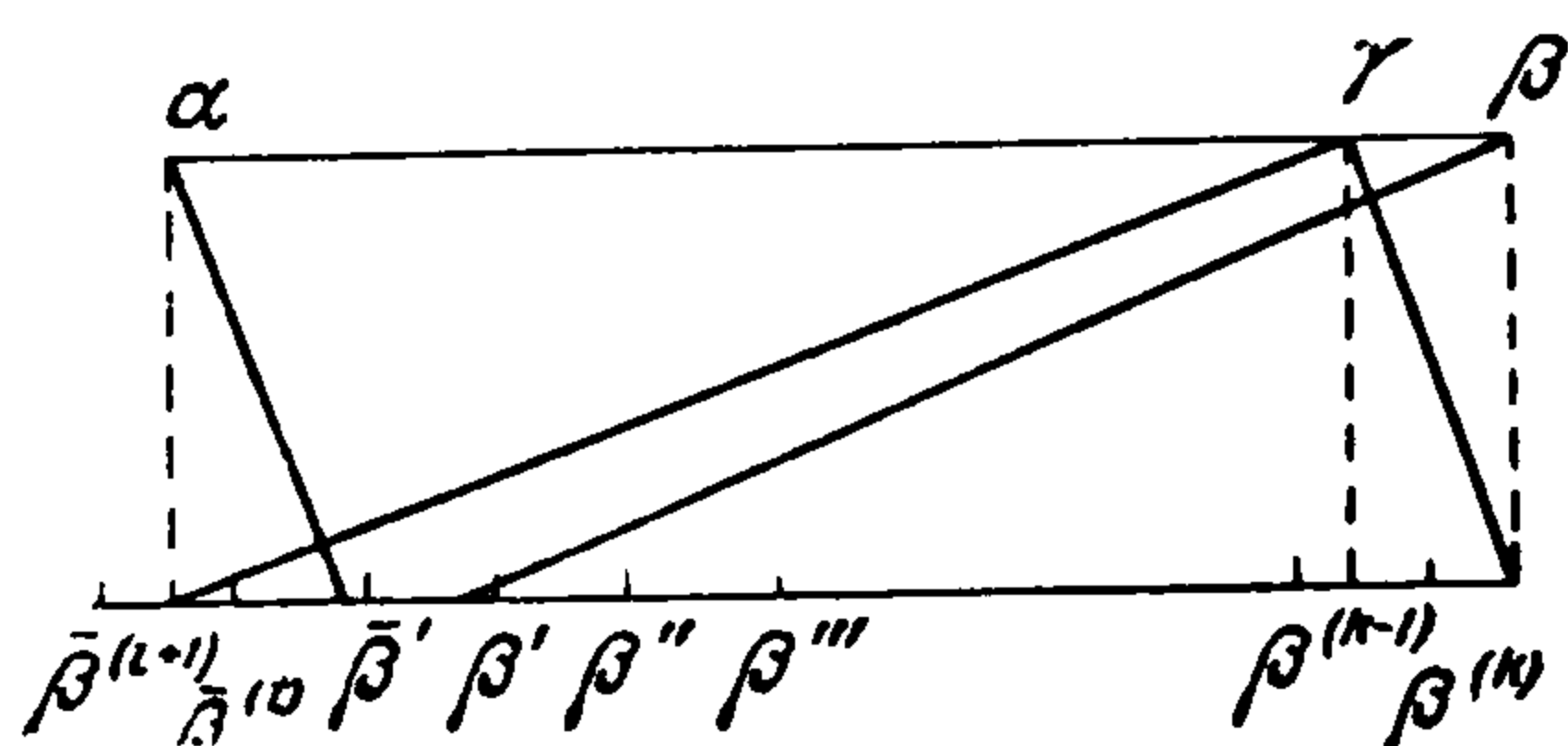
Ввиду недостаточности расчетного материала нельзя сделать обоснованные выводы относительно необходимого числа приближений. Можно лишь указать, что в некоторых случаях их число может быть достаточно большим. Так, на фиг. 20 предпос-



Фиг. 21

леднее, седьмое, приближение еще заметно отличается от последнего. Однако для реальных задач, по-видимому, точное знание кривой стационарной плотности вероятности не будет являться необходимым, так как конечным результатом расчета будут

средние значения величин, а они мало зависят от «тонкой структуры» кривой. Так, для двух приведенных примеров средние значения размахов  $A_0$ , сосчитанные по первому приближению, составляют соответственно  $A_0^{(1)} = 2.01$ ,  $A_0^{(1)} = 2.14$ , а по последнему приближению  $A_0^{(8)} = 2.03$ ,  $A_0^{(15)} = 2.15$ .



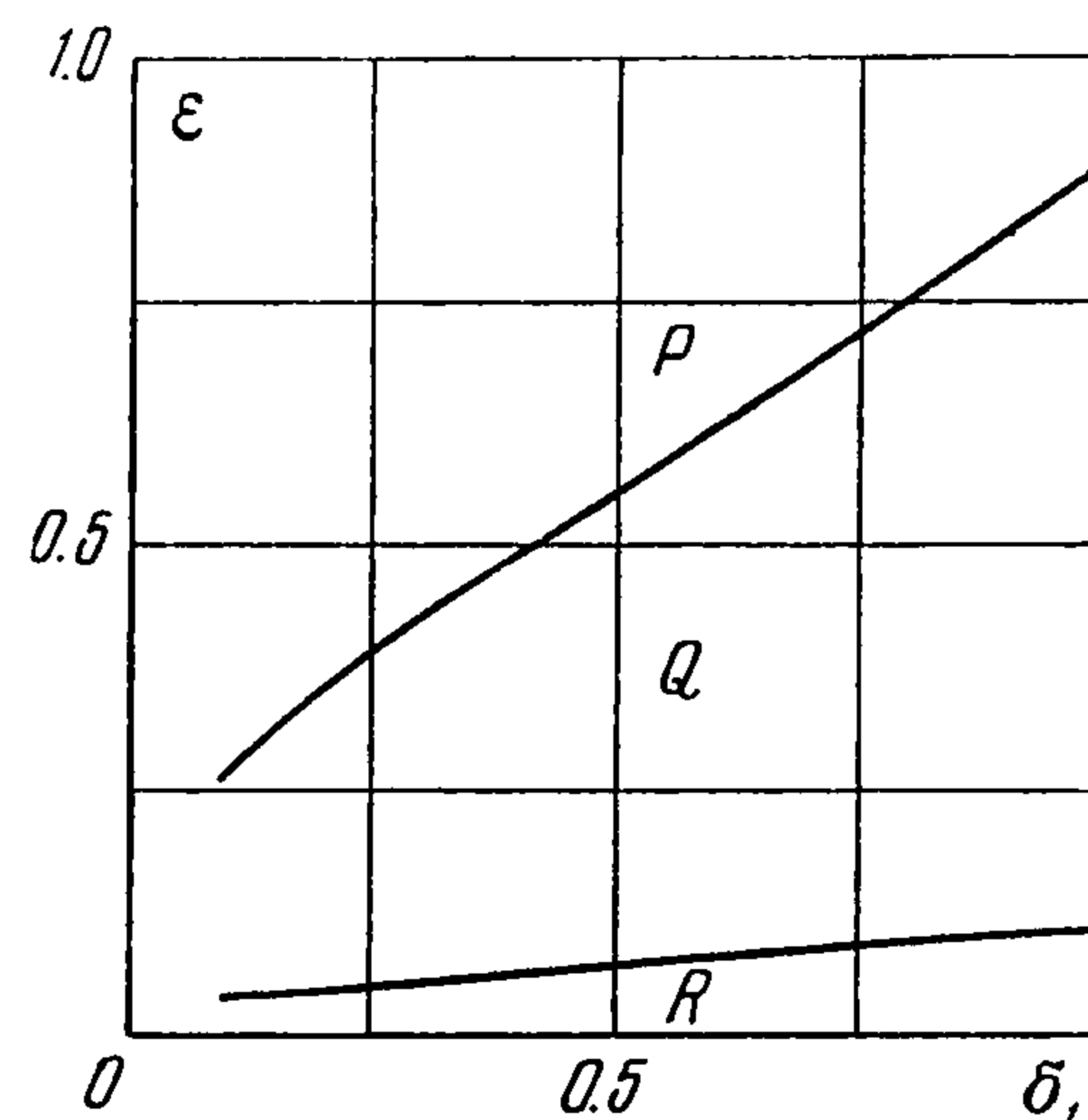
Фиг. 22

Было бы желательным найти пути получения «грубой структуры» кривой стационарной плотности вероятности с минимальной затратой труда. Это оказывается возможным по крайней мере для малых значений  $\varepsilon$  и  $\delta_1$  по сравнению с  $k$ .

Несколько подробнее рассмотрим процесс преобразования для малых  $\varepsilon$  и  $\delta$  (фиг. 22). Зона  $(\gamma, \beta)$ , точки которой должно пройти преобразование  $ba$ , составляет малую часть всего интервала  $(\alpha, \beta)$  и тем меньшую,

чем меньше  $\varepsilon$  и  $\delta_1$ . Поэтому отрезок, который при втором преобразовании перейдет в отрезок  $\beta'\gamma$  (на этот отрезок не производится преобразования с отрезка  $(\gamma\beta)$ ), составляет большую часть всего интервала. Пусть точка  $\beta'$  последовательно преобразуется в значения  $\beta'', \beta''', \dots, \beta^{(k)}$ , так что  $\beta^{(k)} > \gamma$ , но  $\beta^{(k-1)} < \gamma$ . Стационарная плотность вероятности должна обладать следующим интегральным свойством:

$$\begin{aligned} \int_{\beta'}^{\beta''} p_0(A) dA &= \int_{\beta''}^{\beta'''} p_0(A) dA = \dots = \\ &= \int_{\beta^{(k-1)}}^{\beta^{(k)}} p_0(A) dA = \Delta W \end{aligned} \quad (6.11)$$



Фиг. 23

Справедливость этой цепи равенств следует из факта взаимной однозначности преобразования для интервалов. Величина суммарной вероятности для каждого интервала неизвестна, однако ее можно приближенно оценить. Основное интегральное свойство стационарной плотности вероятности (4.2) в данном случае может быть записано в форме

$$(k-1)\Delta W + W_1 + W_2 = 1 \quad (6.12)$$

где  $W_1$  — суммарная вероятность для интервала  $(\alpha, \beta')$ ,  $W_2$  — суммарная вероятность для интервала  $(\beta^{(k)}\beta)$ .

Так как на отрезок  $(\beta^{(k)}\beta)$  при предыдущем преобразовании была преобразована часть отрезка  $(\beta^{(k-1)}\beta^{(k)})$ , то

$$0 < W_2 < \Delta W \quad (6.13)$$

Остается оценить величину  $W_1$ . Найдем значение  $\beta^{0'}$ , которое после преобразования  $aa$  дает  $\beta'$ , затем  $\beta^{0''}$ , которое дает  $\beta^{0'}$ , и т. д. до  $\beta^{0^{(i)}}$ , так что  $\beta^{0^{(2)}} > \alpha$ , но  $\beta^{0^{(i+1)}} < \alpha$ . Очевидно, что тогда

$$\Delta W < W_1 < (i+1)\Delta W \quad (6.14)$$

После подстановки (6.13) и (6.14) в (6.12) получим оценку для  $\Delta W$ :

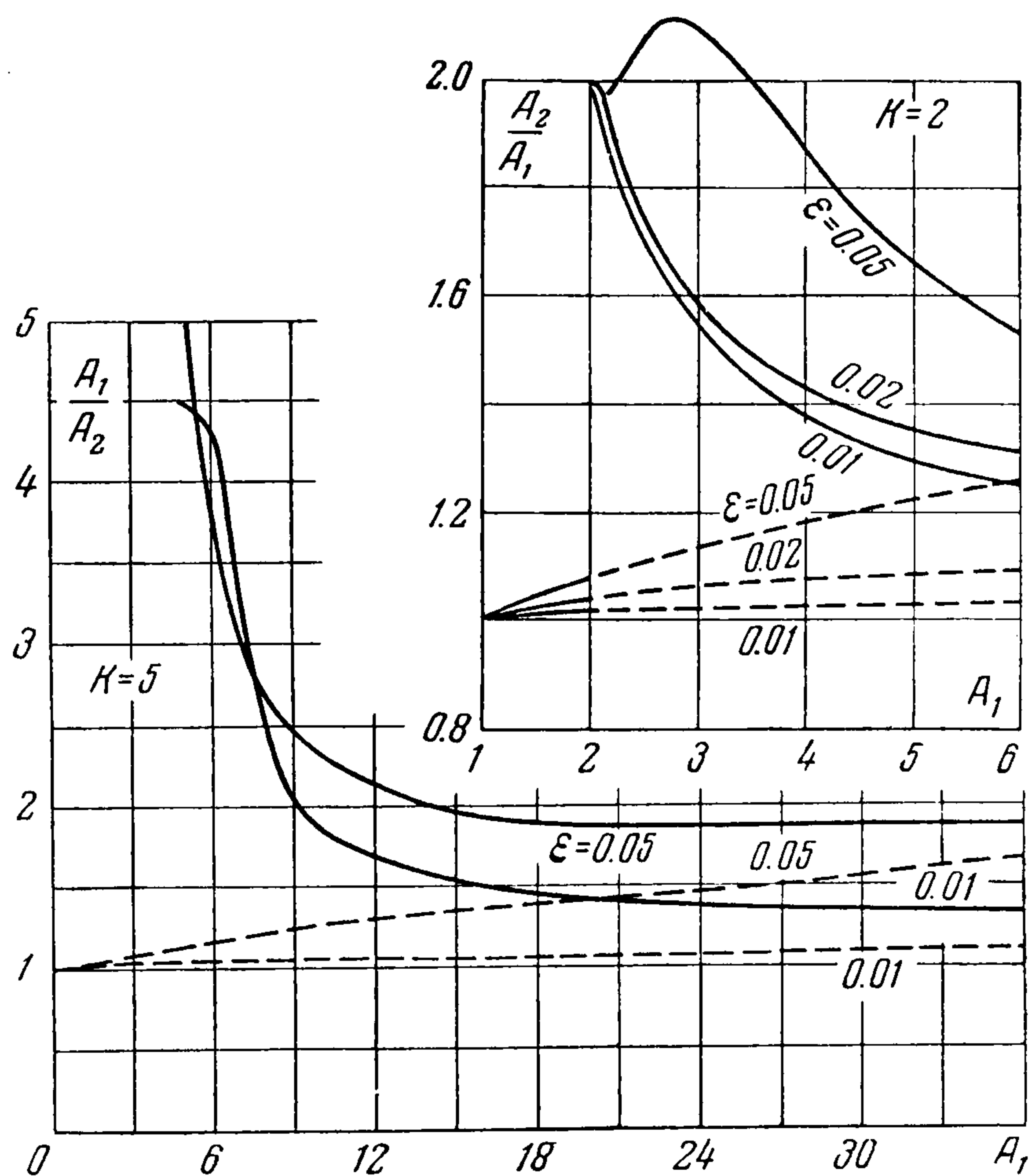
$$\frac{1}{k+i+1} < \Delta W < \frac{1}{k}$$

Если  $k$  велико, а  $i$  мало, то значение  $\Delta W$  может быть определено с достаточной для практики точностью. Зная  $\Delta W$ , мы можем приближенно построить функцию  $p_0$ , например, в виде ступенчатой функции [ее разрывы в точках  $\beta', \beta'', \dots, \beta^{(k)}$  определяются из условий (6.11)], или в виде непрерывной кривой. Суммарные вероятности на крайних отрезках  $W_1$  и  $W_2$  остаются при таком способе расчета неопределенными.

**§ 7. Линейное уравнение (возможность устойчивых циклов).** Рассмотрим уравнение (6.1), когда  $\varepsilon > 0$ . Как следует из § 4, в этом случае система может иметь устойчивые предельные циклы. Более детальное рассмотрение показывает, что в системе или совсем нет циклов, или есть один устойчивый цикл. На фиг. 23 в координатах  $\varepsilon, \delta_1$  построены область  $P$  отсутствия автоколебаний, область  $Q$  простых предельных циклов и область  $S$  сложных предельных циклов для случая  $r = 0$  и

$k = 2$ . Важно отметить, что система всегда устойчива «в большом» и что при любом соотношении между параметрами амплитуда предельного цикла не превышает значения  $k + 2\delta_2$ .

Если в системе нет предельного цикла, то следует отдельно говорить о воздействии реле на систему при малых и при больших отклонениях. При малых отклонениях наличие ненулевого  $\delta_1$  приводит к ухудшению



Фиг. 24

демпфирования. При отклонениях, превышающих  $k$ , когда используется «опережающее» действие реле, демпфирование резко увеличивается. На фиг. 24 представлены зависимости отношения двух последовательных размахов для системы при  $r = 0$  для различных значений  $\delta$  в зависимости от начального размаха  $A_1$  при условии  $r = 0$ . Пунктиром в областях  $A_1 > k$  показано отношение амплитуд, которое имело бы место, если бы реле имело обычную характеристику. Как видно из приведенных кривых, демпфирующее действие реле с опережающей характеристикой сильнее всего сказывается при начальных отклонениях, немного превышающих значение  $k + \delta_2$ .

Поступила 15 VI 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. С. Двухпозиционный регулятор температуры с зоной опережения. Сборник памяти А. А. Андропова. Изд. АН СССР, М., 1955.
2. Андронов А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний. Ч. 1. ОНТИ, 1937.