**Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958**
**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ В СОМНИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

**В. И. Зубов**
(Ленинград)

Рассматривается один способ исследования устойчивости нулевого решения системы $n+k$ обыкновенных дифференциальных уравнений, пригодный в сомнительных случаях.

Этот способ состоит в исследовании устойчивости нулевого решения отдельно для $k$ и для $n$ уравнений, получающихся из исходной системы.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} &= f_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, t) \qquad (s = 1, \ldots, k) \\ \frac{dx_j}{dt} &= g_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1}$$

Будем считать, что функции $f_s$ и $g_j$ заданы в области $|X| \leqslant H$, $|Y| \leqslant H$, $t \geqslant 0$ и непрерывные в этой области.

Предположим далее, что

$$f_s \equiv 0 \text{ при } |Y| = 0$$

$$g_j \equiv 0 \text{ при } |X| = |Y| = 0 \quad (s = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$$

*Определение 1.* Нулевое решение системы (1) назовем устойчивым по Ляпунову, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|X^{(0)}| < \delta$, $|Y^{(0)}| < \delta$ будет $|X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon$, $|Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon$ при $0 \leqslant t_0 \leqslant t$.

Здесь $X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)$, $Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)$ обозначена совокупность функций $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_k$, представляющих собой решение системы (1), определенное условием

$$x_i = x_i^{(0)}, \ y_j = y_j^{(0)} \text{ при } t = t_0 \ (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k)$$

Если нулевое решение системы (1) устойчиво и $X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0) \to 0$, $Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, то нулевое решение будем называть асимптотически устойчивым. Если в первой группе уравнений системы (1) величины $x_1, \ldots, x_n$ заменить на непрерывно дифференцируемые функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, заданные при $t \geqslant 0$ и такие, что $|X(t)| < H$, то мы получим систему $k$ дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_s^0}{dt} = f_s(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \quad y_1^0, \ldots, y_k^0) \tag{3}$$

имеющую нулевое решение.

*Определение 2.* Нулевое решение системы (3) назовем сильно устойчивым, если можно указать число $H_1 > 0$ такое, что для каждого $\varepsilon_1 > 0$

существует $\delta_1 > 0$, обладающее свойством $|Y^0(t, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon_1$ при $0 \leqslant \leqslant t_0 \leqslant t$ и $|Y^{(0)}| < \delta_1$ для любых непрерывно дифференцируемых функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, заданных при $t \geqslant 0$ и $|X| < H_1$. Если при этом $Y^0 \to 0$ при $t \to +\infty$, то нулевое решение системы (2) назовем сильно асимптотически устойчивым.

Введем в рассмотрение функцию

$$W(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$$

*Определение 3.* Будем говорить, что функция $W(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ строго определенно-отрицательна по $X$, если можно указать функции

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) > 0 \qquad \text{при } X \neq 0 \ (s = 1, \ldots, k)$$

такие, что функция $W(t, x_1, \ldots, x_n, y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_k(x_1, \ldots, x_n))$ будет определенно-отрицательной при любом выборе непрерывных функций $y_s(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию

$$|y_s(x_1, \ldots, x_n)| < \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Например, функция $W = -x^2 + y \sin t$ будет строго определенно-отрицательной,— здесь можно положить $\varphi = {}^1/_2 x^2$.

*Теорема 1.* Если:

1) нулевое решение системы (2) сильно устойчиво (сильно асимптотически устойчиво),

2) существует непрерывно дифференцируемая положительно-определенная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, равномерно непрерывная по $t$ при $X = 0$, $V(t, X) \to 0$ при $X \to 0$ равномерно относительно $t \geqslant 0$,

3) функция

$$W(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} g_j(t, X, Y)$$

является строго определенно-отрицательной по $X$, то нулевое решение системы (1) будет также устойчиво (асимптотически устойчиво).

*Доказательство.* В силу условия 2 существует число $h > 0$ и $h < H_1$ такое, что при $\varepsilon > 0$

$$\inf V(t, X) = m_1(\varepsilon) > 0 \qquad (t \geqslant 0, \ \varepsilon \leqslant |X| \leqslant H)$$

Закрепим некоторое число $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$ и выберем положительное число $m < m_1(\varepsilon)$.

В силу условия 2 теоремы 1 существует число $\lambda < \varepsilon$ такое, что функция $V(t, X) < m$ при $|X| < \lambda$, $t \geqslant 0$.

В силу условия 3 существует число $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$ такое, что при $|Y| < \varepsilon_1$ будет $W(t, X, Y) < 0$ при $t \geqslant 0$ и $\lambda \leqslant |X| \leqslant \varepsilon$.

В силу условия 1 по числу $\varepsilon_1 > 0$ можно указать число $\delta_1 > 0$, связанное с $\varepsilon_1$ соотношением, указанным в определении 2.

Положим $\delta = \min(\lambda, \delta_1) < \varepsilon$. Покажем, что при $|X^{(0)}| < \delta$, $|Y^{(0)}| < \delta$ будут выполняться неравенства (2).

Пусть это не так. Тогда можно указать число $T$ такое, что

$$|X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, T], \quad |X(T, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| = \varepsilon$$

Как следует из определения 2:

$$|Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon_1 < \varepsilon \quad \text{при } t \in [t_0, T]$$

так как совокупность функций $Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)$ можно считать решением системы (3) на промежутке $[t_0, T]$, в которой в качестве функций $x_j(t)$ выбраны функции $x_j(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)$.

Обозначим через $V(t)$ значение функции $V(t, X)$ на изучаемой интегральной кривой. Ясно, что $V(t_0) < m$, а $V(T) > m$. Функция $V(t)$ непрерывно дифференцируема, поэтому существует число $t_1$ такое, что $V(t_1) = m$, а $V(t) > m$ при $t_1 < t \leqslant T$. Тогда $[dV/dt]_{t=t_1} \geqslant 0$ при $t = t_1$, в то время как имеет место неравенство $\lambda \leqslant |X(t_1, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| \leqslant \varepsilon$, а следовательно, $[dV/dt]_{t=t_1} < 0$. Полученное противоречие доказывает неравенства (2), а тогда, как следует из условия 1 и определения 2,

$$|Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \quad \text{при } t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

Таким образом, нулевое решение системы (1) устойчиво.

Если нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво, то

$$Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0) \to 0 \text{ при } t \to +\infty$$

Пусть $|X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| > \alpha > 0$ при $t \geqslant t_0$. Тогда существует такое число $\tau > t_0$, что $W(t, X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0),\ Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)) < -\sigma < 0$ при $t \geqslant \tau$, следовательно, $V(t) \leqslant V(\tau) - \sigma(t - \tau)$ при $t \geqslant \tau$, что невозможно. Следовательно, $X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0) \to 0$ при $t \to +\infty$.

*Теорема 2.* Если существует непустое множество $B$ $(k+1)$-мерного пространства точек $(t_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)})$, обладающих свойствами:

1) $$\inf_B y_s^{(0)} = 0 \qquad (s = 1, \ldots k), \quad t_0 \geqslant 0$$

2) для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ можно указать точку $(t_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}) \in B$ такую, что $|Y^{(0)}| < \delta$ и $|Y(t, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon$ не имеет места при всех $t \geqslant t_0$ при всевозможном выборе непрерывно дифференцируемых функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, $|X(t)| \leqslant H_2$, где $H_2 < \varepsilon$ — некоторое положительное число, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда по числу $H_2$ можно указать согласно определению 1 число $\delta > 0$ такое, что

$$|X(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < H_2, \qquad |Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < H_2 \tag{4}$$

при $t \geqslant t_0$ для всех $X^{(0)}$ и $Y^{(0)}$ таких, что $|X^{(0)}| < \delta$, $|Y^{(0)}| < \delta$. Возьмем точку $(t_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}) \in B$.

Функции $y_s(t, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}, t_0)$ можно считать решением системы (3), в которую вместо $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ подставлены функции $x_j(t, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}, t_0)$, а тогда неравенство (3) в силу условия 2 теоремы не может иметь места при всех $t \geqslant t_0$. Полученное противоречие показывает, что нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Отметим ряд частных случаев сформулированных выше теорем.

*Теорема 3.* Если:

1) нулевое решение системы (3) сильно устойчиво (сильно асимптотически устойчиво),

2) нулевое решение системы

$$\frac{dx_j}{dt} = g_j(t, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

равномерно асимптотически устойчиво,

3) функции $g_j(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам в области

$$t \geqslant 0, \quad |X| \leqslant H, \quad |Y| \leqslant H$$

4) функции

$$\frac{\partial g_j(t, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)}{\partial x_i}, \qquad g_j(t, X, Y) - g_j(t, X, 0)$$

$$\frac{\partial g_j(t, X, Y)}{dt} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ограничены по $t$ равномерно в области $|X| < H$, $|Y| < H$, $t \geqslant 0$, то нулевое решение системы (1) также будет устойчиво (асимптотически устойчиво).

*Доказательство.* При выполнении условий 2, 3 и 4 для системы (5) существует [1] функция Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$. Легко проверить, что функция

$$W(t, X, Y) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} g_j$$

является в этом случае строго определенно-отрицательной, поэтому при выполнении условий 2, 3 и 4 выполнены условия 2, 3 теоремы 1, что завершает доказательство настоящей теоремы.

*Замечание.* Условия 2, 3 и 4 теоремы 3 можно ослабить, если воспользоваться результатами работы [2].

*Теорема 4.* Если существует некоторое число $\varepsilon > 0$, такое, что неравенство $|Y(t, X^{(0)}, Y^{(0)}, t_0)| < \varepsilon$ не имеет места при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и $Y^{(0)} \neq 0$ при любом выборе непрерывно дифференцируемых функций

$$x_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad |X(t)| < H_2, \quad t \geqslant 0, \ H_2 > 0$$

достаточно мало, то нулевое решение системы (1) неустойчиво. Здесь, как и выше, через $Y(t, Y^{(0)}, t_0)$ обозначена совокупность функций $y_s$, представляющих собой решение системы (2), обладающее свойством $y_s = y_s^{(0)}$ при $t = t_0$.

*Доказательство.* Возьмем область $t \geqslant 0$, $|Y| \leqslant \varepsilon$. Легко видеть, что она обладает всеми свойствами области $B$, сформулированными в теореме 2. А тогда по теореме 2 нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Отметим, что впервые такой метод исследования вопроса об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений в ряде сомнительных случаев был применен Ляпуновым в работе [3]. Затем этот метод получил свое развитие в работе И. Г. Малкина [4], из которой взят метод доказательства теоремы 1 настоящей статьи.

Поступила 29 IV 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
2. Зубов В. И. К теории 2-го метода Ляпунова. ДАН СССР, т. 100, № 5, 1955.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, М.— Л., 1950.
4. Малкин И. Г. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. ПММ, т. VI, вып. 6, 1942.