

О СИЛЬНОМ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

Н. Н. Кочина, Н. С. Мельникова

(Москва)

Задача о сильном точечном взрыве в идеальном газе была решена Л. И. Седовым, причем было найдено точное ее решение для плоских, цилиндрических и сферических волн [1-3].

Л. И. Седовым была также дана постановка задачи о точечном взрыве в более общих идеальных средах и, в частности, дано решение задачи о точечном взрыве в несжимаемой жидкости [1]. Эти постановки и результаты можно применять для изучения задачи о точечном взрыве в средах, подобных воде.

Ниже дается решение автомодельных задач о точечном взрыве для трех конкретных новых видов уравнений состояния идеальной среды.

1. Для того, чтобы задача о сильном взрыве в сжимаемой среде была автомодельной, достаточно, чтобы внутренняя энергия среды

$$\varepsilon(p, \rho) = \frac{p}{\rho_0} \varphi\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \text{const} \quad (1.1)$$

где φ — произвольная функция своего аргумента [1,4]. В этом случае имеют место следующие соотношения [1].

1. Уравнение адиабаты имеет вид:

$$p = \Psi(S) \chi\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (1.2)$$

где $\Psi(S)$ некоторая функция энтропии. Ниже развивается механическая теория, независимая от фиксирования функции $\Psi(S)$. Функция $\Psi(S)$ связана с физической природой среды и может быть определена при помощи дополнительных физических исследований. Связь между функциями $\varphi(R)$ и $\chi(R)$ определяется формулами

$$\varphi(R) = \frac{1}{\chi(R)} \left(C + \int \frac{\chi(R)}{R^2} dR \right), \quad \chi(R) = \frac{C}{\varphi(R)} \exp \int \frac{dR}{R^2 \varphi(R)} \quad (1.3)$$

где C — произвольная постоянная.

2. Уравнение состояния при условии (1.1) должно иметь вид:

$$T = \exp \int \frac{dR}{R^2 \varphi(R)} \Phi \left[p \varphi(R) \exp \left(- \int \frac{dR}{R^2 \varphi(R)} \right) \right] \quad \left(R = \frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (1.4)$$

где Φ — функция, связанная с $\Psi(S)$ уравнением $\Psi'(S) = \rho_0 \Phi[\Psi(S)]$.

Рассмотрим одномерное неустановившееся движение идеальной сжимаемой среды. В силу (1.2) уравнения движения примут вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\chi(\rho/\rho_0)} + v \frac{\partial}{\partial r} \frac{p}{\chi(\rho/\rho_0)} = 0$$

где $\nu = 1$ для плоских, $\nu = 2$ для цилиндрических, $\nu = 3$ для сферических волн.

Уравнения движения не содержат размерных констант, кроме плотности ρ_0 . Остальные размерные константы входят только в граничные условия. Взрыв предполагается точечным (вся энергия взрыва E_0 выделяется мгновенно в центре симметрии в момент времени $t = 0$) и сильным (давлением p_1 в невозмущенной среде можно пренебречь по сравнению с давлением на фронте ударной волны). В этом случае граничные условия сводятся к условиям на ударной волне

$$-\rho_1 c = \rho_2 (v_2 - c), \quad \rho_1 c^2 = p_2 + \rho_2 (v_2 - c)^2 \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} (v_2 - c)^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_2}{\rho_0} \varphi\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)$$

где c — скорость ударной волны; индексами 2 отмечены величины за фронтом ударной волны, 1 — перед ним.

Таким образом, в условия задачи входят только две постоянные с независимой размерностью: ρ_0 и E_0 , $[\rho_0] = ML^{-3}$, $[E_0] = ML^{\nu-1}T^{-2}$, следовательно, как уже указывалось выше, задача будет автомодельной. В этом случае скорость, плотность и давление можно искать в следующем виде:

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \rho_0 R(\lambda), \quad p = \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\lambda) \quad \left(\lambda = \frac{r}{r_2}\right) \quad (1.7)$$

где r_2 — радиус ударной волны:

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/\delta} t^\delta \quad \left(\delta = \frac{2}{2+\nu}\right) \quad (1.8)$$

при этом E — некоторая постоянная с размерностью энергии, пропорциональной энергии взрыва: $E_0 = \alpha E$.

Пользуясь соотношениями (1.7) и (1.8), преобразуем условия на ударной волне (1.6) к безразмерному виду:

$$R_1 \varphi(R_2) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right), \quad V_2 = \delta \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right), \quad P_2 = \delta R_1 V_2 \quad (1.9)$$

Отсюда получим уравнение, связывающее значения V_2 и R_2 на скачке:

$$R_2 \varphi(R_2) = \frac{V_2}{2(\delta - V_2)} \quad (1.10)$$

Подставляя в уравнения (1.5) вместо v , ρ и p их выражения из (1.7), получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\delta - V) \frac{dV}{d \ln \lambda} - \frac{1}{R} \frac{dP}{d \ln \lambda} = V^2 - V + 2 \frac{P}{R} \quad (1.11)$$

$$(\delta - V) \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} - \frac{dV}{d \ln \lambda} = \nu V \quad (1.12)$$

$$(\delta - V) \frac{d}{d \ln \lambda} \ln \frac{P}{\chi(R)} = 2(V - 1) \quad (1.13)$$

Эти уравнения имеют два независимых интеграла: интеграл энергии и интеграл адиабатичности [1]. В силу условий на ударной волне (1.9) и второго из соотношений (1.3) эти интегралы примут вид:

$$P = \frac{(\delta - V) R V^2}{2[V - (\delta - V) R \varphi(R)]}, \quad \lambda = \left[\frac{K \chi(R)}{R(\delta - V) P} \right]^{1/\nu} \quad (1.14)$$

где

$$K = \frac{R_2 (\delta - V_2) P_2}{\chi(R_2)} \quad (1.15)$$

т. е. K — постоянная, выбираемая так, чтобы на ударной волне λ равнялось единице. Интегралы (1.14) дают два уравнения для определения двух величин P и λ в функции V , если известно $R(V)$. Исключив λ из уравнений (1.11) и (1.12), имеем

$$\nu V \left[(\delta - V) - \frac{1}{R} \frac{dP}{dV} \right] = \left(V^2 - V + \frac{2P}{R} \right) \left[(\delta - V) \frac{d \ln R}{dV} - 1 \right] \quad (1.16)$$

Из соотношения (1.16), заменив P его выражением через R и V из интеграла энергии (1.14), получим для определения функции $R(V)$ следующее уравнение:

$$\frac{dR}{dV} = \frac{R^2 \varphi(R)}{(\delta - V)} \times \quad (1.17)$$

$$\times \frac{\{V[(1-\nu)V - \delta] - (\delta - V)[(1-\nu)V + 1/2(\nu - 2)\delta] R \varphi(R)\}}{\{1/2\nu V^2 [1 - R^2 \varphi'(R)] + V[V - (\nu + 1)\delta] R \varphi(R) + (1 - V)(\delta - V) R^2 \varphi^2(R)\}}$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию уравнения (1.17), после чего P и λ находятся по формулам (1.14).

Поведение решения системы уравнений (1.17) и (1.14) существенным образом зависит от характера особых точек уравнения (1.17), что в свою очередь определяется аналитическими свойствами функции $\varphi(R)$ в окрестности особых точек уравнения (1.17).

Для задачи о сильном взрыве в газе функция $\varphi(R)$ определяется соотношением

$$\varphi(R) = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{1}{R} \quad (1.18)$$

где γ — показатель адиабаты.

Точное решение уравнения (1.17) при условии (1.18) найдено Л. И. Седовым [1]. В этом случае функция $\ln R$ находится квадратурой; для движения со сферической симметрией имеем

$$R = C \left(\frac{5\gamma}{2} V - 1 \right)^{\frac{3}{2\gamma+1}} \left(1 - \frac{5}{2} V \right)^{\frac{2}{\gamma-2}} \left[1 - \frac{(3\gamma-1)}{2} V \right]^{\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(2-\gamma)(3\gamma-1)(2\gamma+1)}} \quad (1.19)$$

Условия на скачке (1.9) дают

$$V_2 = \frac{4}{5(\gamma+1)}, \quad R_2 = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) R_1, \quad P_2 = \frac{8}{25(\gamma+1)} R_1$$

Из соотношения (1.19) видно, что все интегральные кривые в плоскости RV подобны одна другой. Решение задачи существенным образом зависит от параметра γ .

Если функция $\varphi(R)$ имеет более общий, чем (1.18), вид, то решение задачи, даваемое каждой интегральной кривой, определяется параметром $R_1 = \rho_1 / \rho_0$. Первое из условий на ударной волне (1.9) дает

$$R_1 = \frac{R_2}{1 + 2R_2 \varphi(R_2)} \quad (1.20)$$

Для любой функции $\varphi(R)$ параметр R_1 явным образом зависит от параметра R_2 , поэтому выражения для скорости, плотности и давления на фронте ударной волны мы выпишем в зависимости от параметра R_2 :

$$\rho_2 = \rho_1 [1 + 2R_2\varphi(R_2)], \quad v_2 = \frac{2cR_2\varphi(R_2)}{1 + 2R_2\varphi(R_2)}, \quad p_2 = \frac{2\rho_1 c^2 R_2\varphi(R_2)}{1 + 2R_2\varphi(R_2)} \quad (1.21)$$

Здесь

$$c = \delta \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{\delta}{2}} t^{-\frac{\nu\delta}{2}} = \delta \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} r_2^{-\frac{\nu}{2}}$$

В полученные выше формулы входит постоянная E , которая выражается через энергию взрыва E_0 (равную в принятой постановке задачи полной энергии возмущенной среды). Если решение продолжимо до центра симметрии, то

$$E_0 = \sigma_\nu \int_0^{r_2} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p\rho}{\rho_0} \varphi\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \right] r^{\nu-1} dr \quad (1.22)$$

где $\sigma_\nu = 2(\nu-1)\pi + (\nu-3)(\nu-2)$.

Если в центре взрыва образуется расширяющаяся с течением времени граница с пустотой радиуса r_* , вместо (1.22) получаем следующую формулу:

$$E_0 = \sigma_\nu \int_{r_*}^{r_2} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p\rho}{\rho_0} \varphi\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \right] r^{\nu-1} dr \quad (1.23)$$

Используя соотношения (1.7) и (1.8), преобразуем соответственно формулы (1.22) и (1.23) к безразмерному виду:

$$\alpha = \sigma_\nu \int_0^1 R \left[\frac{V^2}{2} + P\varphi(R) \right] \lambda^{\nu+1} d\lambda \quad (1.24)$$

$$\alpha = \sigma_\nu \int_{\lambda_*}^1 R \left[\frac{V^2}{2} + P\varphi(R) \right] \lambda^{\nu+1} d\lambda \quad (E_0 = \alpha E) \quad (1.25)$$

где $\lambda_* = r_*/r_2$. В рассмотренных ниже задачах константа α вычислялась по формулам (1.24) и (1.25).

2. Легко убедиться, что для любой функции $\varphi(R)$ уравнение (1.17) имеет точное решение:

$$V = \frac{\delta R\varphi(R)}{1 + R\varphi(R)} \quad (2.1)$$

В каждой точке интегральной кривой (2.1) имеем $P = \infty$, $\lambda = 0$.

Уравнения (1.14) и (1.17) имеют также следующие два решения:

$$R \text{ — произвольно, } V = \delta, \quad P = 0, \quad \lambda = \infty \quad (2.2)$$

$$V \text{ — произвольно, } R = 0, \quad P = 0 \quad (2.3)$$

(значение λ для формулы (2.3) зависит от поведения функции $\varphi(R)$ в окрестности точки $R = 0$). Отсюда следует, что в плоскости R, V интегральные кривые, для которых $P > 0$, заключены между интегральной кривой (2.1) и прямыми $V = \delta$ и $R = 0$, дающими решения (2.2) и (2.3).

Если функция $\varphi(R)$ имеет вид $\varphi(R) = (R - 1)^k f(R)$, где $k > 0$, $f(1) \neq 0$, имеется еще одно точное решение системы (1.14), (1.17):

$$R = 1, \quad P = \frac{1}{2} V (\delta - V), \quad \lambda = 0 \text{ или } \infty \quad (2.4)$$

(если одновременно $k = 1$ и $f(1) = 1$, решение (2.4) не имеет места). В этом случае, если $f(1) > 0$, интегральные кривые, для которых $\varphi(R) > 0$, заключены между кривой (2.1) и прямыми (2.2), (2.4).

Так как внутренняя энергия среды в каждой точке интегральной кривой $R = 1$ равна нулю ($\varphi(R) = 0$), формулы (2.4) дают решение задачи о сильном взрыве в несжимаемой жидкости, найденное Л. И. Седовым [1]. Размерные скорость, плотность и давление определяются в случае сферической симметрии формулами

$$v = \frac{2}{5} \left(\frac{E'}{2\pi\rho_0} \right)^{\frac{3}{5}} \frac{t^{\frac{1}{5}}}{r^2}, \quad \rho = \rho_0 \quad (2.5)$$

$$p = \frac{2}{25} \rho_0 \left(\frac{E'}{2\pi\rho_0} \right)^{\frac{2}{5}} t^{-\frac{6}{5}} \frac{r_*}{r} \left[1 - \left(\frac{r_*}{r} \right)^3 \right], \quad r_* = \left(\frac{E'}{2\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}$$

где E' — некоторая постоянная, пропорциональная кинетической энергии жидкости $E_0' = \frac{4}{25} E'$, а r_* — радиус расширяющейся с течением времени пустой сферы.

3. Найдем линию слабых разрывов в плоскости RV , на которой скорость частиц жидкости относительно скорости ударной волны равна скорости звука, т. е.

$$dp/d\rho = (v - c)^2$$

Отсюда в силу (1.7) и (1.8), используя интеграл энергии (1.14), уравнение адиабаты (1.2) и связь (1.3) между функциями $\varphi(R)$ и $\chi(R)$, получим:

$$V = \frac{\delta R \varphi(R) [1 + 2R\varphi(R) \pm \sqrt{2R^2\varphi'(R) - 1}]}{1 - R^2\varphi'(R) + 2R\varphi(R)(1 + R\varphi(R))} \quad (3.1)$$

Если для всех R $2R^2\varphi'(R) < 1$, действительной линии слабых разрывов для данной функции $\varphi(R)$ нет.

На линии (3.1) переменный параметр λ в функции V достигает экстремального значения, следовательно, при движении по интегральной кривой непрерывный переход через кривую (3.1) невозможен; переход через эту кривую возможен только скачком.

4. В настоящем и следующих двух разделах мы будем рассматривать случай сферической симметрии.

Общепринятого уравнения адиабаты воды пока не имеется. Обычно это уравнение берется в форме

$$p = \Psi(S) (\rho^x - \rho_0^x) \quad (4.1)$$

причем значение x близко к 7 (см., например, [5]).

Всегда можно выбрать постоянную ρ_0 так, чтобы из уравнения (4.1) получить

$$\chi(R) = R^x - 1 \quad (4.2)$$

Можно показать, что, если уравнение адиабаты имеет вид (1.2), а уравнение состояния вид (1.4), то выражение внутренней энергии представляется формулой (1.1), причем имеют место зависимости (1.3). Тогда первое из соотношений (1.3) с учетом (4.2) дает выражение для $\varphi(R)$:

$$\varphi(R) = \frac{R^\kappa + C_1 R + \kappa - 1}{(\kappa - 1) R (R^\kappa - 1)} \quad (4.3)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Положив $C_1 = -\kappa$, имеем

$$\varphi(R) = \frac{R^\kappa - \kappa R + \kappa - 1}{(\kappa - 1) R (R^\kappa - 1)} \quad (4.4)$$

В окрестности точки $R = 1$

$$\varphi(R) = \frac{1}{2} (R - 1) \left[1 - \frac{1}{6} (\kappa + 7) (R - 1) + \dots \right] \quad (4.5)$$

а в окрестности точки $R = \infty$

$$\varphi(R) = \frac{1}{(\kappa - 1) R} \left[1 - \kappa \left(\frac{1}{R} \right)^{\kappa-1} + \dots \right] \quad (4.6)$$

В результате обработки экспериментальных данных [6, 7], дающих плотность и температуру воды при высоких давлениях, нами были получены значения $\kappa = 20/3$ для показателя степени в формуле (4.2) и $\rho_0 = 0.93894 \text{ г см}^{-3}$ для плотности ρ_0 , входящей в уравнение (4.1).

Предположим для простоты, что функция $\varphi(R)$ имеет вид:

$$\varphi(R) = \frac{R - 1}{2R^2} \quad (4.7)$$

В окрестности точки $R = 1$ функция (4.7) имеет следующую асимптотику:

$$\varphi(R) = \frac{1}{2} (R - 1) [1 - 2(R - 1) + \dots] \quad (4.8)$$

В разложениях (4.8) и (4.5) первые члены совпадают.

С известной степенью точности функцию (4.4) можно аппроксимировать функцией (4.7).

Рассмотрим теперь задачу о сильном взрыве для функции (4.7). Поле интегральных кривых уравнения (1.17) представлено на фиг. 1. (На фиг. 1, 5 и 7 жирно проведена кривая (1.10).)

Линия слабых разрывов (3.1) в рассматриваемой нами области значений (R, V) проходит только через одну точку $(V = 0, R = 1)$. Уравнение (1.17) имеет в этой области пять особых точек.

Точка C ($V = 0.4, R = 1$) — узел. В окрестности этой точки имеют место формулы

$$R = 1 + C_1 (0.4 - V)^2, \quad P = 0.5V (0.4 - V), \quad \lambda = (5 C_1 K)^{0.2} \quad (4.9)$$

Здесь C_1 — произвольная постоянная, а

$$K = \frac{(0.4 - V_2) P_2}{R_2 (R_2 - 1)} \quad (4.10)$$

Из вида асимптотики (4.9) ясно, что точка C отвечает границе движущейся жидкости с пустотой.

Точка D ($V = 0.4, R = \infty$) — седло. Через нее проходит только одна интегральная кривая $V = 0.4$. Точка B ($V = 2/15, R = \infty$) — также седло. Через нее проходит только интегральная кривая (2.1), которая для рассматриваемой функции $\varphi(R)$ определяется уравнением

$$R = \frac{0.4 - V}{0.4 - 3V} \quad (4.11)$$

Точка F ($V = 0.25, R = \infty$) — узел.

Точка $A (V = 0, R = 1)$ — сложная особая точка, здесь имеются узел и седло. Асимптотическая формула для R в функции V имеет вид:

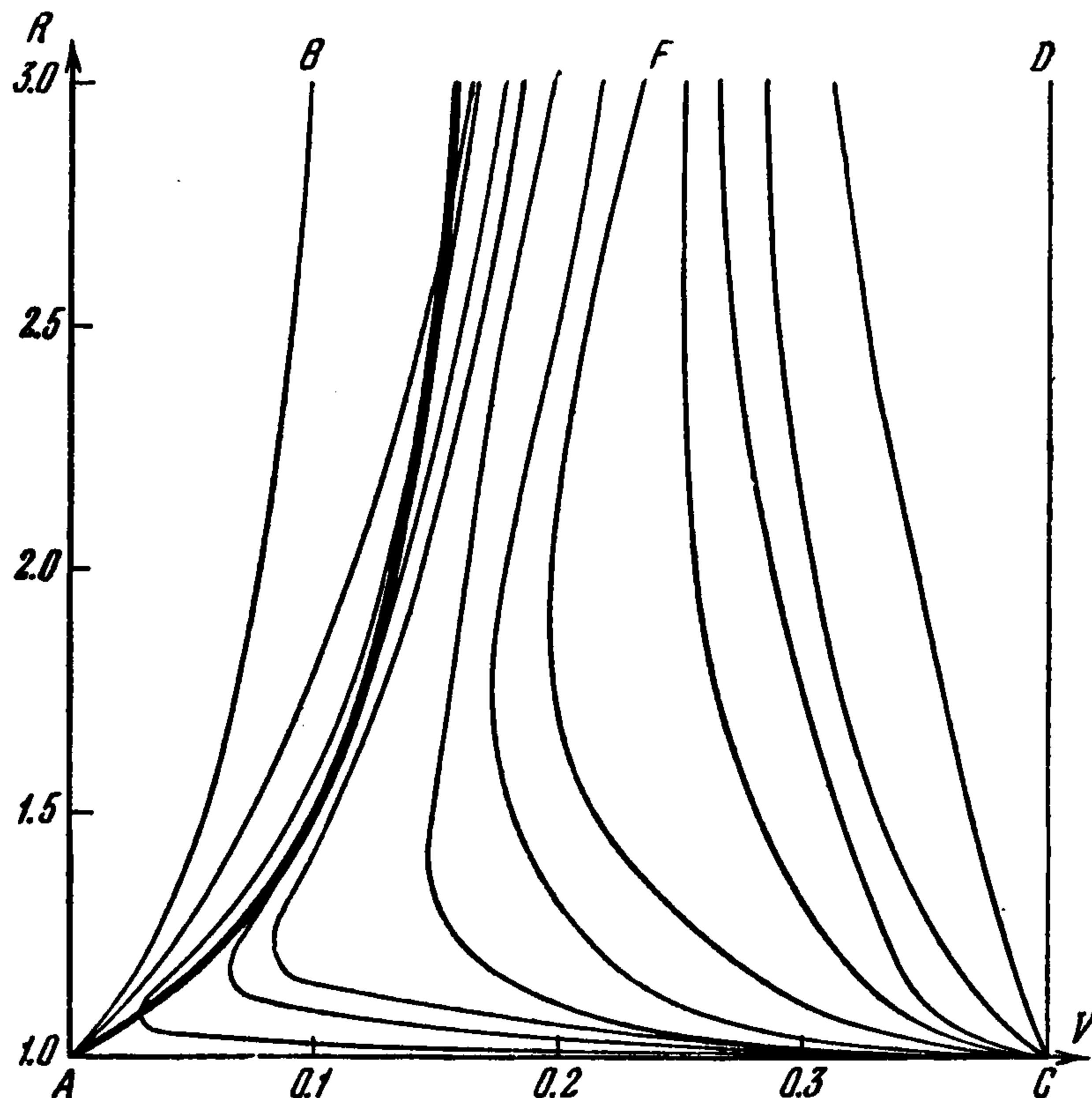
$$\frac{V}{0.4 - V} - \frac{(R - 1)}{2R} = C \left(\frac{R - 1}{2R} \right) \left(\frac{R - 1}{R} - \frac{V}{0.4 - V} \right)^{5/3} \quad (4.12)$$

Пользуясь интегралами (1.14), найдем значения P и λ в окрестности точки A :

$$P = \frac{V^2}{C(R - 1)} \left[\frac{R - 1}{R} - \frac{V}{0.4 - V} \right]^{-5/3} \quad (4.13)$$

$$\lambda = \left[\frac{2.5KC(R - 1)^2}{V^2} \right]^{1/3} \left(\frac{R - 1}{R} - \frac{V}{0.4 - V} \right)^{1/3}$$

Из этих формул для разных интегральных кривых получается разная асимпто-



Фиг. 1

тика. Асимптотические формулы (4.12) и (4.13) для кривых, входящих в точку A , и, следовательно, соответствующих узлу, могут быть записаны в виде

$$R = 1 + 5V + 37.5V^2 + C_2V^{5/3} \quad (4.14)$$

$$P = -\frac{1}{C_2} V^{-2/3}, \quad \lambda = (-12.5KC_2)^{1/3} V^{1/3}$$

(C_2 — новая произвольная постоянная).

Отметим, что коэффициент при V^2 в выражении для R зависит от аналитических свойств функции $f(R)$ в окрестности точки $R = 1$, если функция $\varphi(R)$ определяется равенством $\varphi(R) = \frac{1}{2}(R - 1)[1 + f(R)]$, причем $f(1) = 0$.

Из (4.14) видно, что точка A отвечает центру симметрии. Кривые, входящие в точку A , дают решение задачи, продолжимое до центра симметрии, где скорость обращается в нуль, а давление и плотность конечны.

Интегральные кривые, соответствующие седлу, входят далее в точку C и отделяются от кривых, входящих в точку A , разделяющей кривой, которая касается в точке A кривой (1.10), дающей условие на скачке и имеющей в рассматриваемом случае вид:

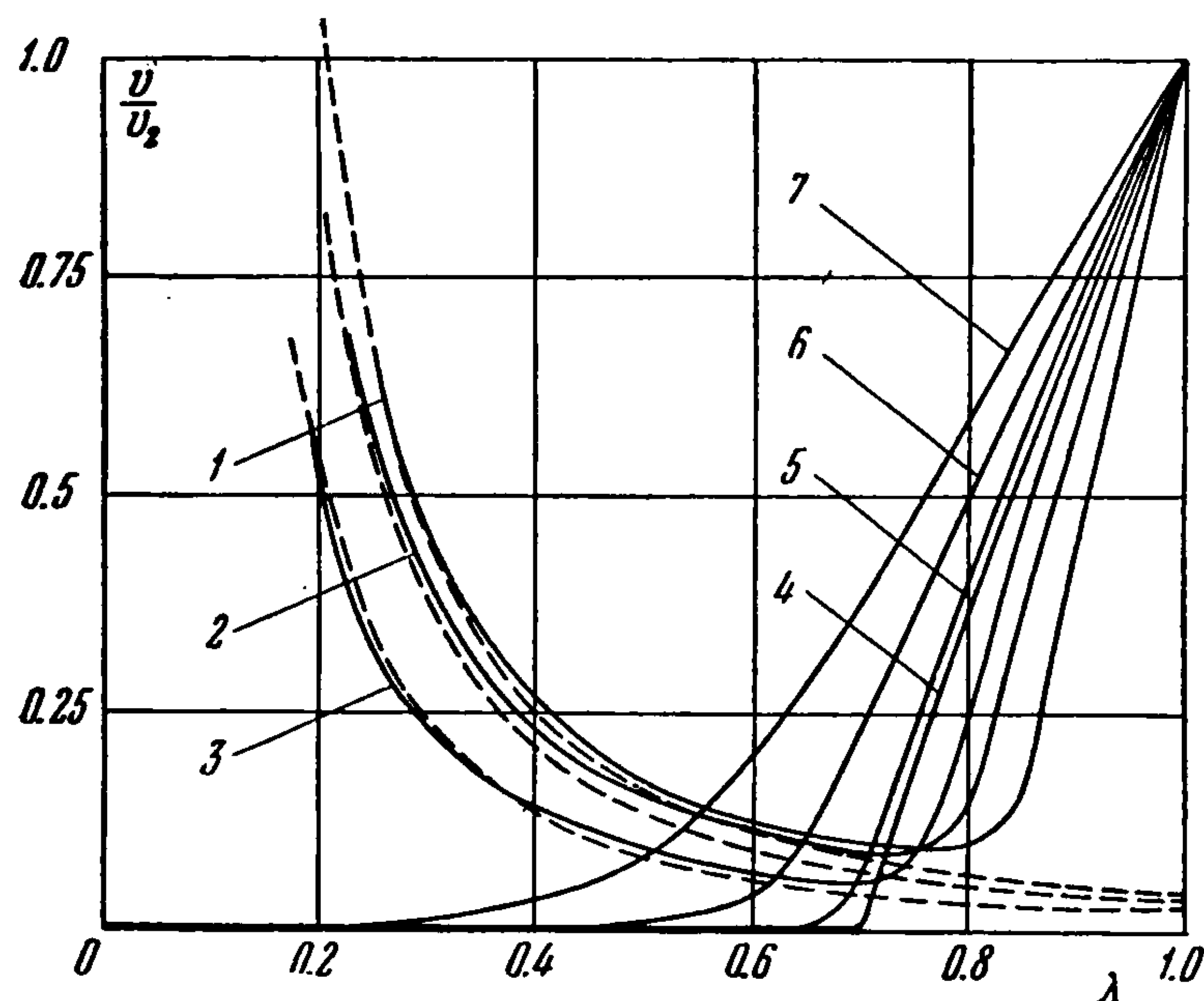
$$R_2 = \frac{0.4 - V_2}{2(0.2 - V_2)} \quad (4.15)$$

Для разделяющей кривой асимптотические формулы в окрестности точки A имеют вид:

$$R = 1 + 2.5V + 13.75V^2, \quad P = V(0.4 - V), \quad \lambda = 0.696 \quad (4.16)$$

В центре симметрии образуется расширяющаяся с течением времени зона покоящейся жидкости, где плотность постоянна и равна ρ_0 , а давление равно нулю.

Рассмотрим теперь те интегральные кривые, которые дают решение задачи о сильном взрыве. Как уже было отмечено выше, точка A отвечает центру симметрии



Фиг. 2

($\lambda = 0$), а точка C ($\lambda = \text{const}$, $p = 0$)—границе с пустотой. Из точки ($V = 0$, $R = R_1$), характеризующей состояние жидкости до взрыва, на интегральную кривую, входящую в точку A или C , можно попасть только скачком, совершаемым в точку (V_2 , R_2) кривой (4.15). Все интегральные кривые, выходящие из точек A и C (кроме кривых $V = 0.4$ и (4.11)), входят в точку F . В точке ($V = 0.1$, $R = 1.5$) одна из этих кривых касается кривой (4.15).

Все кривые, лежащие между этой интегральной кривой и кривой (4.11), пересекают кривую (4.15). Следовательно, каждая из

этих кривых, характеризующаяся определенным значением параметра R_1 , дает решение некоторой задачи о сильном взрыве в рассматриваемой среде (4.7). При этом параметр R_1 пробегает все значения от 1 до ∞ .

На фиг. 2 и 3 даны графики функций v/v_2 и ρ/ρ_2 , p/p_2 , кривые 1 соответствуют значению $R_1 = 1.0667$, 2 — 1.1250, 3 — 1.1910, 4 — 1.2921, 5 — 1.3333, 6 — 1.5625, 7 — 2.2042.

Остановимся несколько подробнее на поведении этих функций для различных R_1 . Полагая $R_1 = 1$, получим интегральную кривую

$$R = 1, \quad P = 0.5V(0.4 - V) \quad (4.17)$$

$$\lambda = 0$$

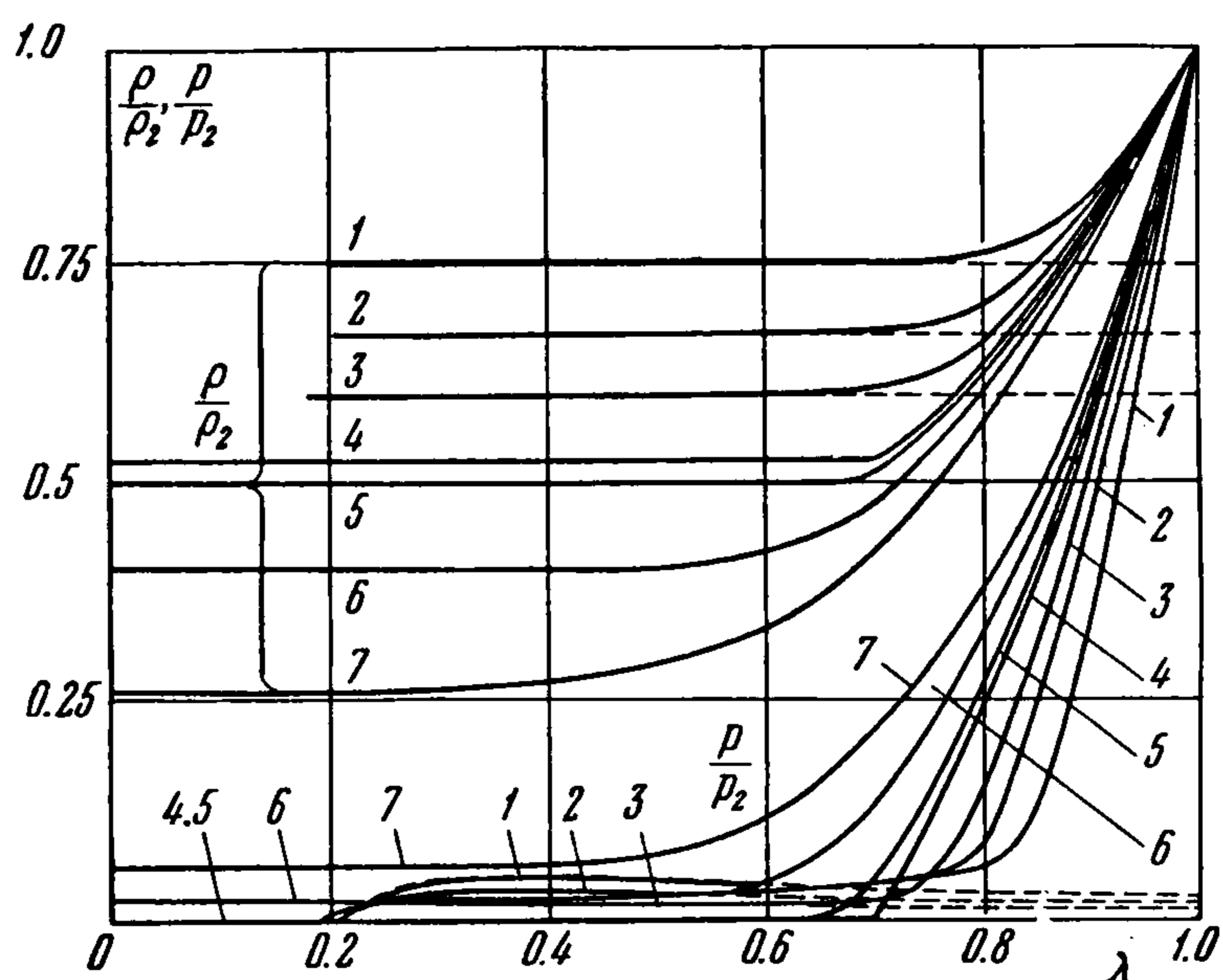
Формулы (4.17) дают решение задачи о сильном взрыве в несжимаемой жидкости [1]. В силу (1.7) и (1.8) получим из (4.17) формулы (2.5), если положим $V = 0.4(r_*/r)^3$, где r_* — радиус полости (2.5). При этом из формул (2.5) в силу (1.21) и (4.17) получим: $v/v_2 \rightarrow \infty$, $p/p_2 \rightarrow \infty$, $\rho/\rho_2 \rightarrow 1$.

Интегральные кривые, соответствующие значениям $1 < R_1 < 1.2921$, выходят из точки C и входят в точку F , пересекая кривую (4.15) в двух точках, причем каждому R_1 отвечает своя точка пересечения. Эти кривые дают решение задачи о взрыве с расширяющейся из центра взрыва пустой сферой (кривые 1, 2 и 3 фиг. 2 и 3).

Вблизи полости жидкость ведет себя как несжимаемая. Сжимаемость существенно сказывается только вблизи ударной волны. Отношение энергий взрыва в несжимаемой и сжимаемой жидкостях равно

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{0.32\pi\lambda_*^5}{\alpha} \quad (4.18)$$

где λ_* — безразмерный радиус полости ($\lambda_* = r_*/r_2$), а величина $\alpha = E_0/E$. Отношение (4.18) уменьшается от единицы до нуля с ростом R_1 от 1 до 1.2921.



Фиг. 3

Таким образом, вблизи границы с пустотой вместо сжимаемой жидкости можно рассматривать несжимаемую с пересчитанной по формуле (4.18) энергией взрыва.

На фиг. 2 и 3 пунктиром даны кривые, соответствующие кривым 1, 2, 3 для случая несжимаемой жидкости. В окрестности полости, где они хорошо аппроксимируют величины v/v_2 , ρ/ρ_2 и p/p_2 , эти кривые были использованы в качестве асимптотики.

Значению $R_1 = 1.2921$ соответствует разделяющая кривая (кривая 4 фиг. 2 и 3). При изменении λ от 1 до 0.696 плотность падает до значения ρ_0 , а давление и скорость до нуля, при $\lambda = 0.696$ жидкость слабым скачком переходит в состояние покоя, поэтому в этой точке на кривых имеется излом. При $\lambda \leq 0.696$ скорость и давление равны нулю, а плотность равна ρ_0 ; при этом в любой момент времени вся масса жидкости за фронтом ударной волны равна начальной массе в этом объеме. Таким образом, разделяющая кривая дает решение задачи о взрыве с расширяющейся из центра симметрии по закону $r = 0.696 (E/\rho_0)^{1/5} t^{2/5}$ зоной покоящейся жидкости.

Кривые, входящие в точку A и касающиеся в этой точке кривой (4.11), дают решение задачи о взрыве для значений $1.2921 < R_1 \leq \infty$ (кривые 5, 6, 7 фиг. 2, 3), причем в центре симметрии скорость обращается в нуль, а давление и плотность конечны.

Если $R_1 \rightarrow \infty$ (взрыв происходит в жидкости бесконечно большой плотности), ударная волна перемещается бесконечно медленно, плотность за ней бесконечно велика.

На фиг. 4 представлены графики функций $\alpha = E_0/E$ и E_0'/E_0 ((4.18)) в зависимости от R_1 .

5. Рассмотрим случай, когда функция $\varphi(R)$ дается формулой

$$\varphi(R) = \frac{(\gamma - 1)R^2 + (\gamma_1 - 1)a^2}{(\gamma - 1)(\gamma_1 - 1)R(a^2 + R^2)} \quad (5.1)$$

где γ , γ_1 и a — постоянные, причем γ и γ_1 больше единицы.

Пользуясь вторым из соотношений (1.3), найдем функцию $\chi(R)$:

$$\chi(R) = C(a^2 + R^2)R^\gamma \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma_1 - 1} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right]^{\frac{\gamma_1 - \gamma - 1}{2}} \quad (5.2)$$

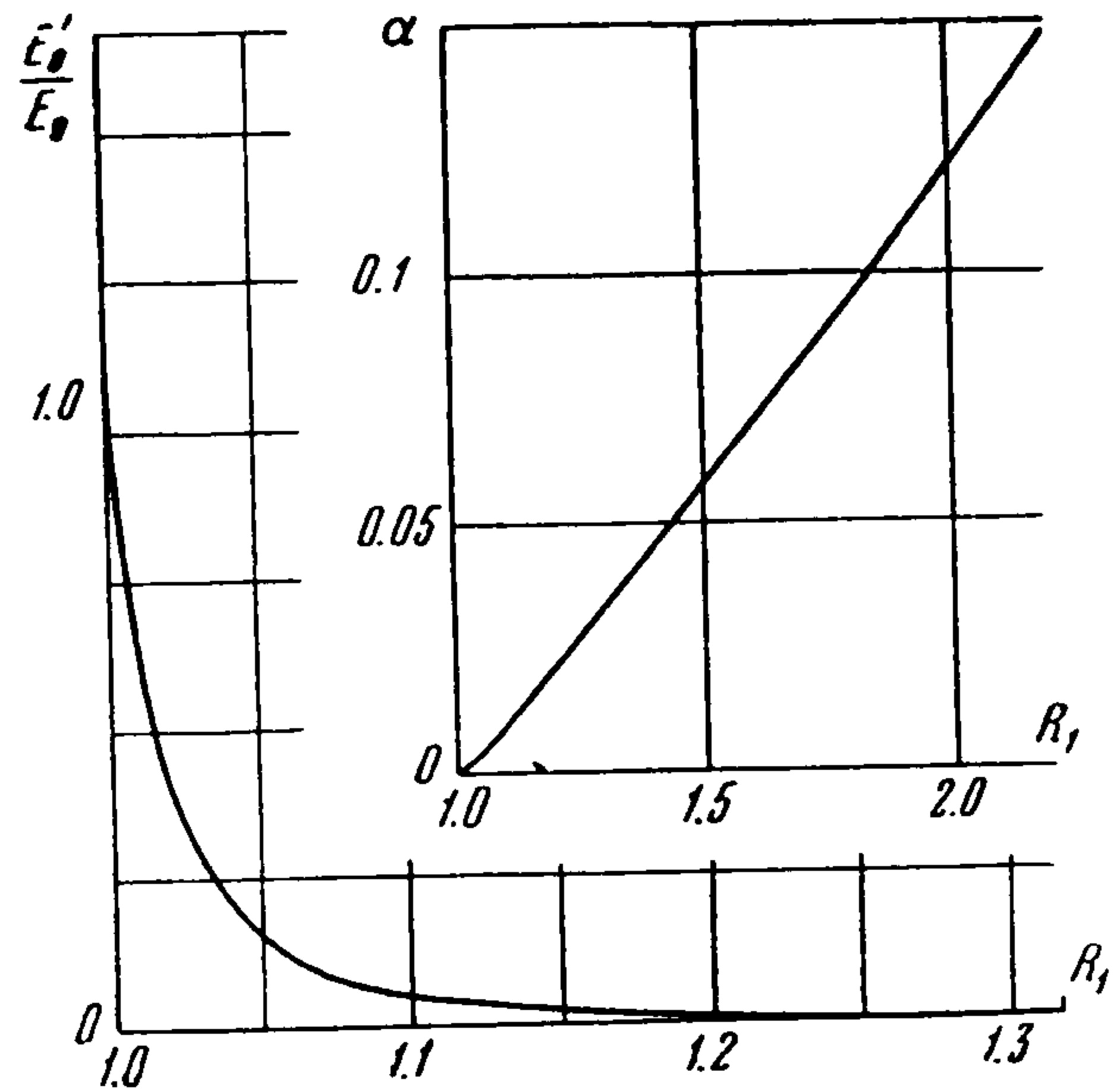
Выпишем первые члены рядов, в которые разлагаются функции $\varphi(R)$ и $\chi(R)$ в окрестности точки $R = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(R) &= \frac{1}{(\gamma - 1)R} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_1 - 1} \right) \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \dots \right\} \\ \chi(R) &= CR^\gamma \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1 - 1} \right) \frac{(\gamma + 1)}{2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

В окрестности точки $R = \infty$ получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \varphi(R) &= \frac{1}{(\gamma_1 - 1)R} \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma - 1} \right) \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \dots \right\} \\ \chi(R) &= C \left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma - 1} \right)^{2 + \gamma - \gamma_1} a^\gamma \left(\frac{R}{a} \right)^{\gamma_1} \left\{ 1 + \frac{(3 - \gamma_1)(\gamma - \gamma_1)}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для внутренней энергии и уравнение адиабаты вблизи этих точек с точностью до малых второго порядка такие же, как для газа соответственно с показателями адиабаты γ и γ_1 .



Фиг. 4

Точное решение (2.1) и условие на скачке (1.10) даются соответственно формулами

$$R = a \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma - 1}\right) \left(\frac{0.4 - \gamma V}{\gamma_1 V - 0.4}\right)}, \quad R_2 = a \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma - 1}\right) \left[\frac{0.8 - (\gamma + 1)V_2}{(\gamma_1 + 1)V_2 - 0.8}\right]} \quad (5.3)$$

Исследуем поле интегральных кривых для уравнения (1.17) в области, где $P > 0$ (см. раздел 2). Характер особых точек уравнения (1.17) зависит от значений γ и γ_1 .

Например, если $\gamma < 2$, $\gamma_1 > 2$, уравнение (1.17) имеет следующие особые точки.

Точка $A (V = 0.4\gamma^{-1}, R = 0)$ — узел. Все интегральные кривые входят в эту точку с наклоном, равным $+\infty$. Асимптотические формулы имеют вид:

$$R = C (V - 0.4\gamma^{-1})^{\frac{3}{2\gamma+1}}$$

$$P = \frac{4(\gamma - 1)^2 C}{125\gamma^4 G(V)} (V - 0.4\gamma^{-1})^{-\frac{2(\gamma-1)}{2\gamma+1}}$$

$$\lambda = \left(\frac{625K}{8(\gamma - 1)^3}\right)^{0.2} \gamma C^{\frac{\gamma-2}{5}} (V - 0.4\gamma^{-1})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma+1}} [G(V)]^{0.2} \quad (5.4)$$

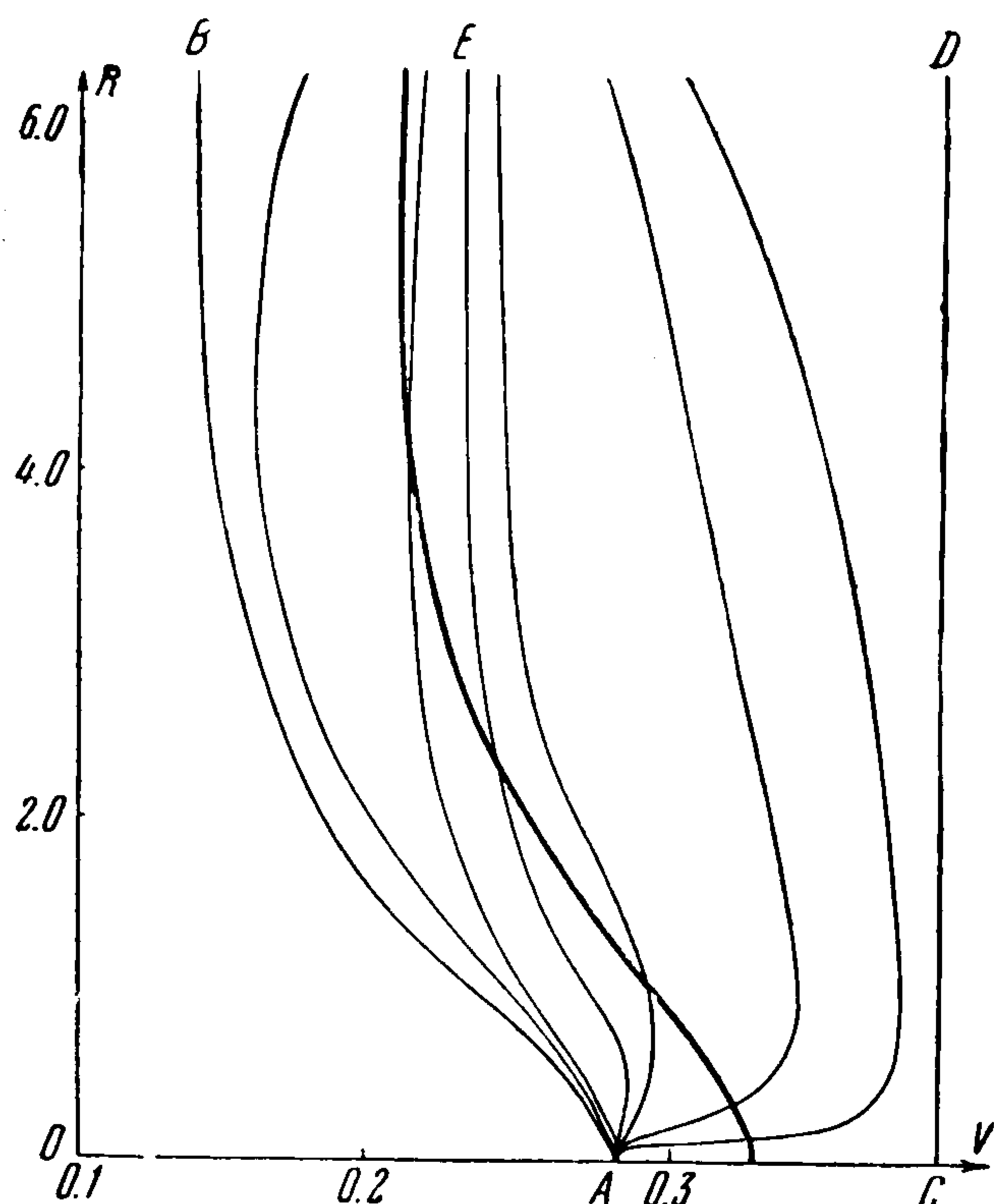
где

$$G(V) = 1 + \frac{0.4(\gamma - 1)(\gamma_1 - \gamma)}{\gamma^2(\gamma_1 - 1)} C^2 (V - 0.4\gamma^{-1})^{\frac{5-2\gamma}{2\gamma+1}}$$

а C — произвольная постоянная.

Точка $C (V = 0.4, R = 0)$ — седло, точка $D (V = 0.4, R = \infty)$ — седло, точка $B (V = 0.4\gamma^{-1}, R = \infty)$ — седло, точка $E (V = 2/(3\gamma_1 - 1), R = \infty)$ — узел.

Через точку B проходит единственная интегральная кривая (2.1), через точки C и D — прямая $V = 0.4$. Все остальные интегральные кривые выходят из точки A и



Фиг. 5

входят в точку E . Если $\gamma < 2$ и $\gamma_1 < 2$ точка C — седло, точка D — узел, в который сходятся все интегральные кривые, точка E не принадлежит к интересующей нас области.

Если $\gamma > 2$ и $\gamma_1 > 2$, точка E — узел, точка D — седло, точка C — узел. Кроме того, появляется особая точка $F (V = 2/(3\gamma - 1), R = 0)$ — седло. Через точку F проходят прямая $R = 0$ и интегральная кривая, отделяющая кривые, выходящие из точки A , от кривых, выходящих из точки C . Все эти кривые входят в точку E . Характер особых точек A и B в рассмотренных случаях не изменяется, формулы (5.4) остаются верными.

Наконец, если $\gamma_1 \rightarrow \infty$, уравнение (5.1) приобретает вид: $\varphi(R) = b^2 / (a^2 + R^2) R$, где a и b — константы.

В случае $\gamma < 2$ точки A и $B (V = 0, R = \infty)$ — узлы, а C и D — седла, в случае $\gamma > 2$ точки F и D — седла, а A, B и C — узлы.

На фиг. 5 построены интегральные кривые уравнения (1.17), где $\varphi(R)$ определяется формулой (5.1), причем $\gamma = 1.4$, $\gamma_1 = 3.2$ и $a = 1$. Точка A , в которой $\lambda = 0$ соответствует центру симметрии. Если γ и $\gamma_1 < 7$, интегральная кривая, входящая в точку A , пересекает кривую (1.10), дающую условие на скачке, в некоторой ее точке (V_2, R_2) . Из точки оси $R (V = 0, R = R_1)$ на интегральную кривую, входящую в точку A , можно попасть только скачком, совершаемым в точку (V_2, R_2) . Движению по интегральной кривой от точки (V_2, R_2) до точки A в физическом пространстве отвечает движение жидкости, продолжимое до центра симметрии. При этом, как и в

случае газа, в центре симметрии плотность и скорость равны нулю, а давление конечно.

При $\gamma > 2$ точка C отвечает границе с пустотой ($\lambda = \text{const}$, $p = 0$). Если $\gamma \geq 7$ и $\gamma_1 \geq 7$, интегральные кривые, дающие решение задачи о сильном взрыве, соответствуют движениям с пустой полостью, где давление и плотность обращаются в нуль; если $2 < \gamma < 7$, а $\gamma_1 > 7$, или $2 < \gamma_1 < 7$, а $\gamma > 7$, часть из этих интегральных кривых отвечает движениям, продолжимым до центра симметрии, а часть — движениям с пустой полостью.

Из формул (1.20) и (5.1) для параметра R_1 получим следующее выражение:

$$R_1 = \frac{(\gamma - 1)(\gamma_1 - 1)R_2(R_2^2 + a^2)}{(\gamma - 1)(\gamma_1 + 1)R_2^2 + (\gamma_1 - 1)(\gamma + 1)a^2} \quad (5.5)$$

Следовательно, параметр R_1 для интегральных кривых, дающих решение задачи о сильном взрыве, изменяется от нуля до бесконечности.

Значению $R_1 = 0$ отвечает решение (2.3), соответствующее предельному случаю несжимаемой жидкости, когда плотность и давление равны нулю. При этом, как в случае газа с показателем адиабаты γ , $R_2/R_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. Из (5.5) следует, что с ростом R_1 отношение R_2/R_1 изменяется, принимая минимальное значение $\frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}$, когда плотность перед ударной волной бесконечно велика, причем плотность за фронтом ударной волны также стремится к бесконечности, а скорость ударной волны и скорость частиц за ней стремятся к нулю.

В окрестности точки A асимптотические формулы (5.4) для R , P и λ с точностью до множителей совпадают с аналогичными формулами для газа с показателем адиа-

баты γ . В силу того, что $\frac{R_2}{R_1} = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ только при $R_1 = 0$, при любом конечном R_1 поведение функций v/v_2 , ρ/ρ_2 и p/p_2 вблизи точек $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ количественно несколько отличается от поведения этих функций для газов соответственно с показателями адиабаты γ и γ_1 .

На фиг. 6 представлены графики функций v/v_2 и ρ/ρ_2 в зависимости от λ для начального значения $R_1 = 1.862$. Значение константы a в формуле энергии получилось равным 0.553. При $\lambda = 0$ $p/p_2 = 0.3444$, при $\lambda = 0.5204$ p/p_2 минимально и равно 0.2703.

6. Легко видеть, что случай $\varphi(R) = a = \text{const}$ можно свести к случаю $\varphi(R) = 1$.

Точное решение (2.1) и условие на скачке (1.10) даются в этом случае соответственно формулами

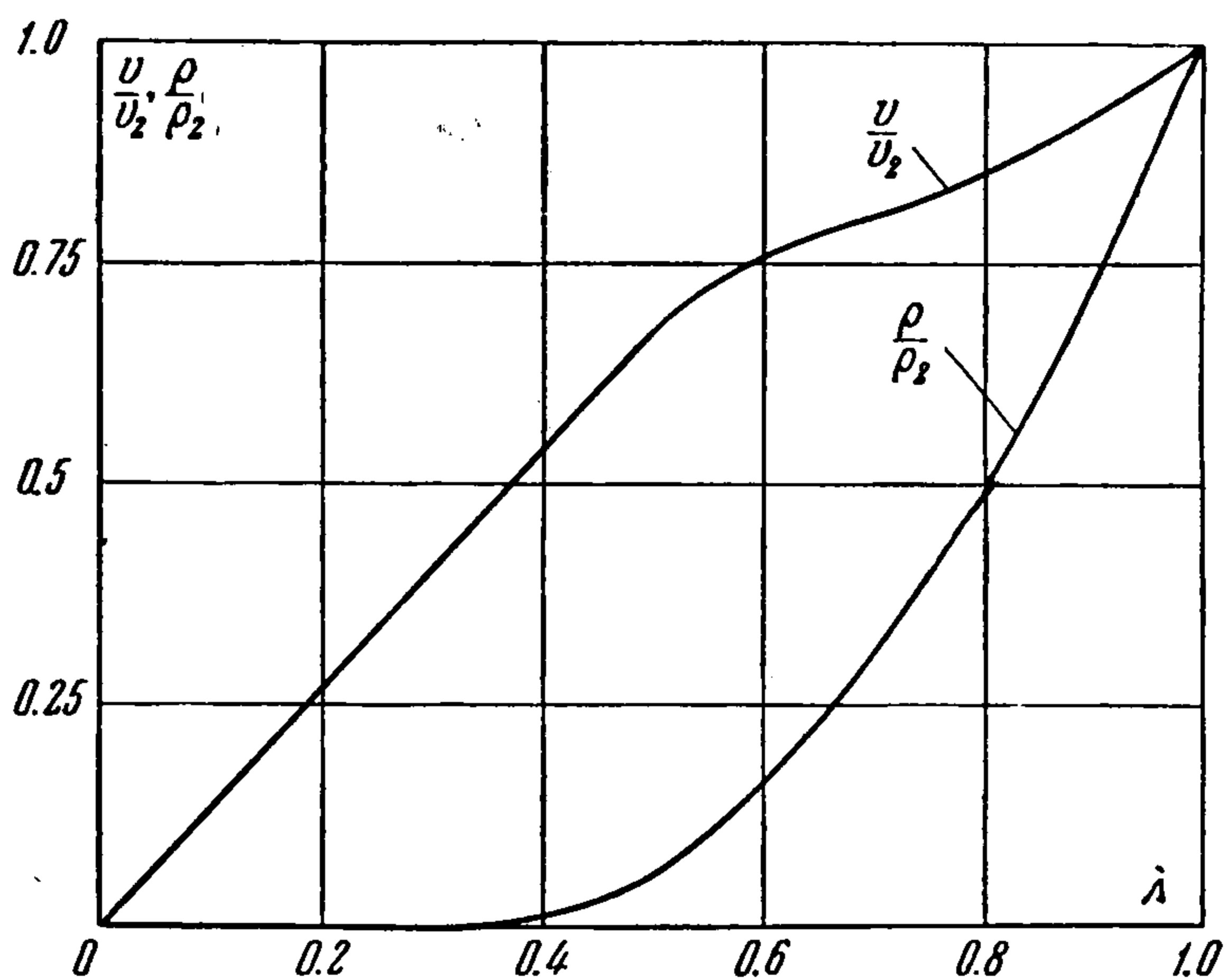
$$R = \frac{V}{0.4 - V}, \quad R_2 = \frac{V_2}{2(0.4 - V_2)} \quad (6.1)$$

Из уравнения (3.1) ясно, что в этом случае действительной звуковой линии нет. Поле интегральных кривых для случая $\varphi(R) = 1$ дано на фиг. 7.

В окрестности особой точки $O(V = 0, R = 0)$ уравнение (1.17) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dR}{dV} = \frac{-2R^2(5V + R)}{15V^2 - 16VR + 4R^2} \quad (6.2)$$

Это сложная особая точка, здесь имеются седло и узел.



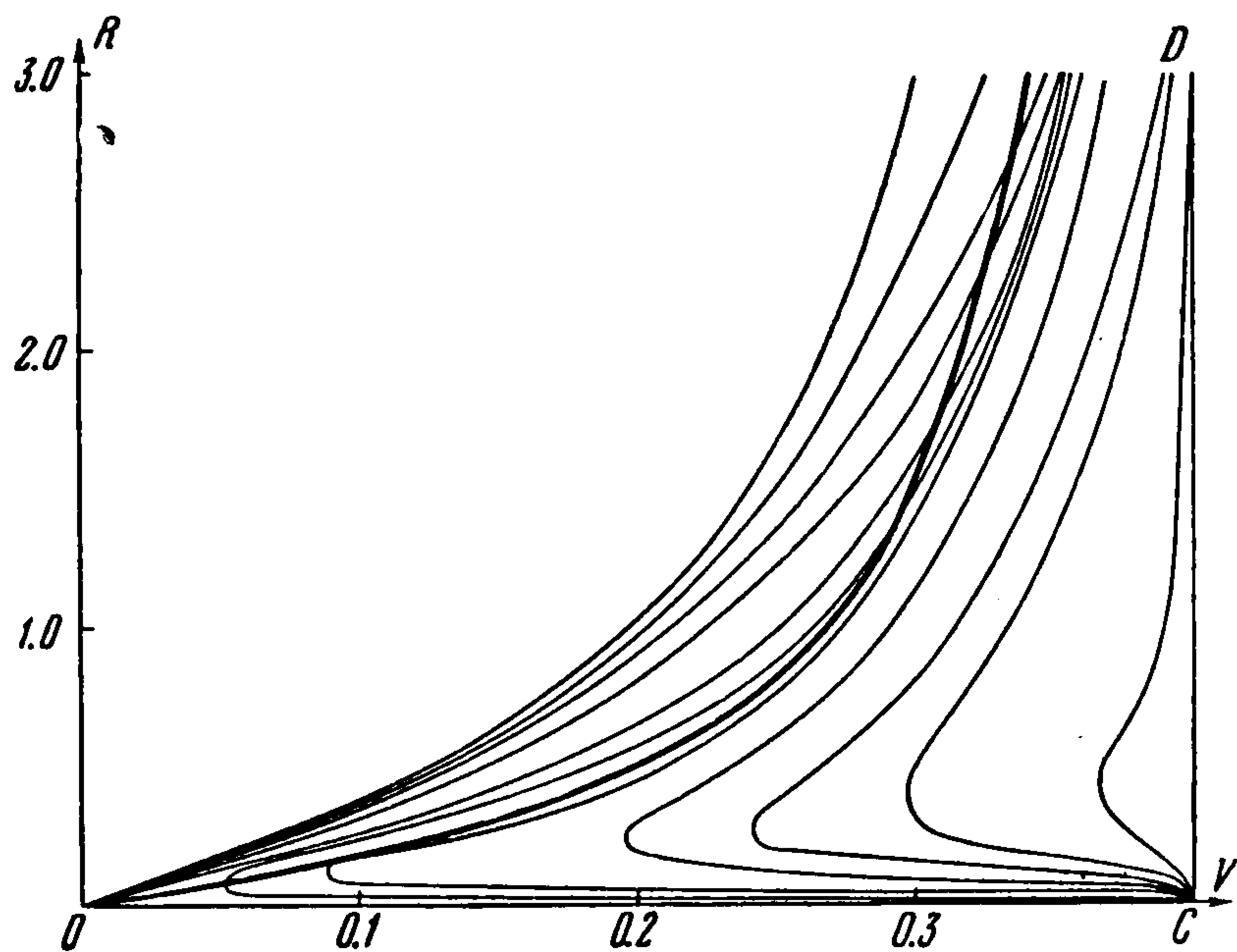
Фиг. 6

Точка C ($V = 0.4, R = 0$) — узел. Асимптотические формулы для V, P и λ вблизи точки C имеют вид:

$$V = 0.4 - \frac{C_1}{R} \exp\left(-\frac{1}{2R}\right), \quad P = 0.2C_1 \exp\left(-\frac{1}{2R}\right), \quad \lambda = \left(\frac{5K}{C_1^2}\right)^{0.2} \quad (6.3)$$

где C_1 — произвольная постоянная. Таким образом, эта точка отвечает границе с пустотой.

Точка D ($V = 0.4, R = \infty$) — узел, в который сходятся все интегральные кривые, выходящие из точки C ; в точке ($V = 1/10, R = 1/6$) одна из этих кривых касается



Фиг. 7

второй из кривых (6.1), кривые с большим значением постоянной C_1 , входящей в формулы (6.3), пересекают эту кривую в двух точках. Из точки ($V = 0, R = R_1$) на интегральную кривую, входящую в точку O , соответствующую центру симметрии, или в точку C , соответствующую границе с пустотой, можно попасть только скачком.

Параметр R_1 изменяется в пределах от 0 до 0,5.

Значению $R_1 = 0$, как и в предыдущем случае (раздел 5), отвечает решение (2.3).

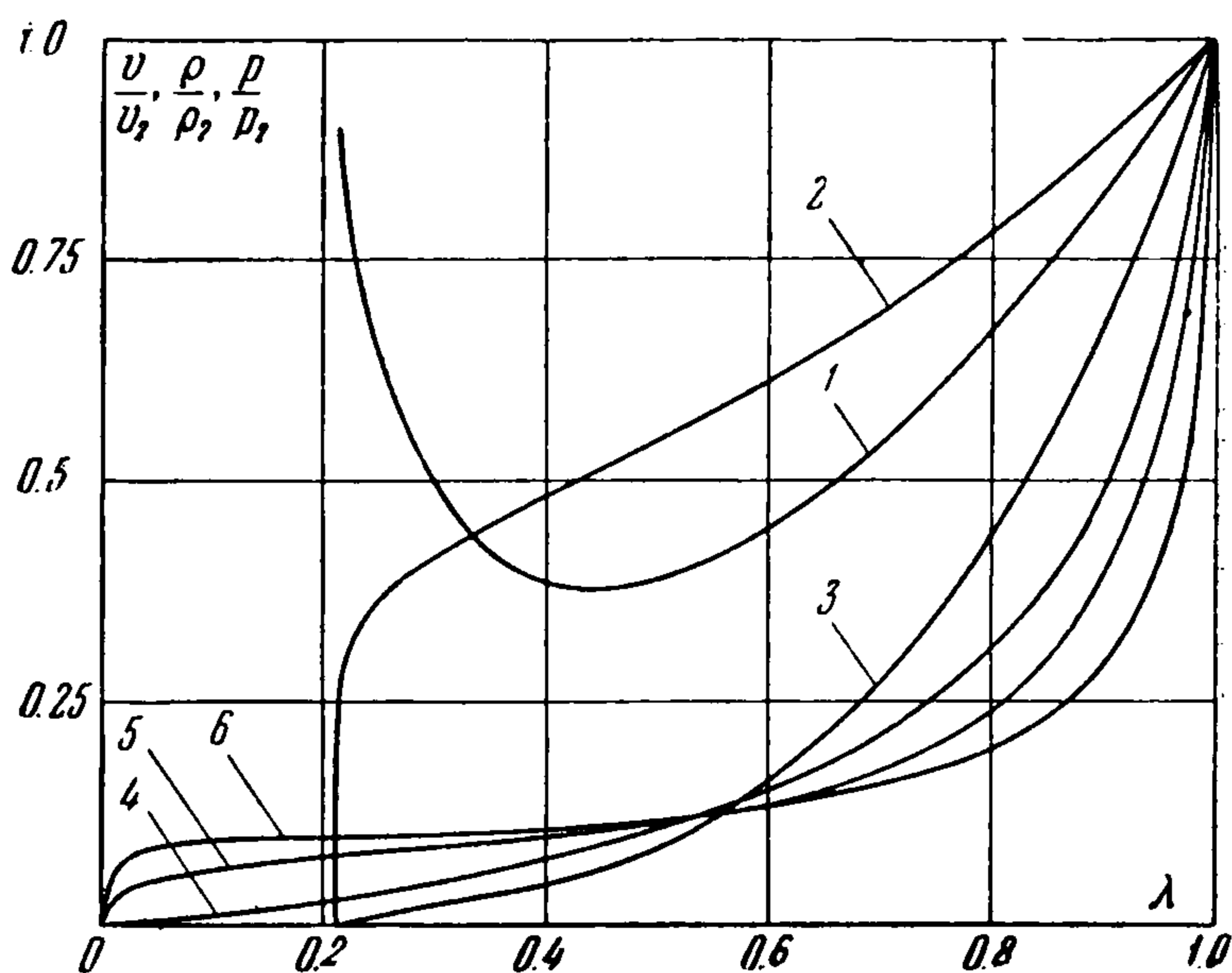
Плотность и давление в каждой точке интегральной кривой равны нулю, ударная волна сразу уходит на бесконечность.

Если $R_1 = 0.5$, плотность за фронтом ударной волны становится бесконечно большой, скорость ударной волны — бесконечно малой.

На фиг. 8 даны графики функций $v/v_2, \rho/\rho_2$ и p/p_2 в зависимости от λ . Кривые 1, 2, 3 соответственно для скорости, плотности и давления отвечают значению $R_1 = 0.125$, а кривые 4, 5, 6 — $R_1 = 0.375$. Значение $R_1 = 0.125$ соответствует интегральной кривой, касающейся в точке ($V = 1/10, R = 1/6$) второй из кривых (6.1) и входящей в точку C . Движение получается с расширяющейся из центра симметрии полостью, на границе которой как давление, так и плотность обращаются в нуль.

Во втором случае решение продолжимо до центра симметрии, где скорость, плотность и давление обращаются в нуль.

Константа α в первом и втором случаях соответственно равна 0.00274 и 0.05502.



Фиг. 8

7. В общем случае точечного взрыва в граничные условия входят три размерные постоянные ρ_0, E_0 и начальное давление в невозмущенной среде p_1 . Если это давление p_1 достаточно мало, так что им можно пренебречь, мы приходим к рассмотрению автомоделльной задачи.

Постараемся теперь более точно оценить расстояния, пройденные ударной волной, до которых можно пользоваться автомодельным решением.

Запишем вместо (1.6) точные условия на ударной волне:

$$\begin{aligned} -\rho_1 c &= \rho_2 (v_2 - c), & \rho_1 c^2 + p_1 &= \rho_2 (v_2 - c)^2 + p_2 \\ \frac{1}{2} c^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_1}{\rho_0} \varphi\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) &= \frac{1}{2} (v_2 - c)^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_2}{\rho_0} \varphi\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Исключая из этих уравнений p_1 при помощи равенства $p_1 = \rho_0 a_1^2 \chi(R_1) / \chi'(R_1)$ и вводя переменную $q = a_1^2 / c^2$, где a_1 — скорость звука в невозмущенной среде, а $\chi(R)$ определяется из формул (1.3), получим следующие зависимости плотности, скорости и давления на ударной волне от скорости ударной волны c , величины q , плотности перед ударной волной ρ_1 и плотности ρ_0 :

$$\begin{aligned} \chi'\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) - \frac{\rho_1}{\rho_0} \varphi\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right) \right\} &= \\ = \chi\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \left\{ \varphi\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right) + \frac{\rho_0}{\rho_2} - \varphi\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right\} q & \quad (7.2) \\ v_2 = c \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right), & \quad p_2 = \rho_0 c^2 \left\{ \frac{\rho_1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + q \frac{\chi(\rho_1/\rho_0)}{\chi'(\rho_1/\rho_0)} \right\} \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (7.2) для заданных функции $\varphi(R)$ и параметра R_1 , мы можем найти такое значение $q = q_0$, для которого при вычислении характеристик движения на ударной волне v_2 , ρ_2 , p_2 по формулам (1.21) и (7.2) относительная ошибка составляет, например, 0.05. Следовательно, для $q \leq q_0$ при решении задачи о взрыве условия на ударной волне можно взять в виде (1.21), т. е. автомодельными решениями можно пользоваться для значений r_2 , не превышающих величины

$$\omega(R_1) \left(\frac{E_0}{p_1}\right)^{1/\nu} \quad \left(\omega(R_1) = \left[\frac{4q_0}{(2+\nu)^2} \frac{\chi(R_1)}{\chi'(R_1) \alpha(R_1)} \right]^{1/\nu} \right)$$

Для рассмотренных в разделе 4 значений параметра R_1 величина q_0 получилась равной 0.072.

Считаем своим долгом выразить Л. И. Седову глубокую благодарность за руководство работой.

Поступила 22 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
2. С е д о в Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. ДАН, 9, т. LII, № 1, 1946.
3. С е д о в Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, т. X, вып. 2 1946.
4. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М. Распространение сильных взрывных волн. Сборник № 4 Теоретическая гидромеханика под ред. Л. И. Седова. Оборонгиз, 1949.
5. К о у л Р. Подводные взрывы. М., 1950. Изд. иностр. лит.
6. B r i d g m a n. Freezing Parameters and Compressions of Twenty One Substances to 50 000 kg/cm². Proc. of the Am. Acad. and Sci. Vol. 74, № 12, 1942.
7. B r i d g m a n. The Phase Diagram of Water to 45 000 kg/cm². Journ. of Chem. Phys. vol. 5, № 10, 1937.