Прикладная математика и механика. Том XXII, 1958
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ОБЛАДАЮЩИХ РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Я. Курцвейль

(Прага)

Рассматривается обобщенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = DF(x, t) \tag{0.1}$$

Это уравнение сводится к обычному уравнению $dx / dt = f(x, t)$, если производная $\partial F / \partial t = f(x, t)$ непрерывна. Доказывается существование решений уравнения (0.1) и непрерывная зависимость решений от параметра в предположении, что функция $F(x, t)$ имеет ограниченное изменение t при фиксированном x и удовлетворяет некоторому условию непрерывности по x.

В частности, получается, что решение уравнения $dx / dt = f(x, t) + d(t)$ близко к некоторой (вполне определенной) разрывной функции, если $f(x, t)$ — непрерывная функция, а функция $d(t)$ близка к функции Дирака, т. е.

$$d(t) \geqslant 0, \qquad d(t) = 0 \quad \text{для } |t| \geqslant \delta > 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d(t)\, dt = 1$$

Напомним некоторые определения и результаты статьи [1], которые будут использованы ниже.

Пусть $\delta(\tau)$ — положительная функция, определенная для $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau^*$. Пусть функция $U(\tau, t)$ определена для $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau^*$, $\tau - \delta(\tau) \leqslant t \leqslant \tau + \delta(\tau)$ и ее значениями являются действительные числа. Действительная функция $M(\tau)$, $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau^*$ называется верхней функцией относительно функции U, если существует положительная функция $\delta'(\tau) \leqslant \delta(\tau)$, $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau^*$, так что

$$(\tau - \tau_0)(M(\tau) - M(\tau_0)) \geqslant (\tau - \tau_0)(U(\tau_0, \tau) - U(\tau_0, \tau_0))$$

для

$$\tau_0 - \delta'(\tau_0) \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \delta'(\tau_0) \tag{0.2}$$

Функцию $m(\tau)$ назовем нижней функцией относительно функции U, если функция $-m(\tau)$ является верхней функцией относительно функции $-U$. Для любой верхней функции $M(\tau)$ и для любой нижней функции $m(\tau)$ (относительно функции U) всегда имеет место

$$M(\tau^*) - M(\tau_*) \geqslant m(\tau^*) - m(\tau_*) \tag{0.3}$$

Это неравенство оправдывает следующие определения.

Если функция $U(\tau, t)$ такова, что существуют верхние $M(\tau)$ и нижние $m(\tau)$ функции и при этом

$$\inf_M (M(\tau^*) - M(\tau_*)) = \sup_m (m(\tau^*) - m(\tau_*)) \tag{0.4}$$

где $M(\tau)$ пробегает все верхние функции и $m(\tau)$ пробегает все нижние функции, то функцию U назовем интегрируемой (по Перрону в обобщенном смысле), а число $I = \inf_M(M(\tau^*) - M(\tau_*))$ назовем обобщенным интегралом (по Перрону) от DU в пределах от τ_* до τ^*:

$$I = \int_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t) \tag{0.5}$$

Для определенного таким образом П-интеграла доказаны некоторые основные предложения, например,

$$\int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t) = \int\limits_{\tau_*}^{\sigma} DU(\tau, t) + \int\limits_{\sigma}^{\tau^*} DU(\tau, t) \tag{0.6}$$

если $\tau_* \leqslant \sigma \leqslant \tau^*$ и если определены интегралы в правой или интеграл в левой части равенства.

Если $U(\tau, t) = f(\tau)t$, то интеграл (0.5) существует только тогда, когда существует

$$\int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} f(\tau)\,d\tau$$

по определению Перрона, и в этом случае оба интеграла равны.

Если функция $U(\tau, t) = (U_1(\tau, t), \ldots, U_n(\tau, t))$ принимает значения из эвклидова пространства E_n, то она называется инте рируемой, если интегрируемы все функции: $U_1(\tau, t), \ldots, U_n(\tau, t)$ и

$$\int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} DU(\tau, t) = \left(\int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} DU_1(\tau, t), \ldots, \int\limits_{\tau_*}^{\tau^*} DU_n(\tau, t)\right)$$

Переходим теперь к определению обобщенного дифференциального уравнения (0.1). Пусть G — открытое подмножество эвклидова пространства E_{n+1} и функция $F(x, t)$ определена для $(x, t) \in G$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и принимает значения из эвклидова пространства E_n. Пусть функция $x(\tau)$ определена для $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, принимает значения из E_n и пусть $(x(\tau), \tau) \in G$ для $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$.

Функцию $x(\tau)$ назовем решением обобщенного дифференциального уравнения (0.1), если

$$x(\tau_4) = x(\tau_3) + \int\limits_{\tau_3}^{\tau_4} DF(x(\tau), t) \qquad \text{для } \tau_3,\ \tau_4 \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \tag{0.7}$$

Замечание 0.1. Приведенное определение обобщенного дифференциального уравнения является частным случаем определения, введенного в статье [1], где предполагается, что функция F определена на некотором подмножестве пространства E_{n+2} и зависит от переменных x, τ, t.

Доказано, что все решения обобщенного уравнения (0.1) являются и решениями классического уравнения

$$dx / dt = f(x, t) \tag{0.8}$$

если производная $\partial F(x, t) / \partial t = f(x, t)$ непрерывна, и, наоборот, каждое решение уравнения (0.8) является и решением уравнения (0.1).

Ниже доказывается существование интеграла (0.5); в § 2 доказана теорема существования решения уравнения (0.1); доказательство проводится подобным же образом, как и доказательство такой же теоремы в условиях Каратеодори (Carathéodory).

В § 3 рассмотрена непрерывная зависимость решений от параметра. В § 4 доказана теорема единственности в предположении, что $\omega(\eta) = c\eta\ (c > 0)$.

§ 1. Существование интеграла (0.5). Введем следующие обозначения:

$h_1(t)$, $h_2(t)$ — функции, определенные для $t \in \langle T_1, T_2 \rangle$, возрастающие и непрерывные слева.

$\omega(\eta)$ — функция, определенная для $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$, $\eta_0 > 0$, непрерывная, возрастающая $\omega(\eta) \geqslant c\mu\ (c > 0)$, $\omega(0) = 0$.

G — открытое подмножество в n-мерном евклидовом пространстве $E_n(T_1, T_2)$, $(T_2 > T_1)$.

$\mathrm{F} = \mathrm{F}(G, \omega, h_1)$ — класс функций $F(x, t)$, удовлетворяющих следующим условиям: функция $F(x, t)$ определена для $(x, t) \in G$ и принимает значение из E_n:

$$\| F(x, t_1) - F(x, t_2) \| \leqslant | h_1(t_2) - h_1(t_1) |, \text{ если } (x, t_1), (x, t_2) \in G$$

$$\| F(x_2, t_2) - F(x_2, t_1) - F(x_1, t_2) + F(x_1, t_1) \| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(\| x_2 - x_1 \|) \, | h_1(t_2) - h_1(t_1) |$$
$$\text{если } (x_1, t_1), (x_1, t_2), (x_2, t_1)\ (x_2, t_2) \in G, \ \| x_2 - x_1 \| \leqslant \eta_0$$

$u(\tau)$ — функция, определенная для $\tau \in (\sigma_1, \sigma_2)$, $(\sigma_2 > \sigma_1)$, $u(\tau) \in E_n$

$(u(\tau), \tau) \in G$, $\| u(\tau_2) - u(\tau_1) \| \leqslant | h_2(\tau_2) - h_2(\tau_1) |$, для $\tau_1, \tau_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$

$N(\eta)$ — множество всех точек $t \in (T_1, T_2)$, для которых

$$\text{или } \omega(h_2(t+) - h_2(t)) \geqslant \eta, \text{ или } h_2(t+) - h_2(t) > \eta_0$$

где η — любое положительное число и

$$h_2(t+) = \lim h_2(\tau) \text{ при } \tau \to t, \ \tau > t$$

(число точек множества $N(\eta)$, очевидно, конечное).

$A(\eta, \tau_1, \tau_2, h_2)$ — множество, элементами которого являются конечные последовательности чисел

$$\{\alpha_0, \tau_1, a_1, \tau_2, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} = A$$

если выполняются следующие условия:

1) $\sigma_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s = \sigma_2$;

2) $\alpha_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_s \leqslant \alpha_s$;

3) если $t \in N(\eta) \cap \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, то существует индекс j, так что $t = \tau_j$ и $\tau_j < \alpha_j$; в случае, когда $t = \sigma_2 \in N(\eta)$, требуется только $t = \tau_j$ для подходящего j;

4) если $\tau_j \,\tilde{\in}\, N(\eta)$, то

$$h_2(\alpha_j) - h_2(\alpha_{j-1}) < \eta_0, \quad \omega(h_2(\alpha_j) - h_2(\alpha_{j-1})) < \eta$$

если $\tau_j \in N(\eta)$, то

$$h_2(\alpha_j) - h_2(\tau_j +) < \eta_0, \ \omega(h_2(\alpha_j) - h_2(\tau_j +)) < \eta \qquad (\text{для } \tau_j < \sigma_2)$$
$$h_2(\tau_j) - h_2(\alpha_{j-1}) < \eta_0, \ \omega(h_2(\delta_j) - h_2(\alpha_{j-1})) < \eta$$

Последовательность A будем называть разбиением интервала $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$.

Для формулировки теоремы о существовании интеграла потребуется следующая лемма.

Лемма 1. 1. Множество $A(\eta, \sigma_1, \sigma_2, h_2)$ — не пустое. Для доказательства леммы для каждого $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ подберем положительное число $\delta(\tau)$, удовлетворяющее следующим условиям:

если $\tau \,\tilde{\in}\, N(\eta)$, то

$$\delta(\tau) < \eta_0, \qquad \omega(h_2(\zeta) - h_2(\tau)) < \eta, \qquad \omega(h_2(\tau) - h_2(\zeta') < \eta)$$

если $\tau \in N(\eta)$, то

$$\delta(\tau) < \eta_0, \qquad \omega(h_2(\zeta') - h_2(\tau +)) < \eta, \qquad \omega(h_2(\tau) - h_2(\zeta')) < \eta$$

где

$$\zeta = \zeta(\tau) = \min(\sigma_2, \tau + \delta(\tau)), \qquad \zeta' = \zeta'(\tau) = \max(\sigma_1, \tau - \delta(\tau))$$

Очевидно, интервал (ζ', ζ) не содержит ни одной точки из $N(\eta)$, если $\tau \,\tilde{\in}\, N(\eta)$, и пересечение интервала (ζ', ζ) с множеством $N(\eta)$ содержит только точку τ, если $\tau \in N(\eta)$.

Уменьшая $\delta(\tau)$, можно всегда добиться, чтобы это утверждение было справедливо и относительно замкнутого интервала $\langle \zeta'(\tau), \zeta(\tau) \rangle$.

Пусть интервалы $\langle \zeta'(\tau_1), \zeta(\tau_1) \rangle, \ldots, \langle \zeta'(\tau_s), \zeta(\tau_s) \rangle$ покрывают интервал $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_s$, и пусть интервал $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ уже не покрывается, если пропустили один из интервалов $\langle \zeta'(\tau_j), \zeta(\tau_j)\rangle$. Из этого свойства следует $\zeta'(\tau_j) < \zeta'(\tau_{j+1})$, $\zeta(\tau_j) < \zeta(\tau_{j+1})$, $\zeta(\tau_{j-1}) < \zeta'(\tau_{j+1})$.

В силу этих неравенств существуют числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_s$ такие, что разбиение $\{\alpha_0, \tau_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}$ удовлетворяет всем нашим требованиям. В частности, если $t \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle \cap N(\eta)$, то существует индекс j, так что $t = \tau_j$, так как $t \in \langle \zeta'(\tau), \zeta(\tau)\rangle$ только тогда, когда $t = \tau$. Более подробно эти рассуждения приведены в работе [1], § 1 при доказательстве леммы 1.1.

Теорема 1.1. Интеграл

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(u(\tau), t) \tag{1.1}$$

существует, если

$$\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\eta, \sigma_1, \sigma_2, h_2), \text{ то}$$

$$\left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(u(\tau), t) - \sum_{j=1}^{s} R_j \right\| \leqslant \eta \sqrt{n}\, [h_1(\sigma_2) + h_2(\sigma_2) - h_1(\sigma_1) - h_2(\sigma_1)]$$

где

$$R_j = F(u(\tau_j), \alpha_j) - F(u(\tau_j), \alpha_{j-1}), \qquad \text{если } \tau_j \overline{\in} N(\eta) \text{ или } \tau_j = \sigma_2$$

$$R_j = F(u(\tau_j +), \alpha_j) - F(u(\tau_j +), \tau_j +) + F(u(\tau_j), \tau_j +) -$$
$$- F(u(\tau_j), \alpha_{j-1}), \text{ если } \tau_j \in N(\eta),\ \tau_j < \sigma_2$$

Следствие 1.1.

$$\left\| \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} DF(u(\tau), t) \right\| \leqslant |h_1(\sigma_4) - h_1(\sigma_3)| \qquad \text{для } \sigma_3, \sigma_4 \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$$

Доказательство. Пусть $U(\tau, t)$ — любая компонента векторной функции $F(u(\tau), t)$ и пусть $\eta > 0$. Если $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle\, \tau_0 \overline{\in} N(\eta)$, то положим

$$\begin{aligned} M(\tau_0, \tau) &= U(\tau_0, \tau) + \eta(h_1(\tau) + h_2(\tau)) \\ m(\tau_0, \tau) &= U(\tau_0, \tau) - \eta(h_1(\tau) + h_2(\tau)) \end{aligned} \qquad \tau \in \langle \tau_1, \tau_2\rangle$$

Если $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle \cap N(\eta)$, положим

$$M(\tau_0, \tau) = U(\tau_0, \tau) + \eta(h_1(\tau) + h_2(\tau)) \text{ для } \sigma_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$$

$$M(\tau_0, \tau) = U(\tau_0, \tau_0 +) + U(\tau_0 +, \tau) - U(\tau_0 +, \tau_0 +) + \eta(h(\tau) + h_2(\tau))$$
$$\text{для } \tau_0 < \tau \leqslant \sigma_2$$

$$m(\tau_0, \tau) = U(\tau_0, \tau) - \eta(h_1(\tau) + h_2(\tau)) \quad \text{для } \sigma_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$$

$$m(\tau_0, \tau) = U(\tau_0, \tau_0 +) + U(\tau_0 +, \tau) - U(\tau_0 +, \tau_0 +) - \eta(h_1(\tau) + h_2(\tau))$$
$$\text{для } \tau_0 < \tau \leqslant \sigma_2$$

Определим функцию $M(\tau)$ для $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$ следующим образом:

$$M(\sigma_1) = 0$$

$$M(\tau) = \sum_{j=1}^{i-1} [M(\tau_j, \alpha_j) - M(\tau_j, \alpha_{j-1})] + M(\tau_i, \tau) - M(\tau_i, \alpha_{i-1})$$
$$\text{если } \alpha_{i-1} < \tau \leqslant \alpha_i$$

Докажем, что $M(\tau)$ — верхняя функция относительно $U(\tau, t)$. Неравенство

$$(\tau - \tau_0)[M(\tau) - M(\tau_0)] \geqslant (\tau - \tau_0)[U(\tau_0, \tau) - U(\tau_0, \tau_0)]$$

очевидно, справедливо, если $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle \cap N(\eta)$, $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \sigma_2$ и если τ достаточно близко к τ_0.

Пусть $\tau, \tau_0 \in \langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$, если $\tau_i \,\tilde{\in}\, N(\eta)$. Если $\tau_i \in N(\eta)$, то предположим, что $\tau, \tau_0 \in \langle \alpha_{i-1}, \tau_i \rangle$. Получаем

$$\begin{gathered}(\tau-\tau_0)[U(\tau_0,\tau)-U(\tau_0,\tau_0)] \leqslant (\tau-\tau_0)[U(\tau_i,\tau)-U(\tau_i,\tau_0)] + \\ + |\tau-\tau_0|\,|U(\tau_0,\tau)-U(\tau_0,\tau_0)-U(\tau_i,\tau)+U(\tau_i,\tau_0)| \leqslant \\ \leqslant (\tau-\tau_0)[U(\tau_i,\tau)-U(\tau_i,\tau_0)] + |\tau-\tau_0|\,\omega(\|u(\tau_i)-u(\tau_0)\|)\,|h_1(\tau)-h_1(\tau_0)| \leqslant \\ \leqslant (\tau-\tau_0)[U(\tau_i,\tau)-U(\tau_i,\tau_0)+\eta(h_1(\tau)-h_1(\tau_0))] = (\tau-\tau_0)(M(\tau)-M(\tau_0))\end{gathered}$$

Здесь использованы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\|u(\tau_i)-u(\tau_0)\| \leqslant h_2(\alpha_i)-h_2(\alpha_{i-1}) \leqslant \eta_0 \\ \omega(\|u(\tau_i)-u(\tau_0)\|) \leqslant \omega(h_2(\alpha_i)-h_2(\alpha_{i-1})) < \eta \\ |U(\tau_0,\tau)-U(\tau_0,\tau_0)-U(\tau_i,\tau)+U(\tau_i,\tau_0)| \leqslant \\ \leqslant \|F(u(\tau_0),\tau)-F(u(\tau_0),\tau_0)-F(u(\tau_i),\tau)+F(u(\tau_i),\tau_0)\| \leqslant \\ \leqslant \omega(\|u(\tau_0)-u(\tau_i)\|)\,|h_1(\tau)-h_1(\tau_0)|\end{gathered}$$

Остается рассмотреть случай, когда $\tau_i \in N(\eta)$, $\tau_0, \tau \in \langle \tau_i, \alpha_i \rangle$. В этом случае аналогичным путем получим

$$\begin{gathered}(\tau-\tau_0)[U(\tau_0,\tau)-U(\tau_0,\tau_0)] \leqslant (\tau-\tau_0)[U(\tau_i+,\tau)-U(\tau_i+,\tau_0)] + \\ + |\tau-\tau_0|\,|U(\tau_0,\tau)-U(\tau_0,\tau_0)-U(\tau_i+,\tau)+U(\tau_i+,\tau_0)| \leqslant \\ \leqslant (\tau-\tau_0)[U(\tau_i+,\tau)-U(\tau_i+,\tau_0)] + |\tau-\tau_0|\,\eta\,|h_1(\tau)-h_1(\tau_0)| = \\ = (\tau-\tau_0)[U(\tau_i+,\tau)-U(\tau_i+,\tau_0)+\eta(h_1(\tau)-h_1(\tau_0))] = \\ = (\tau-\tau_0)[M(\tau)-M(\tau_0)]\end{gathered}$$

Здесь приняты во внимание оценки

$$\begin{gathered}|U(\tau_0,\tau)-U(\tau_0,\tau_0)-U(\tau_i+,\tau)+U(\tau_i+,\tau_0)| \leqslant \\ \leqslant \|F(u(\tau_0),\tau)-F(u(\tau_0),\tau_0)-F(u(\tau_i+),\tau)+F(u(\tau_i+),\tau_0))\| \leqslant \\ \leqslant \omega(\|u(\tau_0)-u(\tau_i+)\|)\,|h_1(\tau)-h_1(\tau_0)| \leqslant \omega(h_2(\alpha_i)-h_2(\tau_i+))\,|h_1(\tau)-h_1(\tau_0)| \leqslant \\ \leqslant \eta\,|h_1(\tau)-h_1(\tau_0)|\end{gathered}$$

Итак, мы доказали, что для каждого $\tau_0 \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ выполняется неравенство (0.2), если только $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ достаточно близко к τ_0. Значит, $M(\tau)$ является верхней функцией относительно $U(\tau, t)$. Подобным же образом построим нижнюю функцию $m(t)$. Из неравенства
$M(\sigma_2)-M(\sigma_1)-(m(\sigma_2)-m(\sigma_1)) \leqslant 2\eta(h_1(\sigma_2)+h_2(\sigma_2)-h_1(\sigma_1)-h_2(\sigma_1))$
следует, что существует интеграл (0.5), так как функции $M(\tau)$, $m(\tau)$ возможно построить для любого положительного η (и соответствующего разбиения). Значит, существует и интеграл (1.1). Далее из неравенства

$$M(\sigma_4)-M(\sigma_3) \geqslant \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} DU(\tau,t) \geqslant m(\sigma_4)-m(\sigma_3)$$

и из представления функций $M(\tau)$, $m(\tau)$ следует, что

$$\left|\int_{\sigma_3}^{\sigma_4} DU(\tau,t)-\sum_{j=l}^{m} P_j\right| \leqslant \eta(h_1(\sigma_4)+h_2(\sigma_4)-h_1(\sigma_3)-h_2(\sigma_3))$$

где P_j — соответствующая компонента вектора R_j. Отсюда и следует оценка для теоремы (1.1).

§ 2. Теорема существования решения уравнения (0.1). Пусть $F(x, t)$ — фиксированная функция из класса $F(G, \omega, h_1)$. Обозначим через G_F подмножество множества G, состоящее из точек (x, t), для которых $(x+F(x, t+)-F(x, t), t) \in G$. Очевидно, если для определенного t

$h_1(t+) = h_1(t)$ и $(x, t) \in G$, то $(x, t) \in G_F$. Легко проверить, что G_F — открытое множество.

Теорема 2.1. Пусть $(x_0, t_0) \in G_F$ и подберем число $\xi > 0$, обладающее следующим свойством: если $t_0 < t \leqslant t_0 + \xi$ и $\|x - [x_0 + F(x_0, t_0+) - F(x_0, t_0)]\| \leqslant h_1(t) - h_1(t_0+)$, то $(x, t) \in G$; тогда существует функция $x(\tau)$, определенная для $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + \xi$, имеющая ограниченное изменение, и непрерывная слева, которая является решением уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \tag{2.1}$$

и удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Замечание 2.1. В силу следствия 1.1 получаем, что каждое решение $u(\tau)$ уравнения (2.1), которое имеет ограниченное изменение и непрерывно слева, удовлетворяет неравенству

$$\| u(\tau_2) - u(\tau_1) \| \leqslant | h_1(\tau_2) - h_1(\tau_1) | \tag{2.2}$$

для любых τ_1, τ_2 из интервала, на котором решение $u(\tau)$ определено. В статье [1], § 1 дано другое равносильное определение интеграла (0.5) при помощи частных сумм и некоторого предельного перехода. Из этого определения легко вывести, что оценка (2.2) справедлива для любой функции $u(\tau)$, являющейся решением уравнения (2.1), без предположения, что функция $u(\tau)$ имеет ограниченное изменение и непрерывна слева, так как аналогичная оценка в этом случае справедлива для любой из частных сумм, входящих в это определение.

Замечание 2.2. Решение $x(\tau)$ определено на некотором интервале, примыкающем к точке t_0 справа, и продолжимо по возрастающему τ, как и в классическом случае, пока точка $(x(\tau), \tau)$ находится в множестве G_F. Но решения не всегда продолжимы по убывающему τ. Рассмотрим самый простой пример. Пусть $x \in E_1$ и $F(x, t) = x$ для $t \leqslant 0$, $F(x\ t) = 0$ для $t > 0$. Для введенного нами понятия справедливо следующее предположение: если $\tau_* \leqslant \tau_0 < \tau^*$ и интеграл (0.5) для интервала $\langle \tau_*, \tau^* \rangle$ существует, то существует интеграл (0.5) для интервала $\langle \tau_*, \tau_0 \rangle$, и если существует $\lim U(\tau_0, t)$ при $t \to \tau_0+$, то существует и

$$\lim_{\tau_1 \to \tau_0+} \int_{\tau_*}^{\tau_1} DU(\tau, t) = \int_{\tau_*}^{\tau_0} DU(\tau, t) + \lim_{t \to \tau_0+} U(\tau_0, t) - U(\tau_0, \tau_0) \tag{2.2*}$$

(см. [1], теоремы 1.3.3 и 1.3.6). В силу этого предположения для любого решения $x(\tau)$, которое определено в некоторой окрестности числа $\tau = 0$, справедливо $\lim x(\tau) = 0$ при $\tau \to 0+$ и, значит, для рассматриваемого примера решение $x_1(\tau)$, определенное равенством $x_1(\tau) = 1$ для $\tau > 0$, непродолжимо для $\tau \leqslant 0$.

Доказательство. Определим последовательность функций $x_i(\tau)$:

$$x_i(\tau) = x_0 \qquad \text{для } t_0 - \xi / i \leqslant \tau \leqslant t_0$$

$$x_i(\tau_i) = x_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} DF(x_i(\tau - \xi / i), t) \qquad \text{для } t_0 < \tau_1 \leqslant t_0 + \xi$$

Пользуясь теоремой 1.1 и следствием 1.1, можно проверить, что функции $x_i(\tau)$ определены единственным образом для $t_0 - \xi / i \leqslant \tau \leqslant t_0 + \xi$ для натуральных $i \geqslant i_0$ и что

$$\| x_i(\tau_2) - x_i(\tau_1) \| \leqslant | h_1(\tau_2) - h_1(\tau_1) | \quad \text{для} \quad \tau_1, \tau_2 \in \langle t_0 - \xi / i,\ t_0 + \xi \rangle$$

$$x_i(t_0+) = x_0 + F(x_0, t_0+) - F(x_0, t_0) \qquad (i \geqslant i_0) \tag{2.3}$$

В силу неравенства (2.3) из последовательности $x_i(\tau)$ возможно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на интервале

$\langle t_0, t_0+\xi\rangle$. Поэтому будем предполагать, что $x_i(\tau)\to x(\tau)$ равномерно для $\tau\in\langle t_0, t_0+\xi\rangle$, $i\to\infty$.

Очевидно, $\|x(\tau_2)-x(\tau_1)\|\leqslant|h_1(\tau_2)-h_1(\tau_1)|$ и $x_i(\tau-\xi/i)\to x(\tau)$ (но не равномерно), так как функция $h_1(\tau)$ непрерывна слева.

Вычислим интеграл (1.1), где $t_0\leqslant\sigma_1<\sigma_2\leqslant t_1+\eta$.

Пусть η — любое положительное число ($\eta<\eta_0$). Выберем фиксированное разбиение $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\}\in A(\eta, \sigma_1, \sigma_2, h_1)$.

По теореме 1.1. интеграл (1.1) равен частной сумме

$$\sum_{\substack{j\\ \tau_j\,\widetilde{\in}\,N(\eta),\ \text{или } j=s}}[F(x(\tau_j), \alpha_j)-F(x(\tau_j), \alpha_{j-1})]+$$
$$+\sum_{\substack{j\\ \tau_j\in N(\eta),\ j<s}}[F(x(\tau_j+), \alpha_{j+1})-F(x(\tau_j+), \tau_j+)+ \tag{2.4}$$
$$+F(x(\tau_j), \tau_j+)-F(x(\tau_j), \alpha_{j-1}))]$$

с точностью до члена, не большего по норме, чем $K\eta$, где K не зависит от η.

Положим $\tau_{j,i}'=\tau_j$, если $\tau_j\,\widetilde{\in}\,N(\eta)$, или $j=s$, $\tau_{j,i}'=\tau_j+\xi/i$, если $j<s$ и $\tau_j\in N(\eta)$. Пусть $g_i(t)=h_1(t_0)$, если $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\xi/i$, и $g_i(t)=$ $=h_1(t-\xi/i)$ для $t_0+\xi/i<t\leqslant t_0+\xi$.

Имеем $\{\alpha_0, \tau'_{1,i}, \alpha_1, \tau'_{2,i}, \ldots, \tau'_{s,i}, \alpha_s\}\in A(\eta, \sigma_1, \sigma_2, h_2)$ для достаточно больших i и, следовательно, по теореме 1.1 интеграл

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x_i(\tau-\xi/i), t)$$

выражается частной суммой

$$\sum_{\substack{j\\ \tau_j\,\widetilde{\in}\,N(\eta),\ \text{или } j=s}}[F(x_i(\tau_j-\xi/i), \alpha_j)-F(x_i(\tau_j-\xi/i), \alpha_{j-1})]+$$
$$+\sum_{\substack{j\\ \tau_j\in N(\eta),\ j<s}}[F(x_i(\tau_j+), \alpha_{j+1})-F(x_i(\tau_j+), \tau_j+)+ \tag{2.5}$$
$$+F(x_i(\tau_j), \tau_j+)-F(x(\tau)_j, \alpha_{j-1})]$$

с точностью до члена, норма которого не превышает $K\eta$, где K не зависит от i и η, для всех достаточно больших i. Так как $x_i(\tau)\to x(\tau)$, $x_i(\tau-\xi/i)\to x(\tau)$, $F(x, t)\in\mathbf{F}$, частные суммы (2.4) и (2.5) как угодно близки, если i — достаточно большое. Значит,

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x_i(\tau-\xi/i), t)\to\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(x(\tau), t) \quad \text{для} \quad i\to\infty$$

и $x(\tau)$ является решением уравнения (2.1). Теорема доказана.

§ 3. Непрерывная зависимость решений от параметра. (Основной является теорема 3.1, последующие теоремы получаются из нее как частные случаи.)

Пусть $F(x, t)$ — функция из класса $\mathbf{F}(G, \omega, h)$ и $F_k(x, t)$ — функция из класса $\mathbf{F}(G, \omega, h_k)$, $k=3, 4, 5, \ldots$, где $h(t)$ и $h_k(t)$ — возрастающие функции для $t \in \langle 0, T\rangle$, $(G \subset E_n \langle 0, T\rangle)$, непрерывные слева. Пусть H — множество точек непрерывности функции $h(t)$, G_1 — некоторое открытое подмножество в G_F, содержащее все точки $(x, t) \in G$, для которых $t \in H$.

Условимся называть последовательность $F_k(x, t)$ безусловно сходящейся к функции $F(x, t)$ в G_1 и писать $F_k(x, t) \underset{=}{\Rightarrow} F(x, t)$, если выполняются следующие свойства:

(I) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup (h_k(t_2) - h_k(t_1)) \leqslant h(t_2) - h(t_1)$ для $t_1, t_2 \in H$; $t_1 < t_2$

(II) $F_k(x, t) \to F(x, t)$ для $k \to \infty$ $(x, t) \in G_1$, $t \in H$

(III) если $(x_0, t_0) \in G_1$, $t_0 \tilde{\in} H)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существуют положительные числа δ_1, δ_2, обладающие следующим свойством: для любых чисел $t_1, t_2 \in H$, $t_0 - \delta_1 < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \delta_1$ существует $K > 0$, так что:

(a) если $\|y - x_0\| < \delta_2$ и $k > K$, то существует функция $x_k(\tau)$, определенная для $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$, которая является решением уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_k(x, t), \qquad x_k(t_1) = y$$

(b) каждая функция $x_k(\tau)$, удовлетворяющая (a), удовлетворяет и неравенству $\|x_k(t_2) - x_k(t_1) - F(x_0, t_0+) + F(x_0, t_0)\| < \varepsilon$ и существует положительное число μ, не зависящее от решения $x_k(\tau)$, индекса k и точки y, такое, что расстояние любой точки $(x_k(\tau), \tau)$ $(t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2,\ k > K)$ от границы множества G_1 будет больше, чем μ.

Теорема 3.1. Пусть $F_k(x, t) \underset{=}{\Rightarrow} F(x, t)$ в G_1, пусть $x(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \tag{3.1}$$

которое однозначно определено на интервале $\langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$ своим начальным условием, $\sigma_1, \sigma_2 \in H$, $(x(\tau), \tau) \in G_1$ для $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$. Пусть $y_k \in E_n$, $y_k \to x(\sigma_1)$.

Тогда:

(c) для всех достаточно больших k существует решение $x_k(\tau)$ уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_k(x, t) \tag{3.2}$$

определенное для $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$, $x_k(\sigma_1) = y_k$, и расстояние любой точки $(x_k(\tau), \tau)$ от границы множества G_1 больше некоторого положительного числа μ;

(d) если $x_k(\tau)$ — последовательность функций, удовлетворяющих условию (c), то

$$x_k(\tau) \to x(\tau) \quad \text{для } k \to \infty,\ \tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle \cap H$$

Замечание. Условимся говорить, что решение $x(\tau)$ однозначно определено своим начальным условием, если каждое решение $u(\tau)$ уравнения (3.1), определенное на некотором интервале $\langle \sigma_1, \sigma_2'\rangle \subset \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$, $u(\sigma_1) = x(\sigma_1)$, совпадает с $x(\tau)$ на $\langle \sigma_1, \sigma_2'\rangle$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. Если условие (c) теоремы 3.1 выполняется на некотором интервале $\langle \sigma_1, \sigma_2'\rangle \subset \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle$, $\sigma_2' \in H$, то и условие (d) выполняется на том же интервале $\langle \sigma_1, \sigma_2'\rangle$.

Доказательство. Пусть последовательность $x_k(\tau)$ удовлетворяет условиям (c) теоремы 3.1 на отрезке $\langle \sigma_1, \sigma_2'\rangle$. Тогда существует подпоследовательность $u_k(\tau)$, сходящаяся для каждого $\tau \in \langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle \cap H$ (так как для функций $u_k(\tau)$ справедливы оценки $\|u_k(\lambda_2) - u_k(\lambda_1)\| \leqslant |h_k(\lambda_2) - h_k(\lambda_1)|$ для $\lambda_1, \lambda_2 \in \langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle$ согласно следствию 2.1). Положим

$$u(\tau) = \lim_{k\to\infty} u_k(\tau), \qquad \tau \in \langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle \cap H$$

Тогда имеем

$$\|u(\lambda_2) - u(\lambda_1)\| \leqslant |h(\lambda_2) - h(\lambda_1)|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle \cap H \tag{3.3}$$

Дополним определение функции $u(\tau)$ таким образом, чтобы функция $u(\tau)$ была определенной и непрерывной слева на интервале $\langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle$. В таком случае (3.3) справедливо для $\lambda_1, \lambda_2 \in \langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle$. Пусть σ_3 — любое число из $\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$, $\sigma_3 > \sigma_1$, $\sigma_3 \in H$. Наша ближайшая цель — доказать, что

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_3} DF_k(u_k(\tau), t) \to \int_{\sigma_1}^{\sigma_3} DF(u(\tau), t) \quad \text{для } k \to \infty \tag{3.4}$$

Пусть $\eta > 0$. Пусть $\tilde{\tau}_1 < \tilde{\tau}_2 < \ldots < \tilde{\tau}_r$ — все точки множества $\langle\sigma_1, \sigma_3\rangle \cap N(\eta)$. В силу наших предположений — $(u(\tilde{\tau}_j), \tilde{\tau}_j) \in G_1$. Для числа $\varepsilon = \eta / i$ и точки $(u(\tilde{\tau}_j), \tilde{\tau}_j)$ подберем числа $\delta_{1j} > 0$, $\delta_{2j} > 0$ так, чтобы выполнялось условие (III) безусловной сходимости; пусть δ_j — такое положительное число, что

$$\begin{gathered} h(\tilde{\tau}_j) - h(\tilde{\tau}_j - \delta_j) + h(\tilde{\tau}_j + \delta_j) - h(\tilde{\tau}_j +) < \eta / r \\ \delta_j < \delta_{1j}, \qquad \omega(h(\tilde{\tau}_j) - h(\tilde{\tau}_j - \delta_j)) < \delta_{2j} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Подобным образом, как и в лемме 1.1, докажем, что существует разбиение $\{\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \ldots, \tau_s, \alpha_s\} \in A(\eta, \sigma_1, \sigma_3, h)$, удовлетворяющее еще следующим условиям:

(e) пусть $\tau_{p_1} < \cdots < \tau_{p_r}$ — все числа $\tau_j \in \langle\sigma_1, \sigma_3\rangle \cap N(\eta)$; тогда $\tau_{p_1} = \tilde{\tau}_1$, $\tau_{p_2} = \tilde{\tau}_2, \ldots, \tau_{p_r} = \tilde{\tau}_r$, и, следовательно,

$$\tau_{p_j} - \delta_j < \alpha_{p_j - 1} < \tau_{p_j} < \alpha_{p_j} < \tau_{p_j} + \delta_j$$

(f) если $\tau_j \,\tilde{\in}\, N(\eta)$, то $\tau_j \in H$;

(g) $\alpha_j \in H$, $j = 0, 1, \ldots, s$.

(Для построения разбиения исходим из системы интервалов J, определенной следующим образом: интервал $\langle\zeta'(\tau), \zeta(\tau)\rangle$ входит в систему интервалов J, если $\tau \in \langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle \cap N(\eta)$, а следовательно, $\tau = \tau_j$, $\tau_j - \delta_j < \zeta'(\tau_j) < \tau_j < \zeta(\tau_j) < \tau_j + \delta_j$, $\omega(h(\zeta(\tau_j)) - h(\tau_j +)) < \eta$, $\omega(h(\tau_j) - h(\zeta'(\tau_j))) < \eta$ или если $\tau \,\tilde{\in}\, N(\eta)$, $\tau \in \langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle$, и $\zeta(\tau)$, $\zeta'(\tau)$ числа, удовлетворяющие неравенствам $\sigma_1 \leqslant \zeta'(\tau) \leqslant \tau \leqslant \zeta(\tau) \leqslant \sigma_2'$, $\omega(h(\zeta(\tau)) - h(\zeta')(\tau)) < \eta$, $\zeta'(\tau) < \tau$, если $\sigma_1 < \tau$, $\zeta(\tau) > \tau_1$, если $(\tau) < \sigma_2'$.

Легко показать, что интервалы из системы J покрывают интервал $\langle\sigma_1, \sigma_2'\rangle$ и т. д.)

Очевидно, $\{\alpha_{p_{j-1}}, \tau_{p_{j-1}+1}, \ldots, \alpha_{p_j - 1}\} \in A(\eta, \alpha_{p_{j-1}}, \alpha_{p_j - 1}, h)$, где $j = 1, \ldots$ $\ldots, r+1$, $\alpha_{p_0} = \alpha_0$, $\alpha_{p_{r+1}} = \alpha_s$, и из теоремы 2.1 следует

$$\begin{gathered} \left\| \int_{\alpha_{p_{j-1}}}^{\alpha_{p_j - 1}} DF(u(\tau), t) - \sum_{i = p_{j-1}+1}^{p_j - 1} [F(u(\tau_i), \alpha_i) - F(u(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| \leqslant \\ \leqslant 2\eta \, [h(\alpha_{p_j - 1}) - h(\alpha_{p_{j-1}})] \end{gathered} \tag{3.6}$$

Далее для всех достаточно больших k

$$\{\alpha_{p_{j-1}}, \tau_{p_{j-1}+1}, \ldots, \alpha_{p_j-1}\} \in A(\gamma, \alpha_{p_{j-1}}, \alpha_{p_{j-1}}, h_k)$$

и, применяя теорему 2.1, получаем

$$\begin{gathered}\left\| \int\limits_{\alpha_{p_{j-1}}}^{\alpha_{p_j-1}} DF_k(u_k(\tau), t) - \sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j-1} [F_k(u_k(\tau_i), \alpha_i) - F_k(u_k(\tau_i), \alpha_{i-1})] \right\| \leqslant \\ \leqslant 3\eta\, [h(\alpha_{p_j-1}) - h(\alpha_{p_{j-1}})]\end{gathered} \tag{3.7}$$

Так как $\tau_i, \alpha_i \in H$, $u_k(\tau_i) \to u(\tau_i)$, то из предположений о последовательности $F_k(x, t)$ следует, что

$$\begin{gathered}\sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j-1} [F_k(u_k(\tau_i), \alpha_i) - F_k(u_k(\tau_0), \alpha_{i-1})] \to \\ \to \sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j-1} [F(u(\tau_i), \alpha_i) - F(u(\tau_i), \alpha_{i-1})] \quad \text{для } k \to \infty\end{gathered} \tag{3.8}$$

Итак, из (3.6), (3.7) и (3.8) получаем, что

$$\left\| \int\limits_{\alpha_{p_{j-1}}}^{\alpha_{p_j-1}} DF_k(u_k(\tau), t) - \int\limits_{\alpha_{p_{j-1}}}^{\alpha_{p_j-1}} DF(u(\tau), t) \right\| \leqslant 6\eta\, [h(\alpha_{p_j-1}) - h(\alpha_{p_{j-1}})] \tag{3.9}$$

для достаточно больших k, $j = 1, \ldots, r+1$. Пусть теперь j — одно из чисел $1, \ldots, n$. Согласно следствию 2.1 и последнему из неравенств (3.5)

$$\| u(\alpha_{p_j-1}) - u(\tau_{p_j}) \| \leqslant \omega(h(\tau_{p_j}) - h(\alpha_{p_j-1})) < \omega(h(\tilde{\tau}_j) - h(\tilde{\tau}_j - \delta_j)) < \delta_{2j}$$

и, следовательно, для достаточно больших k

$$\| u_k(\alpha_{p_j-1}) - u(\tau_{p_j}) \| < \delta_{2j}$$

так как $\alpha_{p_j-1} \in H$ и $u_k(\alpha_{p_j-1}) \to u(\alpha_{p_j-1})$.

Таким образом, по определению безусловной сходимости получаем представление

$$\begin{gathered}\int\limits_{\alpha_{p_j-1}}^{\alpha_{p_j}} D\underset{k}{F}(u_k(\tau), t) = u_k(\alpha_{p_j}) - u_k(\alpha_{p_{j-1}}) = \\ = F(u(\tau_{p_j}), \tau_{p_j}+) - F(u(\tau_{p_j}), \tau_{p_j}) + z_{kj}\end{gathered} \tag{3.10}$$

где $\|z_{kj}\| < \eta / r$ для достаточно больших k.

Из определения интеграла и из следствия 2.2 получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\alpha_{p_j-1}}^{\alpha_{p_j}} DF(u(\tau), t) = \int\limits_{\alpha_{p_j-1}}^{\tau_{p_j}} \ldots + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\tau_{p_j}}^{\tau_{p_j}+\varepsilon} \ldots + \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\tau_{p_j}+\varepsilon}^{\alpha_{p_j}} \ldots = \\ = F(u(\tau_{p_j}), \tau_{p_j}+) - F(u(\tau_{p_j}), \tau_{p_j}) + z_j\end{gathered} \tag{3.11}$$

где [см. (3.5)]

$$\begin{gathered}\| z_j \| \leqslant h(\alpha_{p_j}) - h(\tau_{p_j}+) + h(\tau_{p_j}) - h(\alpha_{p_j-1}) < \\ < h(\tau_{p_j} + \delta_j) - h(\tau_{p_j}+) + h(\tau_{p_j}) - h(\tau_{p_j} - \delta_j) < \eta / r\end{gathered}$$

Из (3.10) и (3.11) получается, что

$$\left\| \int_{\alpha_{p_{j-1}}}^{\alpha_{p_j}} DF_k(u_k(\tau), t) - \int_{\alpha_{p_{j-1}}}^{\alpha_{p_j}} DF(u(\tau), t) \right\| < \frac{2\eta}{r} \qquad (j = 1, \ldots, n) \quad (3.12)$$

для достаточно больших k. Следовательно, из (3.9) и (3.12) получаем, что

$$\left\| \int_{\sigma_1}^{\sigma_3} DF_k(u_k(\tau), t) - \int_{\sigma_1}^{\sigma_3} DF(u(\tau), t) \right\| \leqslant \eta\,[2 + 6(h(\sigma_2') - h(\sigma_1))]$$

Так как η — любое положительное число, то

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_3} DF_k(u_k(\tau), t) \to \int_{\sigma_1}^{\sigma_3} DF(u(\tau), t) \qquad \text{для } k \to \infty$$

$$u(\sigma_3) - u(\sigma_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_3} DF(u(\tau), t) \qquad \text{для} \quad \sigma_3 \in \langle \sigma_1, \sigma_2' \rangle \cap H \qquad (3.13)$$

$$u_k(\sigma_3) \to u(\sigma_3), \qquad u_k(\sigma_1) \to u(\sigma_1)$$

Но функция $u(\sigma_3)$ и интеграл в (3.13), рассматриваемый как функция независимой переменной σ_3, представляют собой непрерывные слева функции с ограниченным изменением и, следовательно, (3.13) справедливо для $\sigma_3 \in \langle \sigma_1, \sigma_2' \rangle$. Значит, $u(\tau)$ является решением уравнения (3.1) $u(\sigma_1) = x(\sigma_1)$, и так как решение $x(\tau)$ единственно, то $u(\tau) = x(\tau)$ для $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2' \rangle$.

Так как каждая сходящаяся последовательность, выбранная из последовательности $x_k(\tau)$, сходится к функции $x(\tau)$, последовательность $x_k(\tau)$ сходится к функции $x(\tau)$, и лемма 3.1 доказана.

Переходя к доказательству теоремы, отметим, что из теоремы 2.1 и следствия 2.1, из того, что $\sigma_1 \in H$ и

$$\limsup\,[h_k(t_2) - h_k(t_1)] \leqslant h(t_2) - h(t_1) \qquad \text{для } t_1, t_2 \in H, \ t_1 < t_2$$

следует, что существует число $\sigma_1' > \sigma$ такое, что утверждение (c) из теоремы 3.1 справедливо на $\langle \sigma_1, \sigma_1' \rangle$.

Пусть σ_4 — верхняя грань таких чисел $\sigma_2' \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$, что утверждение (c) справедливо на $\langle \sigma_1, \sigma_2' \rangle$, и пусть $\sigma_4 < \sigma_2$. Если $\sigma_4 \in H$, возьмем числа σ_2', $\sigma_5 \in H$, $\sigma_2' < \sigma_4 < \sigma_5$, достаточно близкие к σ_4.

В силу доказанной леммы $x_k(\sigma_2') \to x(\sigma_2')$ и так как расстояние точки $(x(\sigma_4), \sigma_4)$ от дополнения множества G — положительное число, то из теоремы 2.1 и следствия 2.1 вытекает, что решения $x_k(\tau)$ (с достаточно большими индексами) возможно продолжить на интервал $\langle \sigma_2', \sigma_5 \rangle$ с сохранением справедливости утверждения (c). Если $\sigma_4 \tilde{\in} H$, то для любого $\varepsilon > 0$ и точки $(x(\sigma_4), \sigma_4) \in G_1$ по предположению теоремы 3.1 можно подобрать числа δ_1, δ_2, соответствующие определению безусловной сходимости. Пусть числа σ_2', $\sigma_5 \in \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle$ удовлетворяют условиям

$$\sigma_4 - \delta_2 < \sigma_2' < \sigma_4 < \sigma_5 < \sigma_4 + \delta_2 \qquad (\sigma_2', \sigma_5 \in H)$$

Так как $x_k(\sigma_2') \to x(\sigma_2')$, решения $x_k(\tau)$ продолжимы на интервал $\langle \sigma_2', \sigma_5 \rangle$ с сохранением условия (c) в силу определения безусловной сходимости. Таким образом, приходим к противоречию, и теорема 3.1 доказана.

Основным затруднением, с которым встретимся, применяя теорему 3.1, является сложное понятие безусловной сходимости. Поэтому дадим некоторые признаки, достаточные для безусловной сходимости.

Теорема 3.2. Пусть $h_k(t) \to h(t)$ равномерно на $\langle 0, T\rangle$ и $F_k(x, t) \to F(x,t)$ равномерно в G. Тогда $F_k(x, t) \overset{\to}{\underset{=}{\to}} F(x, t)$ и $G_1 = G_F$.

Замечание 3.2. В условиях теоремы 3.2 возможно пользоваться теоремой 3.1 [сохраняя предположения о решении $x(t)$ уравнения (3.1)]. Так как $x_k(\tau) \to x(\tau)$ для $\tau \in \langle \sigma_1, \sigma_2\rangle \cap H$ и $h_k(\tau) \to h(\tau)$ равномерно, то и $x_k(\tau) \to x(\tau)$ равномерно. В этом случае требование $\sigma_1, \sigma_2 \in H$ отпадает.

Доказательство. Пусть $(x_0, t_0) \in G_F$ и ρ — положительное число, не большее чем расстояние любой из точек (x_0, t_0) и $(x_0 + F(x_0, t_0+) - F(x_0, t_0), t_0)$ от дополнения множества G. Пусть $\varepsilon > 0$, и подберем положительные числа δ_1, δ_2, так что

$$\delta_1 < {}^1/_2\rho$$

$$\delta_2 + h(t_0 + \delta_1) - h(t_0+) + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1) + \\ + \omega(\delta_2 + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1))[h(t_0+) - h(t_0)] < \min(\varepsilon, {}^1/_2\rho)$$

Пусть

$$\theta_k = \max(\sup_t |h_k(t) - h(t)|, \sup_{x,t} \|F_k(x, t) - F(x, t)\|)$$

и $k > 0$ — такое число, что

$$6\theta_k + \delta_2 + h(t_0 + \delta_1) - h(t_0+) + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1) + \\ + \omega(2\theta_k + \delta_2 + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1))[h(t_0+) - h(t_0)] < \min(\varepsilon, {}^1/_2\rho) \quad (3.14)$$

$$t_0 - \delta_1 < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \delta_1, \qquad \|y - x_0\| < \delta_2$$

Согласно теореме 2.1 и следствию 2.1 решение $x_k(\tau)$ уравнения (3.2) $x_k(t_1) = y$ существует на интервале $\langle t_1, t_0\rangle$, $k > K$ и при этом справедлива оценка

$$\|x_k(t_0) - x_0\| \leqslant \|x_k(t_1) - x_0\| + \|x_k(t_0) - x_k(t_1)\| < \delta_2 + h_k(t_0) - h_k(t_1) < \\ < \delta_2 + 2\theta_k + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1)$$

Отсюда следует, что

$$\|x_k(t_0) + F_k(x_k(t_0), t_0+) - F_k(x_k(t_0), t_0) - x_0 - F(x_0, t_0+) + F(x_0, t_0)\| < \\ < \delta_2 + 2\theta_k + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1) + 2\theta_k + \\ + \omega(\delta_2 + 2\theta_k + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1))[h(t_0+) - h(t_0)]$$

и решение $x_k(\tau)$ продолжимо на интервале $\langle t_0, t_2\rangle$. Таким образом, окончательно получаем оценку

$$\|x_k(t_2) - x_k(t_1) - F(x_0, t_0+) + F(x_0, t_0)\| \leqslant \\ \leqslant \|x_k(t_0) - x_k(t_1)\| + \|x_k(t_0+) - x_k(t_0) - F(x_0, t_0+) + F(x_0, t_0)\| + \\ + \|x_k(t_2) - x_k(t_0+)\| \leqslant \\ \leqslant h_k(t_0) - h_k(t_0 - \delta_1) + h_k(t_0 + \delta_1) - h_k(t_0+) + 2\theta_k + \\ + \|F(x_k(t_0), t_0+) - F(x_k(t_0), t_0) - F(x_0, t_0+) + F(x_0, t_0)\| < \\ < h(t_0) - h(t_0 - \delta_1) + h(t_0 + \delta_1) - h(t_0+) + 6\theta_k + \\ + \omega(\delta_2 + 2\theta_k + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1))[h(t_0+) - h(t_0)] < \varepsilon$$

[последнее в силу (3.14)]. Теорема 3.2 доказана.

Так как в теореме 3.2 требуется равномерная сходимость функций $F_k(x, t)$ к функции $F(x, t)$, то функция $F(x, t)$ должна быть непрерывной, если $F_k(x, t)$ — непрерывные функции. Значит, теорема 3.2 не пригодна для исследования случая, когда в последовательности классических уравнений встречаются члены $d_k(t)$, аппроксимирующие так называемую функцию Дирака:

$$d_k(t) \geqslant 0, \qquad \int_{-1}^{t} d_k(\tau)\, d\tau \to 0 \text{ (соотв. 1), если } t < 0 \text{ (соотв. } t > 0)$$

Для этого случая установим теорему 3.3 и ее некоторые следствия. Сохраняя прежние обозначения, введем в рассмотрение подмножество G_2 таких точек $(x, t) \in G$, что

$$(y, t) \in G, \qquad \text{если } \| y - x \| \leqslant h(t+) - h(t)$$

Теорема 3.3. Пусть

$$\limsup_{k\to\infty} [h_k(t_2) - h_k(t_1)] \leqslant h(t_2) - h(t_1) \qquad (t_1 < t_2,\ t_1, t_2 \in H)$$

$$F_k(x, t) \to F(x, t) \qquad ((x, t) \in G_2,\ t \in H)$$

Пусть для любой точки $t_0 \tilde{\in} H$ (для которой существует $x \in E_n$ так, что $(x, t_0) \in G_2$) существуют линейные подпространства $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ пространства E_n и возрастающая функция $h_0(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, непрерывная в точке t_0.

Пусть при этом выполняются следующие условия:

(g) пространства $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ — ортогональные, пересечение пространств $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ содержит только нуль, и алгебраическая сумма этих пространств равна пространству E_n (в силу этого требования каждый вектор $u \in E_n$ можно представить единственным образом в виде

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}, \qquad u^{(1)} \in E^{(1)}, \qquad u^{(2)} \in E^{(2)}$$

будем писать $F_k(x, t) = F_k^{(1)}(x, t) + F_k^{(2)}(x, t)$, $x(\tau) = x^{(1)}(\tau) + x^{(2)}(\tau)$ и т. д.)

(h) $F(x, t_0 +) - F(x, t_0) = F(x + u, t_0 +) - F(x + u, t_0) \in E^{(2)}$
если $(x, t), (x + u, t) \in G$, $u \in E^{(2)}$

(i) $$\| F_k^{(2)}(x, t_2) - F_k^{(2)}(x, t_1) - F_k^{(2)}(x + u, t_2) + F_k^{(2)}(x + u, t_1) \| \leqslant \leqslant | h_0(t_2) - h_0(t_1) |$$

если (x, t_2), (x, t_1), $(x + u, t_2)$, $(x + u, t_1) \in G$, $u \in E^{(2)}$.

(j) $$\| F_k^{(1)}(x, t_2) - F_k^{(1)}(x, t_1) \| \leqslant | h_0(t_2) - h_0(t_1) |$$

Тогда функция $F_k(x, t)$ безусловно стремится к $F(x, t)$:

$$F_k(x, t) \rightrightarrows F(x, t) \text{ в } G_2$$

Доказательство. Пусть $(x_0, t_0) \in G_2\, t_0 \tilde{\in} H$. Из сделанных предположений, пользуясь теоремой 2.1 и следствием 2.1, легко вывести, что существуют такие числа $\tilde{\delta}_1 > 0$, $\tilde{\delta}_2 > 0$, $\tilde{K} > 0$, что если $t_0 - \tilde{\delta}_1 < t_1 < t_0$, $\| y - x_0 \| < < \tilde{\delta}_2$, $k > \tilde{K}$, то на интервале $\langle t_1, t_0 + \tilde{\delta}_1 \rangle$ можно определить интеграл $x_k(\tau)$ уравнения (3.2): $x_k(t_1) = y$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для числа ε и точки (x_0, t_0) определим числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ так, чтобы удовлетворяли неравенствам $\delta_1 < \tilde{\delta}_1$, $\delta_2 < \tilde{\delta}_2$:

$$\begin{aligned} \omega(\delta_2)[h(t_0+\delta_1) - h(t_0-\delta_1)+\delta_3] + \delta_3 + 2h_0(t + \delta_1) - 2h_0(t - \delta_1) + \\ + h(t_0 + \delta_1) - h(t_0 +) + h(t_0) - h(t_0 - \delta_1) + \\ + \omega(h_0(t_0 + \delta_1) - h_0(t_0 - \delta_1))[h(t_0 + \delta_1) - h(t_0 - \delta_1) + \delta_3] < \varepsilon \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Пусть $t_0-\delta_1<t_1<t_0<t_2<t_0+\delta_1$, $t_1, t_2 \in H$ и $K>\widetilde{K}$ такое большое число, что

$$\|F_k(x_0, t_2)-F(x_0, t_2)\|<{}^1/_2\,\delta_3, \quad \|F_k(x_0, t_1)-F(x_0, t_1)\|<{}^1/_2\,\delta_3$$
$$h_k(t_2)-h_k(t_1)<h(t_2)-h(t_1)+\delta_3 \text{ для } k>K$$

Докажем, что требование (III), входящее в определение безусловной сходимости, выполнено. Требование (а) выполнено по выбору чисел $\widetilde{\delta}_1$, $\widetilde{\delta}_2$. Пусть теперь $\|y-x_0\|<\delta_2$, $k>K$ и пусть $x_k(\tau)$ для $\tau \in \langle t_1, t_2\rangle$ есть решение уравнения (3.12): $x_k(t_1)=y$.

Из требования (j) и следствия 2.1 вытекает, что

$$\|x_k^{(1)}(t_3)-x_k^{(1)}(t_1)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_3} DF_k^{(1)}(x_k(\tau), t)\right\| \leqslant \tag{3.16}$$
$$\leqslant h_0'(t_3)-h_0(t_1)<h_0(t_0+\delta_1)-h_0(t_0-\delta_1) \qquad (t_1<t_3\leqslant t_2)$$

Так как

$$\|F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(\tau)+x_k^{(2)}(\tau), t_5)-F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(\tau)+x_k^{(2)}(\tau), t_4)-$$
$$-F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(\tau), t_5)+F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(\tau), t_4)\|\leqslant$$
$$\leqslant\omega(\|x_k^{(1)}(\tau)-x_k^{(1)}(t_1)\|)\,|h_k(t_5)-h_k(t_4)|<$$
$$<\omega(h_0(t_0+\delta_1)-h_0(t_0-\delta_1))\,|h_k(t_5)-h_k(t_4)|$$
$$(t_4,\ t_5, \tau \in \langle t_1, t_2\rangle)$$

то в силу следствия 2.1

$$\left\|\int_{t_1}^{t_2} D\,[F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(\tau)+x_k^{(2)}(\tau), t)-F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(\tau), t)]\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\omega(h_0(t_0'+\delta_1)-h_0(t_0-\delta_1))\,(h_k(t_2)-h_k(t_1))$$

Таким образом, имеем

$$x_k^{(2)}(t_2)-x_k^{(2)}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} DF_k^{(2)}(x_k^{(1)}(\tau)+x_k^{(2)}(\tau),\ t)=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2} DF_k^{(2)}(x_k^{(1)'}(t_1)+x_k^{(2)}(\tau),\ t)+z_k \tag{3.17}$$

где

$$\|z_k\|<\omega(h_0(t_0'+\delta_1)-h_0(t_0-\delta_1))\,(h(t_2)-h(t_1)+\delta_3)$$

Далее из требований (i) вытекает

$$\|F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(\tau),\ t_5)-F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(t_1),\ t_5)-$$
$$-F_k(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(\tau),\ t_4)+F_k(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(t_1),\ t_4)\|\leqslant|h_0(t_5)-h_0(t_4)|$$

и следствие 2.1 дает

$$\left\|\int_{t_1}^{t_2} D\,[F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(\tau),\ t)-F_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(t_1), t)]\right\|\leqslant$$
$$\leqslant h_0(t_2)-h_0(t_1)<h_0(t_0+\delta_1)-h_0(t_0-\delta_1) \tag{3.18}$$

Очевидно, что

$$\int_{t_1}^{t_2} DF_k^{(2)}(x_k^{(1)}(t_1)+x_k^{(2)}(t_1),\ t)=F_k^{(2)}(x_k(t_1),\ t_2)-F_k^{(2)}(x_h(t_1),\ t_1)$$

Следовательно, из (3.17) получаем

$$x_k^{(2)}(t_2)-x_k^{(2)}(t_1)=F_k^{(2)}(x_k(t_1),t_2)-F_k^{(2)}(x_k(t_1),t_1)+z_k+w_k \quad (3.19)$$

где $\|w_k\|<h_0(t_0+\delta_1)-h_0(t_0-\delta_1)$ и

$$x_k^{(2)}(t_2)-x_k^{(2)}(t_1)=F^{(2)}(x_0,t_2)-F^{(2)}(x_0,t_1)+s_k+z_k+w_k \quad (3.20)$$

$$\|s_k\|<\omega(\delta_2)\,[h(t_0+\delta_1)-h(t_0-\delta_1)+\delta_3]$$

Далее последовательно имеем

$$F(x_0,t_0+)-F(x_0,t_0)=F^{(2)}(x_0,t_0+)-F^{(2)}(x_0,t_0)\in E^{(2)}$$

$$\begin{aligned}&\|F(x_0,t_0+)-F(x_0,t_0)-F_k^{(2)}(x_0,t_2)+F_k^{(2)}(x_0,t_1)\|=\\&=\|F^{(2)}(x_0,t_0+)-F^{(2)}(x_0,t_0)-F_k^{(2)}(x_0,t_2)+F_k^{(2)}(x_0,t_1)\|\leqslant\\&\leqslant\|F(x_0,t_2)-F(x_0,t_0+)\|+\|F(x_0,t_0)-F(x_0,t_1)\|+\\&+\|F_k(x_0,t_2)-F(x_0,t_2)\|+\|F_k(x_0,t_1)-F(x_0,t_1)\|\leqslant\\&\leqslant h(t_0+\delta_1)-h(t_0+)+h(t_0)-h(t_1)+\delta_3\end{aligned} \quad (3.21)$$

Из (3.16), (3.20) и (3.21) получаем

$$\begin{aligned}&\|x_k(t_2)-x_k(t_1)-F(x_0,t_0+)+F(x_0,t_0)\|<\\&<h_0(t_0+\delta_1)-h_0(t_0-\delta_1)+\|s_k\|+\|z_k\|+\|w_k\|+\\&+h(t_0+\delta_1)-h(t_0+)+h(t_0)-h(t_0-\delta_1)+\delta_3<\varepsilon\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из (3.17), (3.19), (3.20) и (3.15). Теорема 3.3 доказана.

Перейдем теперь к некоторым более конкретным дифференциальным уравнениям. Пусть

$$f_i(x_1,\ldots,x_n,t),\ g_i(x_1,\ldots,x_l) \qquad (i=1,\ldots,n;\ 0\leqslant l<n)$$

действительные непрерывные функции своих аргументов, определенные для $-\infty<x_i<\infty$, $-z\leqslant t\leqslant z$, $z>1$ и $g_i(x_1,\ldots,x_l)\equiv 0$ для $i=1,\ldots,l$ (если $l=0$, то все функции g_i сводятся к постоянным).

Пусть $d_k(t)$, $k=3,4,5,\ldots$ — непрерывные функции, определенные для $-z\leqslant t\leqslant z$ и удовлетворяющие условиям

$$\int_{-z}^{z}|d_k(t)|\,dt<C<\infty \quad (3.22)$$

$$D_k(t)=\int_{-z}^{t}d_k(\tau)\,d\tau\to 0 \ \text{(соотв. 1)}, \qquad \text{если}\ t<0\ \text{(соотв. } t>0)$$

$$\int_{-z}^{-t}|d_k(\tau)|\,d\tau+\int_{t}^{z}|d_k(\tau)|\,d\tau\to 0 \ \text{для}\ k\to\infty,\ 0<t\leqslant z$$

Рассмотрим последовательность систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\ldots,x_n,t)+g_i(x,\ldots,x_l)\,d_k(t) \qquad (i=1,\ldots,n;\ k=3,4,5) \quad (3.23)$$

Положим

$$F_i(x_1,\ldots,x_n,t)=\int_0^t f_i(x_1,\ldots,x_n,\tau)\,d\tau$$

$$B(t)=0\ \text{(соотв. 1)},\ \text{если}\ -z\leqslant t\leqslant 0\ \text{(соотв.}\ 0<t\leqslant z)$$

и запишем систему (3.23) в эквивалентном виде: (3.24)

$$\frac{dx_i}{d\tau}=D\,[F_i(x_1,\ldots,x_n,t)+g_i(x_1,\ldots,x_l)\,D_k(t)] \quad (i=1,\ldots,n;\ k=3,4,5,\ldots)$$

Рассмотрим «предельную» систему

$$\frac{dx_i}{d\tau} = D\,[F_i(x_1, \ldots, x_n, t) + g_i(x_1, \ldots, x_l)\,B(t)] \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3.25)$$

Предположим, что решения системы (3.25) однозначно определяются своими начальными условиями, — это равносильно предположению, что этим свойством обладают решения системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (3.25^*)$$

Пусть

$$(x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)) \qquad (-1 \leqslant \tau \leqslant +1)$$

$$\sup |x_j(\tau)| < M_1 \qquad (\tau \in \langle -1, +1 \rangle)$$

решение системы (3.25). Из замечания 0.1 и из (2.2*) следует, что $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ является решением системы (3.25*) на интервалах $\langle -1.0\rangle$ и $(0.1\rangle$ отдельно и что

$$\lim_{t \to 0+} x_i(t) = x_i(0) \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

$$\lim_{t \to 0+} x_i(t) = x_i(0) + g_i(x_1(0), \ldots, x_l(0)) \qquad (i = l+1, \ldots, m)$$

Определим функции $\tilde{g}_i(x_1, \ldots, x_l)$ следующим образом:

$$\tilde{g}_i(x_1, \ldots, x_l) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, l)$$

$$\tilde{g}_i(x_1, \ldots, x_l) = g_i(x_1, \ldots, x_l), \qquad \text{если } |x_j| \leqslant M_1 \qquad (j = 1, \ldots, l)$$

$$\tilde{g}_i(x_1, \ldots, x_l) = g_i(y_1, \ldots, y_l), \qquad \text{если } \max_{j=1,\ldots,l} |x_j| > M_1$$

$$y_j = M_1 \frac{x_j}{\max\limits_{j=1,\ldots,l} |x_j|} \qquad (j = 1, \ldots, l;\ i = l+1, \ldots, n)$$

Очевидно, $|\tilde{g}_i(x_1, \ldots, x_l)| < M_2$. Рассмотрим системы

$$\frac{dx_i}{d\tau} = D\,[F_i(x_1, \ldots, x_n, t) + \tilde{g}_i(x_1, \ldots, x_l)\,D_k(t)] \qquad (3.26)$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = D\,[F_i(x_1, \ldots, x_n, t) + \tilde{g}_i(x_1, \ldots, x_l)\,B(t)] \qquad (3.27)$$

Так как системы (3.26) [соотв. (3.27)] на множестве

$$|x_j| \leqslant M_1 \qquad (j = 1, \ldots, l;\ -\infty < x_l < \infty, \ldots, -\infty < x_n < \infty;\ -z < t < z)$$

совпадают с системами (3.24) [соотв. (3.25)], то $x(\tau)$ — решение уравнения (3.27). Множество G определим следующими неравенствами:

$$|x_j| < M_3, \qquad |t| < z$$

где $M_3 > M_1 + CM_2$ [см. (3.22)], очевидно, $C \geqslant 1$. Пусть

$$M_4 = \max_{i=1,\ldots,n} f_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad \text{для} \quad (x_1, \ldots, x_n, t) \in \overline{G}$$

и положим

$$h(t) = \sqrt{n}\,(M_4 t + CM_2 D(t)), \qquad h_k(t) = \sqrt{n}\left(M_4 t + M_2 \int_{-z}^{t} |d_k(\tau)|\,d\tau\right)$$

Так как функция, непрерывная на компактном множестве, равномерно непрерывна, то существует функция $\omega(\eta)$, непрерывная для $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$, причем $\omega(0) = 0$ (η_0 — диаметр множества G), такая, что

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (f_i(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, t) - f_i(x_1, \ldots, x_n, t))^2\right]^{1/2} \leqslant \omega\left(\left[\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i - x_i)^2\right]^{1/2}\right)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (g_i(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l) - g_i(x_1, \ldots, x_l))^2\right]^{1/2} \leqslant \omega\left(\left[\sum_{i=1}^{l} (\tilde{x}_i - x_i)^2\right)^{1/2}\right]$$

Запишем уравнения (3.26), (3.27) в векторном виде:

$$\frac{dx}{dt} = DF_k(x, t), \qquad \frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \tag{3.28}$$

Можно убедиться, что $\mathbf{F}(x, t) \in F(G, \omega, h)$, $F_k(x, t) \in \mathbf{F}(G, \omega, h_k)$ и что множество G_2 (см. определение множества G_2 перед теоремой 3.3) содержит все точки

$$(x_1, \ldots, x_n, 0), \quad \text{где } |x_j| < M_1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Докажем, что все условия теоремы (3.3) будут выполняться. Очевидно, множество H содержит все точки t, $0 < |t| \leqslant z$

$$\lim_{k\to\infty} \sup h_k(t_2) - h_k(t_1) \leqslant h(t_2) - h(t_1) \qquad (t_1 < t_2,\ t_1, t_2 \in H)$$

и $F_k(x, t) \to F(x, t)$ для $t \in H$ в силу наших предположений о последовательности $d_k(t)$.

Пусть $E^{(1)}$ — пространство точек $(x, \ldots, x_l; 0, \ldots, 0)$ и $E^{(2)}$ — пространство точек $(0, \ldots, 0;\ x_{l+1}, \ldots, x_n)$, и положим $h_0(t) = 2\sqrt{n}M_4 t$.

Требования теоремы (g)— (j), очевидно, выполнены, требование (j) выполняется, так как члены, содержащие функции $\tilde{g}$, исчезают. Значит, $F_k(x, t) \rightrightarrows E(x, t)$ в области G_2.

Пусть y_k — последовательность точек из E_n, $y_k \to x(-1)$ для $k \to \infty$. По теореме 3.1 существуют решения $x_k(\tau)$ уравнения (3.28) $x_k(-1) = y_k$ на интервале $\langle -1, +1 \rangle$ для всех k достаточно больших и $x_k(\tau) \to x(\tau)$ для $0 < |\tau| \leqslant 1$.

Так как для каждого $\eta > 0$ справедливо, что

$$h_k(t_2) - h_k(t_1) \to h(t_2) - h(t_1) \qquad \text{для } k \to \infty$$

равномерно, если $t_1, t_2 \in \langle \eta, 1 \rangle$ или если $t_1, t_2 \in \langle -1, -\eta \rangle$, то $x_k(\tau) \to x(\tau)$ равномерно для $k \to \infty$, если $\zeta \leqslant |\tau| \leqslant 1$ для любого положительного ζ.

Отсюда, пользуясь неравенством (3.16), получаем, что $x_k^{(1)}(\tau) \to x^{(1)}(\tau)$ равномерно на всем интервале $\langle -1, +1 \rangle$, значит, первые координаты $x_{ki}(\tau)$ функций $x_k(\tau)$ стремятся равномерно к соответствующим координатам функции $x(\tau)$ на интервале $\langle -1, +1 \rangle$. Учитывая, что $|x_{ki}(\tau)| < M_3$ для k достаточно больших, заключаем, что система функций$(x_{k1}(\tau), \ldots, x_{k,n}(\tau))$ является и решением уравнений (3.24) и (3.23); таким образом, решение системы (3.23) сходится к решению системы (3.25) $t \neq 0$ и первые функции сходятся равномерно.

Отметим, что все наши рассуждения применимы и к последовательности уравнений вида

$$\frac{d^{s+1}x}{dt^{s+1}} = f(x, \dot{x}, \ldots, x^s, t) + g\,(x, \dot{x}, \ldots, x^{s-1})\, d_k(t) \tag{3.29}$$

$x \in E_1$ (если $s = 0$, то считаем, что $g = \mathrm{const}$), так как подстановками

$$x = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \ldots, \frac{dx_{s-1}}{dt} = x_s$$

уравнение (3.30) сводится к системе типа (3.23), т. е. будет иметь место равномерная сходимость решений $x_k(t)$ вместе с производными до порядка $s-1$; что касается производной порядка s, то она сходится для $t \neq 0$ к функции, которая может оказаться разрывной. (Если $s = 0$, то решения $x_k(t)$ сходятся только для $t \neq 0$.) Заметим, что в уравнении (3.30) возможно считать $x \in E_n$.

§ 4. Единственность решений. Введем предположение

$$\omega(\eta) = c\eta \quad \text{для } \eta \geqslant 0, \ c > 0$$

Теорема 4.1. Пусть $F(x, t) \in \mathbf{F}(G, \omega, h)$, $(x_0, t_0) \in G_F$. Тогда на любом интервале $\langle t_0, t_0 + \sigma\rangle$ $(\sigma > 0)$ существует не более одного решения $x(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = DF(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

Замечание 4.1. Как следует из примера в замечании 2.2, единственность не всегда сохраняется для решений $x(t)$, определенных на интервале $\langle t_0 - \sigma, t_0\rangle$, $x(t_0) = x_0$, $(\sigma > 0)$, если такие решения существуют.

Теорема 4.1 сразу следует из следующего предложения.

Пусть решения $x(\tau)$, $y(\tau)$ уравнения (4.1) определены для $\tau \in \langle t_0, t_0 + \sigma\rangle$. Имеет место оценка

$$\|x(\tau) - y(\tau)\| \leqslant \|x(t_0) - y(t_0)\| [1 + c(h(t_0+) - h(t_0))] \times \\ \times \exp\{c(h(\tau) - h(t_0+))\} \tag{4.2}$$

Доказательству оценки (4.2) предпошлем две леммы.

Лемма 4.1. Пусть функция $U(\tau, t)$ принимает значения из некоторого пространства E_n и функция $V(\tau, t)$ из пространства E_1 и существуют интегралы

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} DU(\tau, t), \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2} DV(\tau, t)$$

Допустим, что

$$V(\tau, t) \leqslant V(\tau, \tau) \quad \text{для } t \leqslant \tau, \qquad V(\tau, t) \geqslant V(\tau, \tau) \quad \text{для } t \geqslant \tau$$

и что существует функция $\delta(\tau) > 0$ $(\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2)$ такая, что

$$\|U(\tau, t) - U(\tau, \tau)\| \leqslant |V(\tau, t) - V(\tau, \tau)|, \quad \text{если} \quad |t - \tau| < \delta(\tau), \ \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$$

Тогда

$$\left\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} DU(\tau, t) \right\| \leqslant \int_{\tau_1}^{\tau_2} DV(\tau, t)$$

Доказательство леммы 4.1 без затруднений проводится на основе эквивалентного понятия интеграла, поданного в [1], § 1, 1.2.

Лемма 4.2.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} h^k(\tau)\, dh(\tau) \leqslant \frac{1}{k+1} [h^{k+1}(\tau_2) - h^{k+1}(\tau_1)] \qquad (k \geqslant 0)$$

Как всегда, предполагаем, что $h(t)$ — возрастающая непрерывная слева функция и

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} h^k(\tau)\, dh(\tau) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} Dh^k(\tau)\, h(t)$$

(см. [1], замечание 1.1.2; интеграл в правой части существует по теореме 1.1, где $F(x, t) = xh(t)$, $u(\tau) = h^k(\tau)$).

Лемма 4.2 следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ функция

$$\frac{1}{k+1} h^{k+1}(\tau) + \varepsilon h(\tau)$$

является верхней функцией относительно $h^k(\tau)\, h(t)$.

Перейдем к доказательству оценки (4.2). Так как $x(\tau)$, $y(\tau)$ — функции с ограниченным изменением, то $\|x(\tau)-y(\tau)\| \leqslant K$, $\tau \in \langle t_0, t_0+\sigma\rangle$.

Очевидно,

$$x(\tau_2)-y(\tau_2)=x(t_0)+F(x(t_0), t_0+)-F(x(t_0), t_0)-y(t_0)-$$

$$-F(y(t_0), t_0+)+F(y(t_0), t_0)+\lim_{\tau_1\to t_0+}\int_{\tau_1}^{\tau_2} D[F(x(\tau), t)-F(y(\tau), t)] \quad (4.3)$$

$$\|x(t_0)+F(x(t_0), t_0+)-F(x(t_0), t_0)-y(t_0)-F(y(t_0), t_0+)+$$

$$+F(y(t_0), t_0)\| \leqslant \|x(t_0)-y(t_0)\|[1+c(h(t_0+)-h(t_0))]=u$$

Так как $\|x(\tau)\|<K$

$$\|[F(x(\tau), t)-F(y(\tau), t)]-[F(x(\tau), \tau)-F(y(\tau), \tau)]\| \leqslant cK\,|h(t)-h(\tau)|$$

лемма 4.1 дает

$$\left\|\lim_{\tau_1\to t_0+}\int_{\tau_1}^{\tau_2} D[F(x(\tau), t)-F(y(\tau), t)]\right\| \leqslant cK(h(\tau_2)-h(t_0+))$$

и из (4.3) получаем оценку

$$\|x(\tau_2)-y(\tau_2)\| \leqslant u+cK(h(\tau_2)-h(t_0+))$$

Пусть для некоторого натурального s уже известна оценка

$$\|x(\tau)-y(\tau)\| \leqslant u\left[1+c(h(\tau)-h(t_0+))+\ldots+\frac{\{c(h(\tau)-h(t_0+))\}^{s-1}}{(s-1)!}\right]+$$

$$+K\frac{\{c(h(\tau)-h(t_0+))\}^{s}}{s!} \quad (4.4)$$

Отсюда следует

$$\|[F(x(\tau), t)-F(y(\tau), t)]-[F(x(\tau), \tau)-F(y(\tau), \tau)]\| \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{u\left[1+c(h(\tau)-h(t_0+))+\cdots+\frac{\{c(h(\tau)-h(t_0+))\}^{s-1}}{(s-1)!}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K\frac{\{c(h(\tau)-h(t_0+))\}^{s}}{s!}\right]\right\}|h(t)-h(\tau)|$$

и леммы 4.1 и 4.2 дадут

$$\left\|\lim_{\tau_1\to t_0+}\int_{\tau_1}^{\tau_2} D[F(x(\tau), t)-F(y(\tau), t)]\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\tau_1\to t_0+}\int_{\tau_1}^{\tau_2} D\left[cn\left[1+c(h(\tau)-h(t_0+))+\ldots+\frac{\{c(h(\tau)-h(t_0+))\}^{s-1}}{(s-1)!}\right]+\right.$$

$$\left.+cK\frac{\{c(h(\tau)-h(t_0+))\}^{s}}{s!}\right](h(t)-h(t_0+))=$$

$$=n\left[c(h(\tau_2)-h(t_0+))+\ldots+\frac{\{c(h(\tau_2)-h(t_0+))\}^{s}}{s!}\right]+K\frac{\{c(h(\tau_2)-h(t_0+))\}^{s+1}}{(s+1)!}$$

и из (4.3) следует, что оценка (4.4) верна и для $s+1$. Так как она верна для $s=1$, то она верна для всех натуральных s, и предельным переходом мы получим (4.2).

Заметим, что подобным образом возможно доказать, что в наших предположениях сходятся последовательные приближения Пикара.

Поступила 12 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Kurzweil J., Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter, Чехословацкий матем. журнал, т. 7 (82), 3, 418—449, 1957.