

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ И ОПТИМАЛЬНОМ ПОДЪЕМЕ КОСМИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

В. А. Егоров

(Москва)

В работе дается решение задачи Мейера для уравнения Пфаффа с одной свободной функцией, которое применяется для выбора формы траектории подъема ракеты на заданную высоту с наибольшей скоростью. В § 1 формулируется указанная задача и показывается сводимость к ней задач о полете ракеты без учета индуктивного сопротивления и о ее движении без углов атаки по жесткой идеально гладкой кривой связи. Доказывается, что сформулированная задача является вырожденной.

В § 2 проводится исследование вариации и дается общее решение задачи, а также рассматриваются основные частные случаи. В § 3 применение общего решения к задаче о подъеме ракеты дает оптимальную траекторию. Отдельно анализируется случай движения по стартовой дорожке.

§ 1. Ряд задач об отыскании оптимальных режимов движения центра тяжести ракеты в среде с сопротивлением сводится к следующей задаче Мейера для уравнения Пфаффа.

В плоскости переменных x_2, x_3 задана односвязная область σ_1 с замкнутой границей σ_1^0 . Найти внутри σ_1 кусочно-гладкую кривую без кратных точек $\gamma_1 \{x_2 = x_2(\tau), x_3 = x_3(\tau), 0 \leq \tau \leq 1\}$ с заданными концами $A_1 \in \sigma_1^0$ и $B_1 \in \sigma_1^0$ так, чтобы значение x_1 (1) функции $x_1(\tau)$, определяемой вдоль γ_1 уравнением

$$X_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + X_2(x_1, x_2, x_3) dx_2 + X_3(x_1, x_2, x_3) dx_3 = 0 \quad (1.1)$$

и начальным значением $x_1(0) = x_{1A}$, было наибольшим, и чтобы направление касательной к пространственной кривой $\gamma \{x_i = x_i(\tau), 0 \leq \tau \leq 1, i = 1, 2, 3\}$ в каждой ее точке принадлежало заданному пространственному пучку $\omega'(x_1, x_2, x_3)$ допустимых направлений. При этом функции $X_i(x_1, x_2, x_3)$ ($i = 1, 2, 3$) считаются непрерывными вместе со своими частными производными, а функция $X_1 \neq 0$ для рассматриваемых значений переменных.

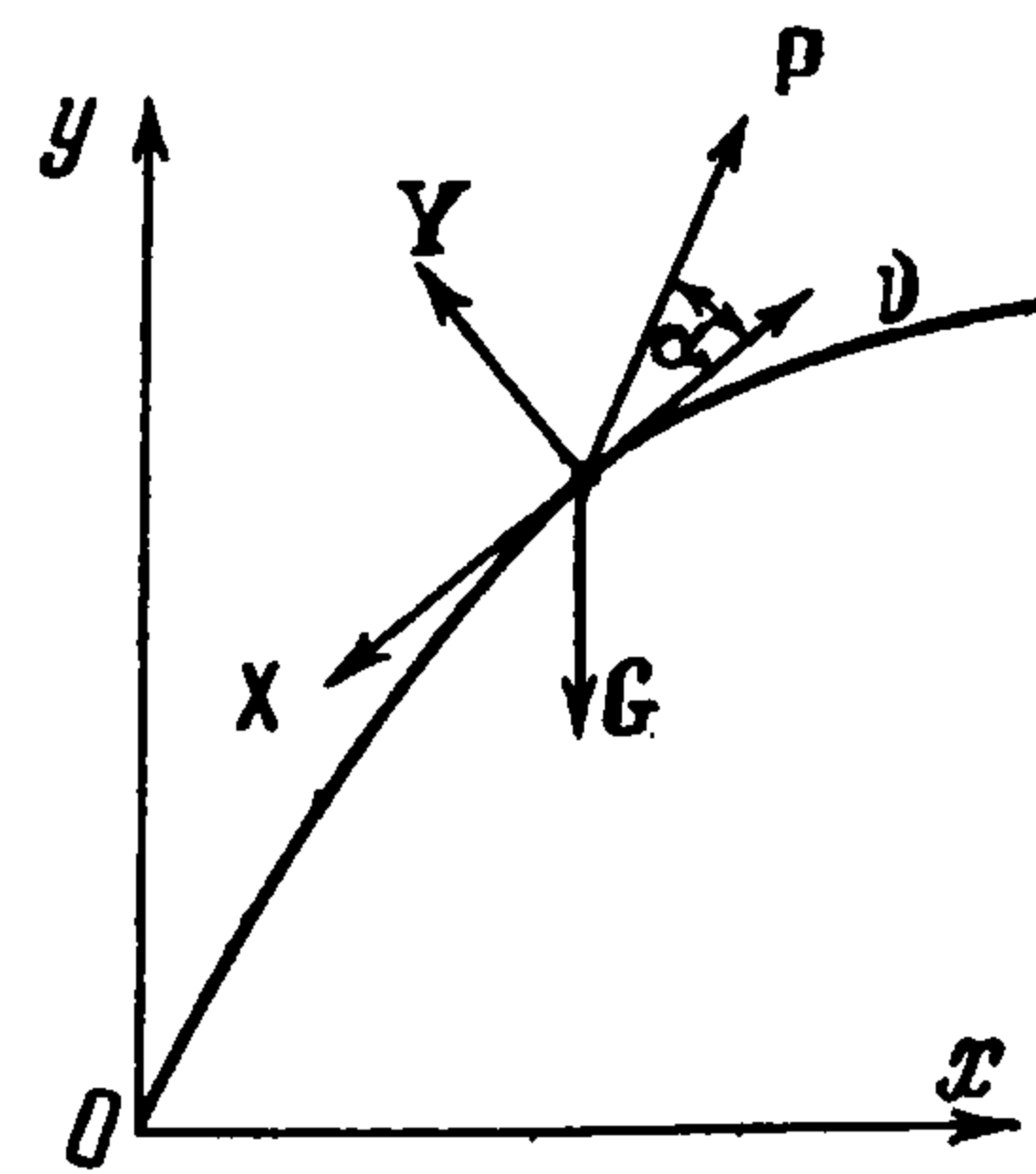
К этой задаче, как нетрудно проверить, сводятся, во-первых, задачи об оптимальном расходовании топлива при прямолинейных движениях ракет, например взаимные задачи о достижении наибольшей высоты при заданном запасе топлива ^[1], о достижении заданной высоты с наименьшим расходом топлива ^[2] и о достижении наибольшей скорости на заданной высоте.

Во-вторых, к сформулированной общей задаче сводятся задачи об оптимальных траекториях в вертикальной плоскости для крылатых ракет с заданным режимом тяги, но без учета в уравнениях движения вторых и выше степеней угла атаки, в частности, без учета индуктивного

сопротивления. Это — задачи такого определения траекторий, чтобы израсходованное топливо (или время полета) при заданных конечных высоте и скорости было минимально [4], или чтобы при заданном времени полета скорость на заданной высоте была максимальной, или чтобы высота полета была максимальной при условии, что время полета и конечная скорость заданы.

В-третьих, к той же общей задаче сводятся аналогичные предыдущим задачи о движении ракеты без угла атаки по жесткой идеально гладкой кривой-связи, в которых искомой является форма кривой. Это — задачи о подъеме космической ракеты по разгонной эстакаде (специальной стартовой дорожке) при отсутствии трения. В них конечными параметрами являются параметры в конце эстакады.

Для доказательства сводимости задач второго типа к общей задаче рассмотрим уравнения движения ракеты с заданным режимом тяги без учета вторых и выше степеней угла атаки (фиг. 1):



Фиг. 1

$$\frac{dv}{dt} = p - \frac{g}{\mu G_0} X(v, y) - g \sin \theta \quad (1.2)$$

$$v \frac{d\theta}{dt} = \alpha p + \frac{g}{\mu G_0} \alpha Y_1(v, y) - g \cos \theta \quad (1.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin \theta \quad (1.4)$$

Здесь α — угол атаки, θ — угол касательной к траектории с горизонтом, p — отношение тяги P к массе $\mu(t) G_0 / g$, v — скорость движения, y — высота полета, $X(v, y)$ — лобовое сопротивление и $Y(v, y) = \alpha Y_1(v, y)$ — подъемная сила. В уравнения (1.2) — (1.4) входят неизвестные функции v , θ , y , α от t . Если одну из них задать, то остальные из этих уравнений определяются. Формально математически все функции равноправны, и любую из них можно считать свободной. Однако физически свободной является только α , потому что угол $\alpha(t)$ во время полета можно менять непосредственно по заданной программе, тогда как на остальные функции можно воздействовать только через $\alpha(t)$.

Заметим теперь, что α в уравнение (1.2) не входит, а θ можно из (1.2) исключить при помощи (1.4). После такого исключения получим вместо (1.2) уравнение типа (1.1), содержащее только v , t , y :

$$\mu v dv + v(\varphi - \mu p) dt + \mu g dy = 0, \quad \varphi = \frac{gX}{G_0} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) можно отделить от остальных и ставить вариационные задачи второго типа только для него. Действительно, эти задачи касаются только переменных v , t , y , и если одну из функций $v(t)$, $y(t)$ принять за свободную и задать произвольным образом, то другую можно определить из (1.5), не используя других уравнений. После этого, если понадобится, из (1.4) и (1.3) можно найти $\theta(t)$ и $\alpha(t)$.

Заметим, что условие $|dy| \ll v dt$, вытекающее из (1.4), в (1.5) никак не учитывается и поэтому его следует учесть в постановке задачи. Оно означает, что в пространстве v , t , y движение из точки (v, t, y) может

продолжаться только внутри локального двугранного угла ω' с ребром, параллельным оси v , и со сторонами, наклоненными к плоскости $y = \text{const}$ на угол $\pm \arctg v$, где знаки плюс и минус отвечают соответственно подъему и падению по вертикали.

Теперь, например, задача о подъеме на заданную высоту с максимальной скоростью формулируется так.

Найти функцию $y(t)$ таким образом, чтобы значение $v(T)$ функции $v(t)$, определяемой начальным значением $v(t_0) = v_0$ и уравнением (1.4), было наибольшим и чтобы выполнялись условия

$$y = y_0 \quad \text{при } t = t_0, \quad y = y_k \quad \text{при } t = T \quad (1.6)$$

$$y_0 \leq y \leq y_k \quad \text{при } t_0 \leq t \leq T \quad (1.7)$$

$$dt > 0, \quad -v dt \leq dy \leq v dt \quad (1.8)$$

Сравнивая эту формулировку с общей формулировкой для уравнения (1.1), убеждаемся, в сводимости этой задачи к общей. Так как другие

задачи второго типа для уравнения (1.5) формулируются аналогично, сводимость их к общей задаче доказана.

Для доказательства сводимости задач третьего типа покажем, что совокупность движений, отвечающих всевозможным различным заданиям функции $\alpha(t)$, совпадает с совокупностью движений без углов атаки по всевозможным идеально гладким и абсолютно жестким кривым-связям (фиг. 2). Действительно, первое и третье уравнения движения в этом случае совпадают с (1.2) и (1.4), а второе уравнение этого движения

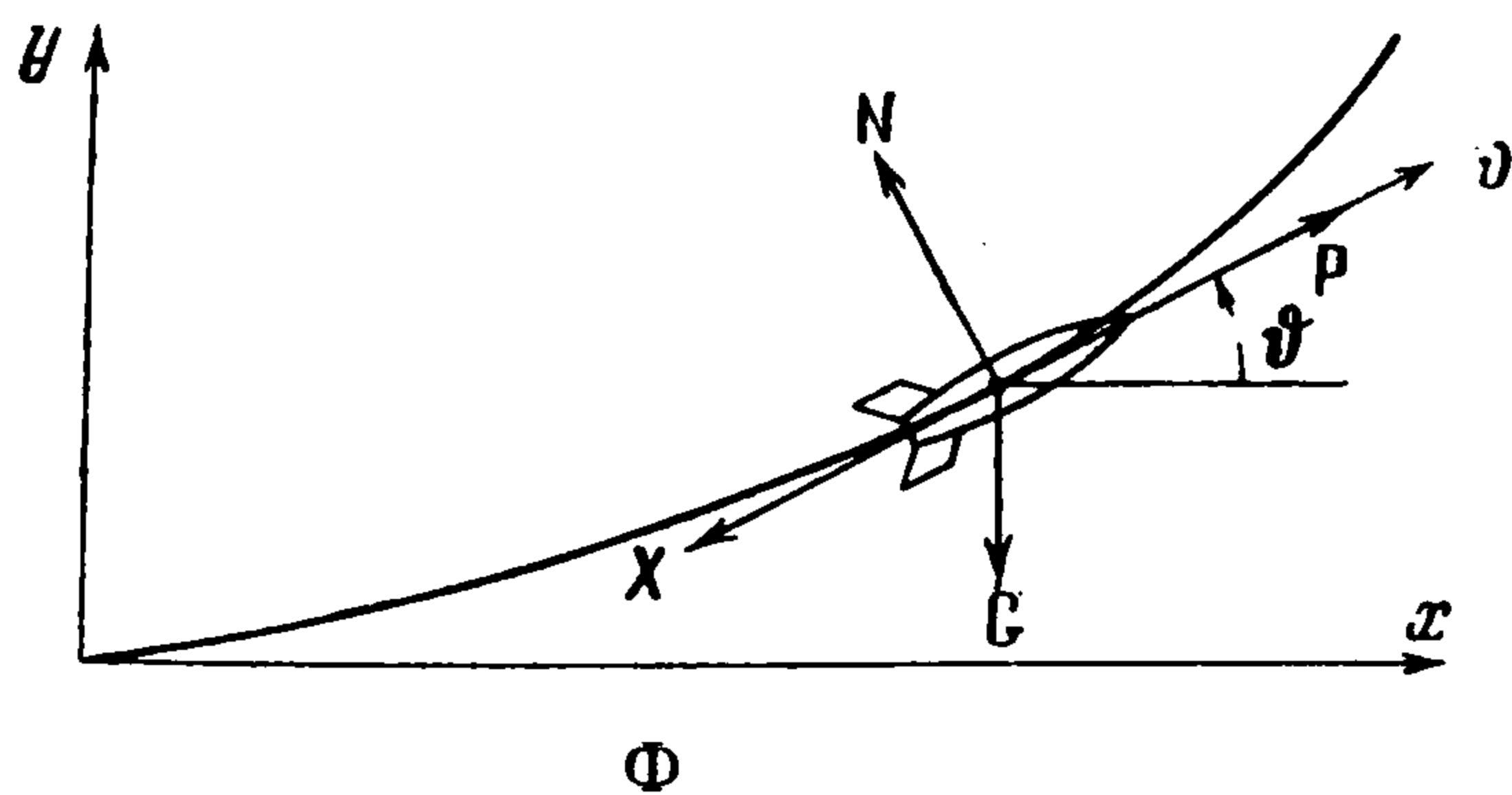
$$v \frac{d\theta}{dt} = N - g \cos \theta$$

совпадает с (1.3), если реакция связи

$$N = \alpha \left(p + \frac{g}{\mu G_0} Y_1 \right)$$

Этому условию для действительного движения ($v > 0$) всегда можно удовлетворить выбором связи соответствующей кривизны при заданной функции $\alpha(t)$ или выбором функции $\alpha(t)$ при заданном движении по траектории-связи. Совпадение уравнений означает совпадение движений с одинаковыми начальными данными и, в частности, совпадение траекторий. Отсюда следует, между прочим, что в задачах обоих типов нормальные силы могут быть любой величины и даже могут быть неограниченными, а траектории соответственно могут иметь угловые точки. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что рост нормальных сил не связан в рассматриваемых задачах, в отличие от реальных, с ростом потерь на сопротивление.

Покажем теперь, что сформулированная общая задача является вырожденной. Для этого выразим вариацию δx_{1B} через δx_2 и δx_3 , т. е. через вариацию кривой γ_1 . Интегрируя в общем виде линейное уравнение в вариациях от уравнения (1.1) вдоль решения этого уравнения — кривой



γ , имеющей допустимую кривую γ_1 своей проекцией и удовлетворяющей условию $x_1(0) = x_{1A}$, получим выражение вариации δx_1 через $\delta \dot{x}_2, \delta \dot{x}_3, \delta x_2, \delta x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ и функции от x_1, x_2, x_3 (точкой обозначается дифференцирование по τ). Подставив $\tau = 1$, получим $\delta x_{1B} = \delta x_1(1)$. Преобразуя затем члены с $\delta \dot{x}_2, \delta \dot{x}_3$ интегрированием по частям, используя уравнение (1.1) и условия закрепленности концов A_1 и B_1 , получим искомое выражение вариации функционала

$$\delta x_{1B} = \int_{(\gamma)} k(M) \Phi'(x_1, x_2, x_3) (\delta x_2 dx_3 - \delta x_3 dx_2) \quad (1.9)$$

где

$$k(M) = \frac{1}{X_1^2} \exp \int_B^M \frac{1}{X_1} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} dx_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} dx_3 \right) \quad (1.10)$$

$$\Phi'(x_1, x_2, x_3) = X_1 \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right) + X_2 \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right) + X_3 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right)$$

Заметим, что оно всюду имеет смысл в силу условия $X_1 \neq 0$. Так как выражение под интегралом не содержит $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3$, то действительно имеем особый, вырожденный случай вариационной задачи [3]. Соответствующее уравнение Эйлера, как известно, может не иметь решения в области σ_1 . Поэтому решение задачи следует искать методом непосредственного исследования вариации.

§ 2. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что выражение вариации (1.9) можно записать в виде криволинейного интеграла с весом $k(M)$ (где M — произвольная точка кривой γ) от скалярного произведения вектора смещения \mathbf{d}_1 , преобразованного матрицей H , на вектор δ_1 вариации точки кривой γ_1 , т. е.

$$\delta x_{1B} = \int_{(\gamma)} k(M) H \mathbf{d}_1 \cdot \delta \quad (2.1)$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \Phi' \\ -\Phi' & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{vmatrix} dx_2 \\ dx_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

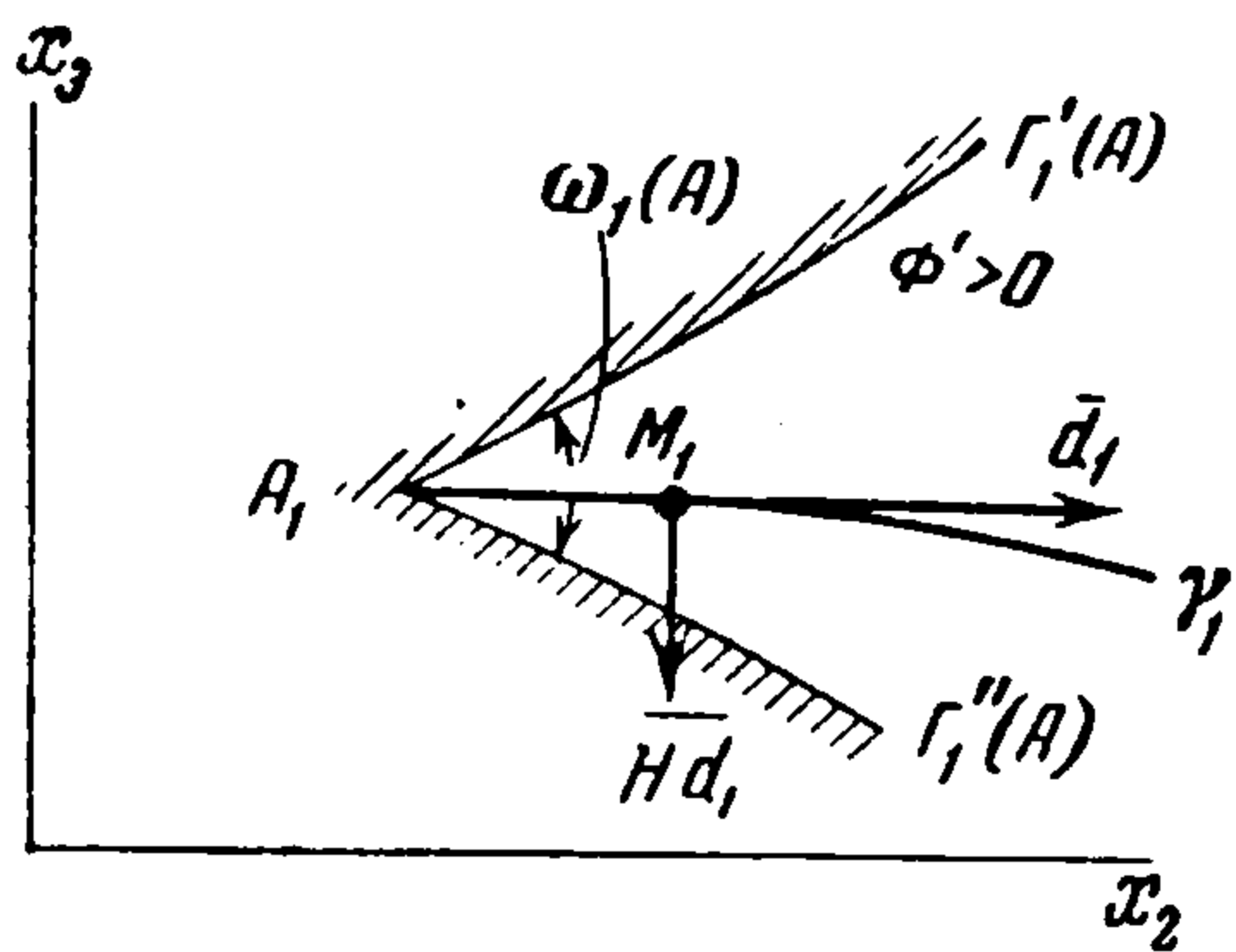
Индекс 1, как и ранее, будет означать проектирование на плоскость x_2, x_3 соответствующих объектов из пространства.

Заметим, что левая часть (1.1) представляет собой скалярное произведение $\mathbf{X} \cdot \mathbf{d}$, где $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, а $\mathbf{d} = (dx_1, dx_2, dx_3)$, так что при выполнении соотношения (1.1) вектор \mathbf{d} принадлежит плоскости π , ортогональной \mathbf{X} . Обозначим локальный угол, вырезаемый из π телесным углом $\omega'(M)$, через $\omega(M)$, а его проекцию на плоскость x_2, x_3 — через $\omega_1(M)$. Тогда допустимыми в области σ_1 будут, очевидно, те кусочно-гладкие кривые с концами A_1 и B_1 , касательные к которым в каждой точке M_1 принадлежат пучку $\omega_1(M)$. Пусть $\Gamma'(P)$ — кривая, исходящая из точки P , удовлетворяющая уравнению (1.1) и касающаяся левых границ углов $\omega(M)$, где $M \in \Gamma'(P)$. Тогда проекцию этой кривой $\Gamma_1'(P)$ назовем левой внутренней границей, а аналогичную кривую для правых границ углов $\omega(M)$ — правой внутренней границей $\Gamma_1''(P)$.

Матрица H — кососимметрическая и поворачивает вектор $\mathbf{d}_1(M)$ на угол $\pi/2$ по часовой стрелке, если величина $\Phi'(M) > 0$, поворачивает против часовой стрелки, если $\Phi'(M) < 0$, и обращает в нуль при $\Phi'(M) = 0$.

Рассмотрим начальный участок допустимой кривой γ_1 . Он проходит внутри угла $\omega_1(A)$. Положим для определенности, что в заданной точке A имеем $\Phi' > 0$. Тогда в силу непрерывности функция $\Phi'(M)$ будет положительна в точках достаточно малого участка AM кривой γ .

Вектор Hd_1 на соответствующем участке A_1M_1 (фиг. 3) направлен вправо от кривой γ_1 . Пользуясь тем, что участок A_1M_1 пролегает внутри угла $\omega_1(A)$ и углов в близких точках, сдвинем его в сторону вектора Hd_1 , т. е. направим векторы δ_1 вправо на участке A_1M_1 , а в остальных



Фиг. 3

точках кривой γ_1 положим δ_1 равными нулю. Тогда угол между векторами Hd_1 и δ_1 будет острый, $Hd_1 \cdot \delta_1 > 0$ на всем участке A_1M_1 и

$$\delta x_{1B} = \int_{AM} k Hd_1 \cdot \delta_1 > 0$$

Значит, при помощи такого варьирования удастся «улучшить» кривую γ_1 .

Улучшать описанным варьированием начальный участок γ_1 можно до тех пор, пока он не пойдет по внутренней границе $\Gamma_1''(A)$. Далее варьировать нельзя: кривая γ_1 перестанет быть допустимой. Поскольку приведенные рассуждения можно провести и для соседних участков кривой γ_1 , для которых $\Phi' > 0$, то искомое решение задачи Γ_1 , начинаясь в точке A_1 , должно проходить по внутренней границе $\Gamma_1''(A)$. [Аналогично, при $\Phi'(A) < 0$ решение должно проходить по левой внутренней границе $\Gamma_1'(A)$.]

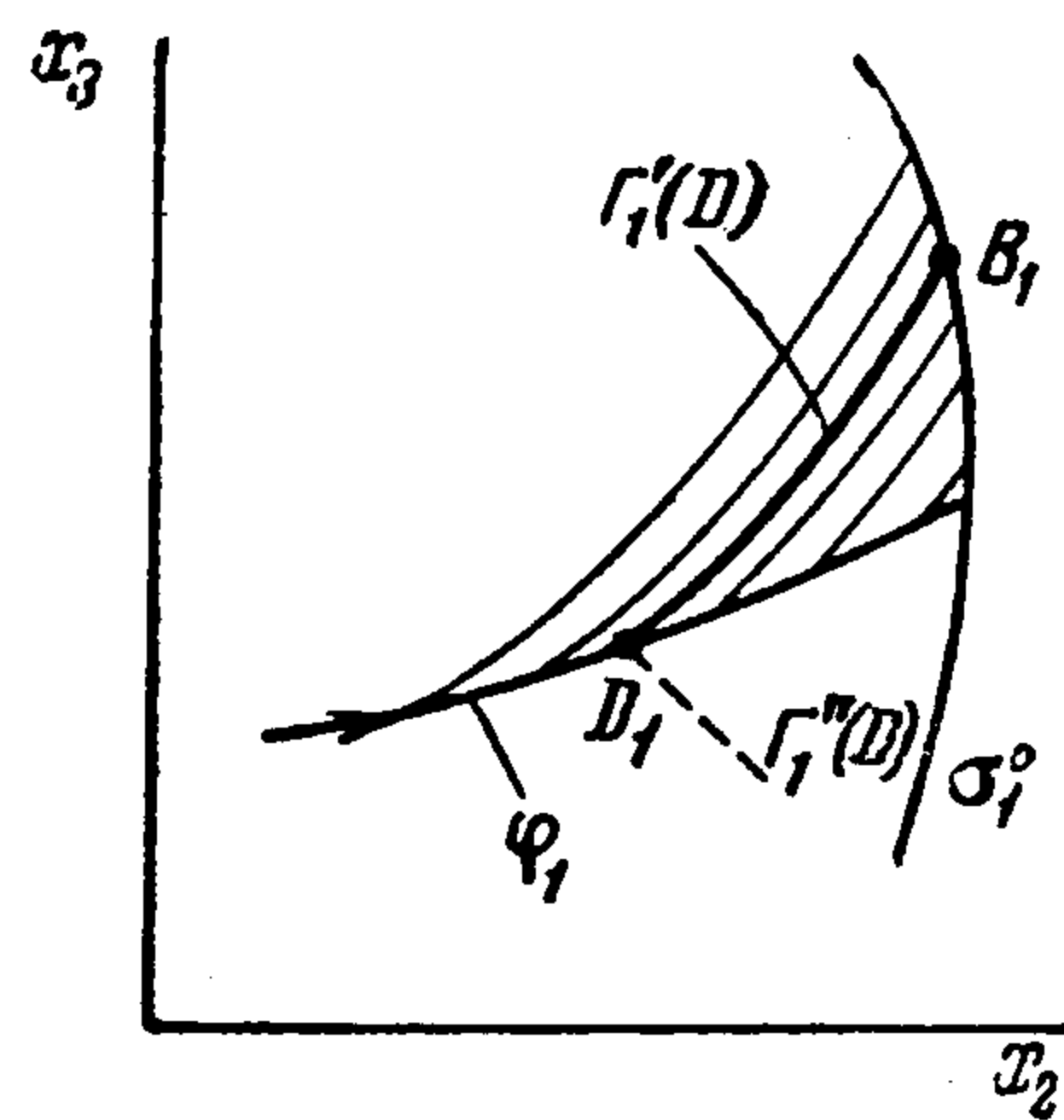
Может, однако, случиться, что для некоторой точки $C_1 \in \Gamma_1''$ окажется $\Phi'(C) = 0$, и далее для точек этой границы станет $\Phi' < 0$, т. е. кривая Γ_1'' встретит поверхность $\Phi'(x_1, x_2, x_3) = 0$. Построим угол $\omega_1(C)$. Если проекция φ_1 кривой φ , определяемой точкой C и уравнениями $\Phi'(x_1, x_2, x_3) = 0$ и (1.1), проходит вне угла $\omega_1(C)$, то всюду внутри угла $\omega_1(C)$ будет $\Phi' < 0$, и решение Γ_1 из точки C_1 должно проходить уже по левой границе $\Gamma_1'(C)$, претерпев в точке C_1 излом на угол $\omega_1(C)$.

Пусть теперь кривая φ_1 проходит внутри угла $\omega_1(C)$, т. е. левее кривой Γ_1'' , по которой до этого происходило движение. Если малый участок C_1M_1 допустимого продолжения γ_1 из точки C_1 взять правее кривой φ_1 , т. е. в области $\Phi' < 0$, то векторы Hd_1 будут направлены влево, к кривой φ_1 ; если же взять участок C_1M_1 левее кривой φ_1 , то векторы Hd_1 будут направлены вправо, т. е. вновь к кривой φ_1 . Значит, смещая участок C_1M_1 в сторону кривой φ_1 , в обоих случаях обязательно получим $\delta x_{1B} > 0$, а участок $C_1M_1 \in \varphi_1$ уже нельзя улучшить. Поэтому решение Γ_1 должно вновь претерпеть излом в точке C_1 и из нее проходить по кривой φ_1 до тех пор, пока она остается допустимой.

Может, однако, случиться так, что в некоторой точке N_1 кривая φ_1 коснется одной из границ угла $\omega_1(N)$ и затем перестанет быть допустимой (точки M_1 ее, следующие за точкой N_1 , окажутся вне угла $\omega_1(M)$). Тогда варьированием можно показать, что из точки N_1 решение Γ_1 должно проходить по той отвечающей точке N внутренней границе, которой коснулась кривая φ_1 в точке N_1 . Если же после касания кривая φ_1 остается допустимой, решение Γ_1 продолжает идти по ней.

Возможен еще исключительный случай, когда $\Phi'(A) = 0$. Тогда существенно различными являются два варианта. Первый вариант, когда точка A аналогична точке C , нами уже рассмотрен. Во втором варианте, когда кривая φ_1 является допустимой, но $\Phi' > 0$ правее φ_1 и $\Phi' < 0$ левее φ_1 , так что векторы Nd_1 направлены не к кривой φ_1 , а от нее, можно показать, что кривая φ_1 отвечает не максимуму, а минимуму x_{1B} , и что максимуму при условии отсутствия кратных точек на допустимых кривых отвечает одна из внутренних границ для точки A (какая именно — выясняется непосредственной проверкой).

Очевидно, решение Γ_1 может проходить лишь по тем точкам M_1 кривых $\varphi_1, \Gamma_1', \Gamma_1''$, для которых существуют допустимые окончания движения — кривые M_1B_1 . Но рано или поздно решение на одной из кривых φ_1, Γ_1' или Γ_1'' встретит такую точку D_1 , что точка B_1 окажется на одной из внутренних границ — $\Gamma_1'(D)$ или $\Gamma_1''(D)$, и для точек M_1 , следующих за D_1 , точка B_1 окажется за этой границей (фиг. 4). В результате кривые M_1B_1 перестанут быть допустимыми. В этом случае при помощи варьирования можно показать, что решение Γ_1 должно проходить по участку D_1B_1 той из границ $\Gamma_1'(D)$ или $\Gamma_1''(D)$, на которой оказалась точка B_1 , и должно закончиться в точке B_1 . (В частном случае участок D_1B_1 может быть равен нулю.)



Фиг. 4

Из полученного решения видно, что оно может состоять лишь из участков кривых $\varphi_1, \Gamma_1', \Gamma_1''$, в определенном порядке следующих один за другим. Поскольку рассмотрены все мыслимые случаи перехода с участка на участок, полученное решение является общим. Очевидно, что оно существует всегда, когда существует хоть одна допустимая кривая A_1B_1 .

Аналогично задаче на максимум решается задача на минимум.

Таким образом, найдя поверхность $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ и отправляясь от точки A , всегда найдем решение Γ_1 при помощи описанного выше метода.

Замечания. 1. Легко заметить, что описанный выше способ получения решения применим и тогда, когда точка B_1 не фиксирована, а задана кривая $\beta\{x_2(\tau), x_3(\tau)\}$, на которой ее нужно выбрать так, чтобы значение x_{1B} было наибольшим.

Пусть при произвольно фиксированной точке $\beta_1 \in \beta$ получена некоторая наилучшая кривая γ . Варьируя точку β_1 , получим вариацию в виде суммы внеинтегрального и интегрального членов, причем при варьировании конца β_1 будет, очевидно, меняться лишь часть D_1B_1 решения Γ_1 . Решение задачи с подвижным концом, очевидно, определяется из условия взаимной компенсации интегрального и внеинтегрального членов при бесконечно малом перемещении конца.

2. Уравнение $\Phi'(x_1, x_2, x_3) = 0$, как следует из (2.1), есть аналог уравнения Эйлера для рассматриваемой вырожденной задачи. Поэтому кривые φ_1 , удовлетворяющие уравнениям $\Phi' = 0$ и (1.1), суть аналоги экстремалей. Эта аналогия подтверждается еще и тем, что они одни и те же для взаимных вырожденных задач. Действительно, в выражении вариации для взаимной задачи на экстремум x_2 выражение Φ'' , аналогичное Φ' , должно, очевидно, получаться из (1.10) лишь заменой индексов 1 на 2 и 2 на 1. Но такая замена, как показывает непосредственная проверка, дает выражение Φ'' , совпадающее с Φ' или отличающееся только знаком. Поскольку для обеих задач уравнение (1.1) одно и то же, одинаковы и аналоги экстремалей. От обычных

экстремалей (решений обычных уравнений Эйлера) они отличаются тем, что их проекции, вообще говоря, не проходят через заданные точки A_1 и B_1 , и знания их недостаточно для построения решения вырожденной вариационной задачи.

3. Рассмотрим случай, когда $\Phi' \equiv 0$. Если составить условие полной интегрируемости уравнения Пфаффа (1.1), т. е. условие существования его интеграла вида $F(x_1, x_2, x_3) = c$

(где $c = \text{const}$), то это условие

окажется в точности равенством

$\Phi' = 0$. Из соотношения $F = c$

можно выразить x_1 через x_2 и

x_3 , причем при различных значе-

ниях константы c имеем различ-

ные поверхности семейства

$x_1 = x_1(x_2, x_3, c)$. Очевидно,

через точки A и B проходят

вполне определенные поверхно-

сти $x_1 = x_1(x_2, x_3, c_A)$ и $x_1 = x_1$

(x_2, x_3, c_B) . В этом случае по

координатам x_{2B}, x_{3B} точки B_1

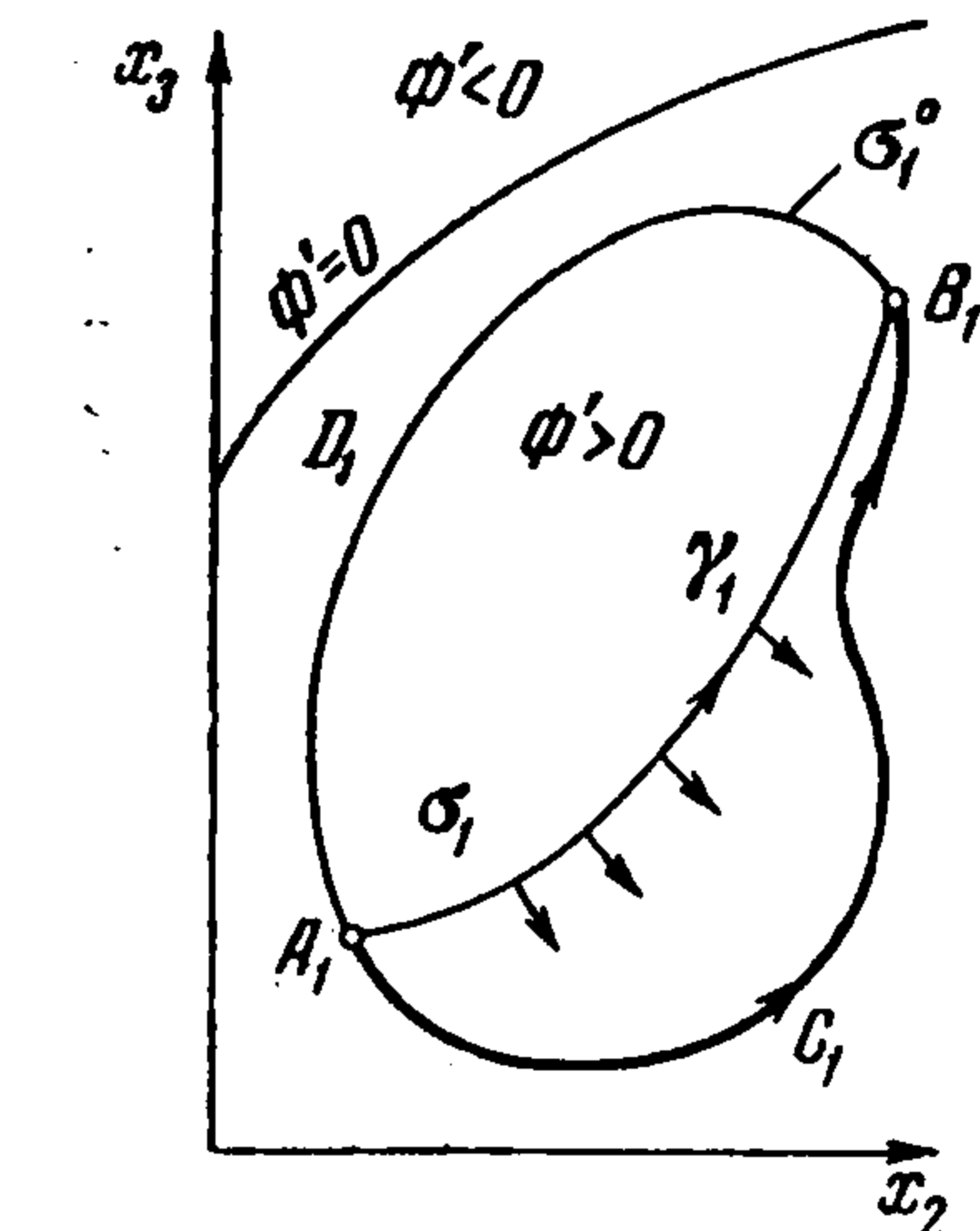
величина x_{1B} находится одно-

значно независимо от вида до-

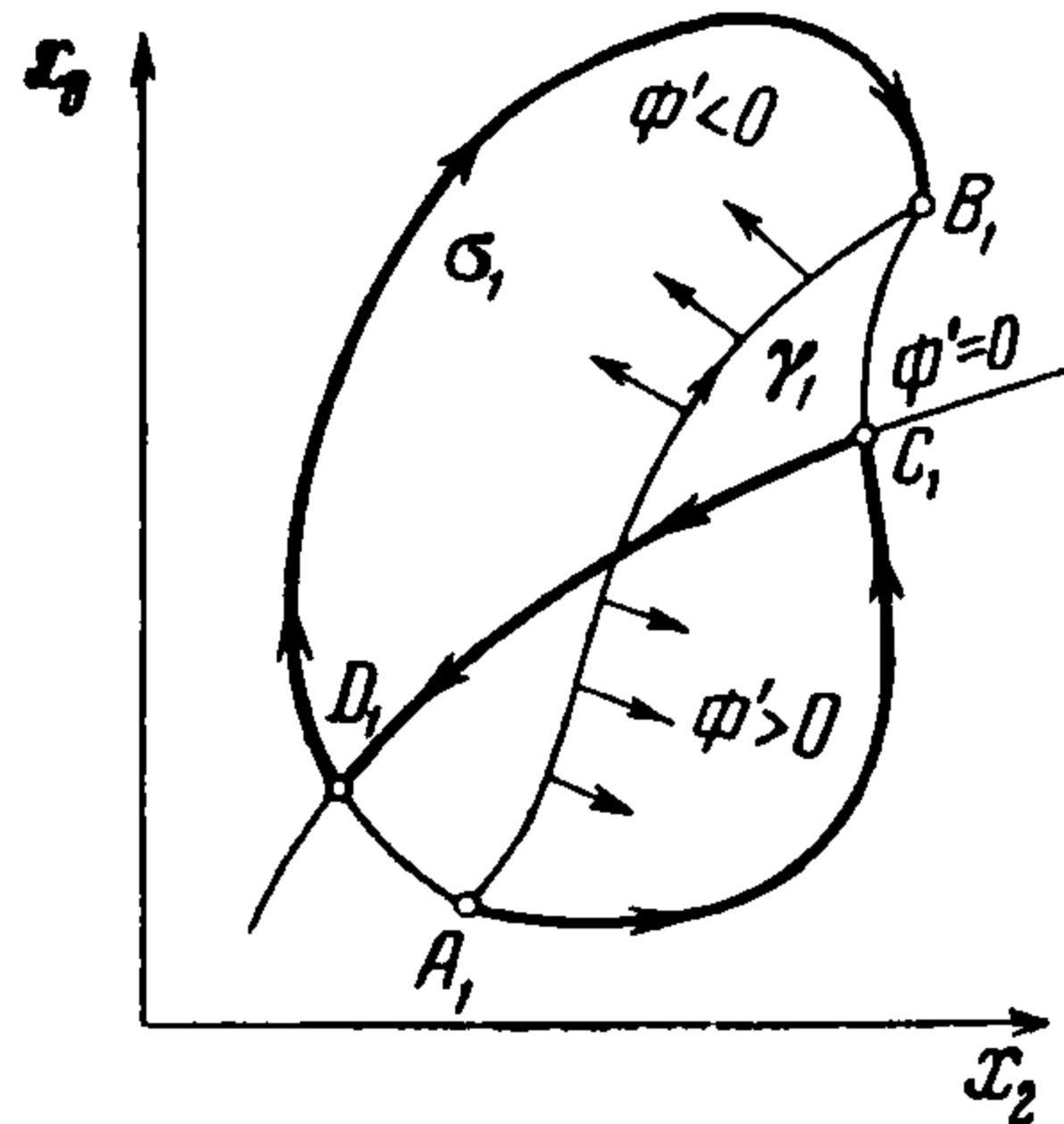
пустимой кривой γ_1 (Это подтверждается и тождественным обращением в нуль

вариации δx_{1B}). Следовательно, все кривые эквивалентны, и задача вариационного ис-

числения теряет смысл.



Фиг. 5



Фиг. 6

пустимой кривой γ_1 (Это подтверждается и тождественным обращением в нуль вариации δx_{1B}). Следовательно, все кривые эквивалентны, и задача вариационного исчисления теряет смысл.

4. Применим изложенную методику к случаю, когда угол $\omega_1 \equiv 2\pi$ и функция Φ' зависит только от x_2 и x_3 . В этом случае можно не рассматривать пространственных геометрических объектов, а ограничиться лишь рассмотрением их проекций на плоскость x_2, x_3 . Входящий в выражение вариации множитель $k(M)$, существенно зависящий от пространственного положения кривой γ , не мешает такому рассмотрению ввиду его знакоопределенности. Простота рассмотрения обусловлена здесь тем, что знак функции $\Phi'(x_2, x_3)$ в точке M_1 кривой γ_1 не зависит от величины x_1 , т. е. от предыдущего поведения этой кривой. Поэтому кривую $\Phi' = 0$ на плоскости x_2, x_3 можно указать заранее, причем одну и ту же для всех допустимых кривых γ_1 . Если кривая $\Phi' = 0$ пересекает заданную область σ_1 , она делит ее на подобласти $\Phi' > 0$ и $\Phi' < 0$. Если же она не пересекает σ_1 , знак Φ' внутри σ_1 не меняется. Последний случай, как более простой, рассмотрим первым. Для определенности положим, что $\Phi' > 0$ внутри σ_1 (фиг. 5). Тогда, как следует из § 2, любую кривую γ_1 , соединяющую точки A_1 и B_1 , для получения максимума следует варьировать вправо. Улучшая γ_1 таким варьированием, приходим к кривой, совпадающей с участком $A_1C_1B_1$ границы σ_1^0 . Эта кривая является решением задачи на максимум x_{1B} , потому что ее нельзя уже улучшить. Аналогично решением задачи на минимум является участок $A_1D_1B_1$ границы σ_1^0 .

Когда $\Phi' < 0$ внутри σ_1 , $A_1C_1B_1$ отвечает минимуму, а $A_1D_1B_1$ — максимуму.

Для получения максимума x_{1B} в случае, когда кривая $\Phi' = 0$ пересекает область σ_1 варьированием произвольной допустимой кривой γ_1 вправо в подобласти $\Phi' > 0$ и влево в подобласти $\Phi' < 0$ (как показано стрелками на фиг. 6) находим, что решением является кривая $A_1C_1D_1B_1$ (улучшить эту кривую уже невозможно). Аналогично, решением задачи на минимум x_{1B} является кривая $A_1D_1C_1B_1$.

5. Рассмотрим теперь тот частный случай предыдущего, когда функции X_2/X_1 и X_3/X_1 не зависят от x_1 . Тогда, очевидно, можно просто считать, что в уравнении (1.1) $X_1 = 1$, а x_2 и x_3 не зависят от x_1 . В этом случае интегрированием вдоль кривой γ_1 можно получить не только вариацию

$$\delta x_{1B} = \int_{\gamma_1} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right) (\delta x_2 dx_3 - \delta x_3 dx_2)$$

но и сам функционал

$$x_{1B} = x_{1A} + \int_{\gamma_1} [M(x_2, x_3) dx_2 + N(x_2, x_3) dx_3]$$

где $M = -X_2$, $N = -X_3$. Он отличается лишь постоянным слагаемым x_{1A} от вырож-

денного функционала простейшей задачи [3]. Считая область σ_1 заданной в виде участка полосы $a < x_2 < b$, заключенного (фиг. 7) между непресекающимися кривыми $x_3 = f_1(x)$, $x_3 = f_2(x_2)$, и применяя полученные выше результаты, можно получить решения на максимум и минимум x_{1B} . Например, когда $\Phi' < 0$ под кривой $\Phi' = 0$ и когда решается задача на максимум X_{1B} , получим, как нетрудно проверить, решение $A_1C_1D_1B_1$, представленное на фиг. 7.

Нетрудно видеть, что когда полоса $a < x_2 < b$ не ограничена сверху и снизу, решение имеет лишь одна задача из двух возможных: это задача на максимум, если $\Phi' < 0$ под кривой $\Phi' = 0$ (фиг. 7), и задача на минимум, если под этой кривой $\Phi' > 0$. Очевидно, этот результат не зависит от положения точек A_1 и B_1 на прямых $x_2 = a$ и $x_2 = b$.

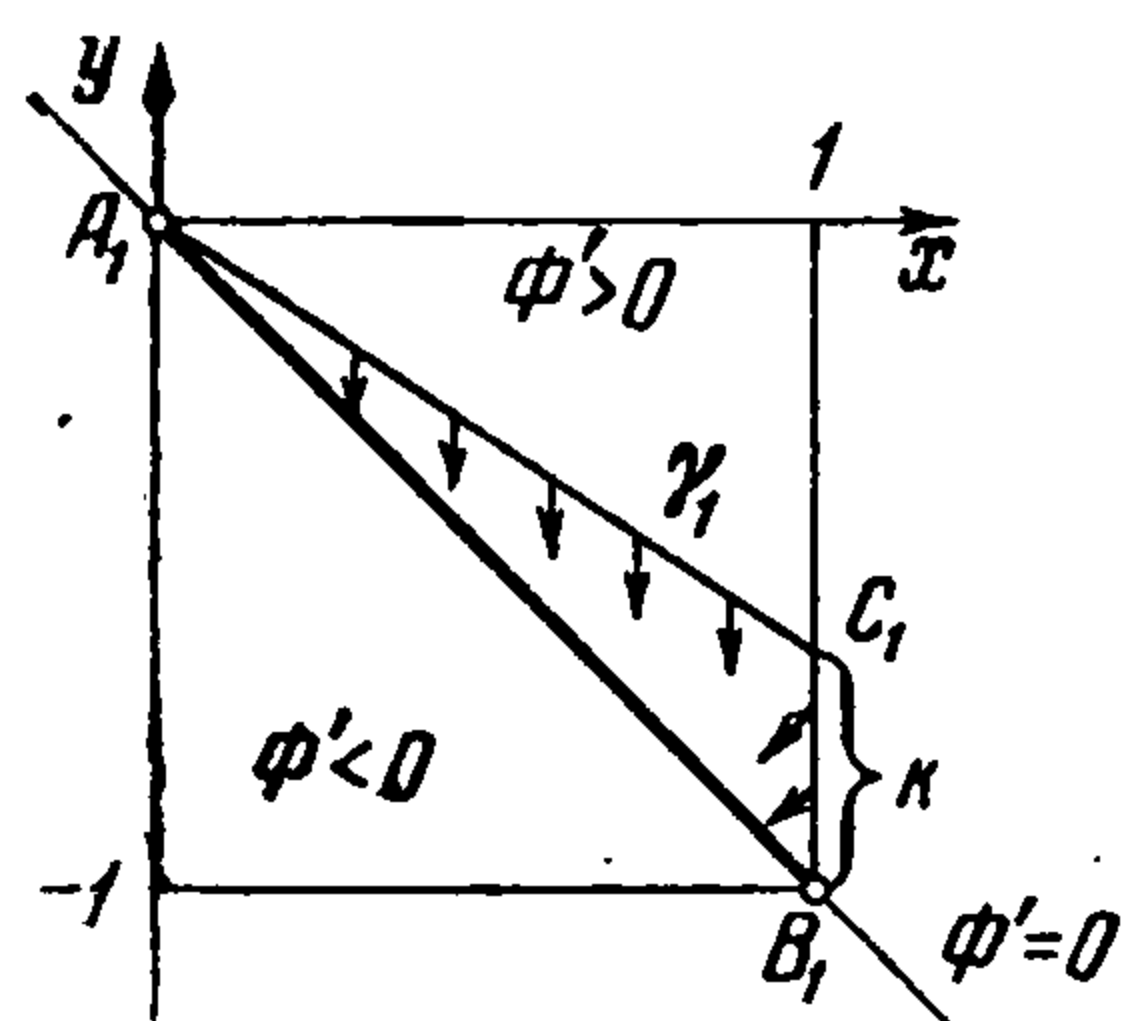
6. В случае, когда точки A_1 и B_1 обе находятся на кривой $\Phi' = 0$, эта кривая, очевидно, является решением простейшей задачи для вырожденного функционала и в классе функций, не имеющих угловых точек. Например, для интеграла

$$J = \int_{\gamma_1} [-(x+y)^2 dx + \sin \alpha y dy]$$

где γ_1 соединяет точки $A_1(0,0)$ и $B_1(1,-1)$ (фиг. 8), имеем

$$\Phi' = -\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 2(x+y)$$

Так как $\Phi' < 0$ под кривой $\Phi' = 0$, существует решение задачи на максимум J . Оно состоит только из участка кривой $\Phi' = 0$ ($y = -x$), так как A_1 и B_1 лежат на этой кривой. Проверим, например, что прямая A_1B_1 лучше кривой $A_1C_1B_1$, отличающейся от нее на интервале (0.1) на вариацию $\delta y = kx$, где $k = \text{const}$. Получим (фиг. 8)



Фиг. 8

$$J[A_1B_1] = \int_0^{-1} \sin \alpha y dy$$

$$J[A_1C_1B_1] = \left(\int_{A_1}^{C_1}\right) + \left(\int_{C_1}^{B_1}\right) = \left(-\frac{k^2}{3} + \int_0^{-1+k} \sin \alpha y dy\right) + \left(0 + \int_{-1+k}^{-1} \sin \alpha y dy\right) = J[A_1B_1] - \frac{k^2}{3}$$

Отсюда имеем $\Delta J = -1/3 k^2 < 0$, что и требовалось.

Этим исправляется ошибка, содержащаяся в учебнике [3], как в первом, так и во втором изданиях, и заключающаяся в утверждении, что функционал J не имеет ни максимума, ни минимума при $0 < |\alpha| < \pi$. Ошибка эта возникла вследствие неучета интеграла по участку C_1B_1 (фиг. 8) при вычислении приращения ΔJ .

7. Представление вариации в виде (2.1) интересно тем, что оно сохраняется и для произвольного числа n свободных функций в уравнении Пфаффа (1.1). При этом порядок матрицы N равен $n+1$. Легко провести исследование этого случая и применить его к задаче оптимального вывода ракеты с подбором функций $\alpha(t)$ и $\mu(t)$.

§ 3. В качестве примера решим для уравнения (1.5) сформулированную в § 1 задачу на максимум скорости. Положим

$$\delta t = 0, \quad x_1 = v, \quad x_2 = t, \quad x_3 = y$$

$$X_1 = \mu, \quad X_2 = v(\varphi - \mu p), \quad X_3 = \mu g, \quad \Phi' = -\Phi \quad (3.1)$$

Из формул (2.1) и (1.10) получим

$$\delta v = \int_0^T k(t) \Phi \delta y dt \quad \left(\Phi = \mu g \left[\varphi + v \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{v^2}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mu p\right] = -\Phi'\right) \quad (3.2)$$

Аппроксимируем закон сопротивления для простоты прямой. Тогда

$$c_{x0}v^2 = av - b, \quad \varphi(v, y) = \frac{\rho_0 g F}{2G_0} H(y) (av - b) \quad (3.3)$$

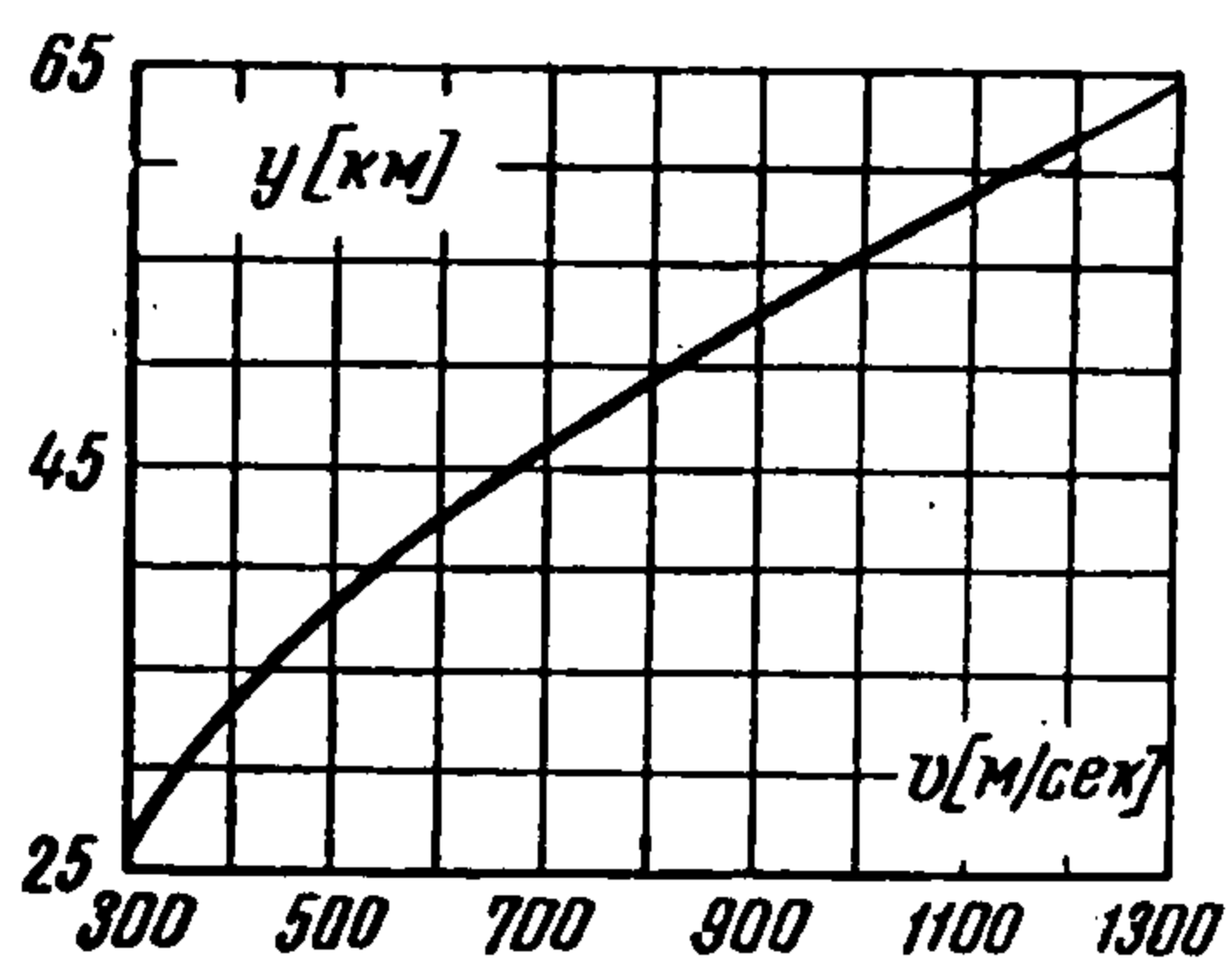
(F — площадь миделя). Положив $H(y) = e^{-ky}$ и $P = \text{const} = P_0$, получим

$$\varphi(v, y) = \frac{g\kappa}{v_0} e^{-ky} (av - b) \left(\kappa = \frac{\rho_0 v_0}{2\beta}, \beta = \frac{G_0}{F}, v_0 = \frac{G_0}{P_0} \right)$$

Подставив $\varphi(v, y)$, получим

$$\Phi(v, t, y) = \frac{\rho_0 g^2}{2\beta} \left\{ \left[av + (av - b) \left(1 + \frac{kv^2}{g} \right) \right] e^{-ky} - \frac{1}{\kappa} \right\} \mu \quad (3.4)$$

Из уравнения $\Phi = 0$ видим, что для любого $v > 0$ всегда найдется одно такое значение y , что фигурная скобка обратится в нуль. Следова-



Фиг. 9

тельно, уравнение $\Phi = 0$ определяет действительную кривую в плоскости v, y (см. фиг. 9, отвечающую $a = 100 \text{ м/сек}$, $b = 2 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{сек}^2$, $k \approx 10^{-4} \text{ м}^{-1}$, $\beta = 10^2 \text{ кг/м}^2$ и значению $\kappa^{-1} = 3300 \text{ сек}^2/\text{м}^2$). Так как $\mu(t) \neq 0$, то указанная кривая не зависит от t и определяется лишь принятым законом сопротивления, законом убывания плотности с высотой и параметром κ , зависящим от абсолютных констант и конструктивных параметров. Если,

считая $g = \text{const}$, разрешить уравнение $\Phi = 0$ относительно y , получим

$$y = \frac{1}{k} \ln \left\{ \left[av + (av - b) \left(1 + \frac{kv^2}{g} \right) \right] \kappa \right\}$$

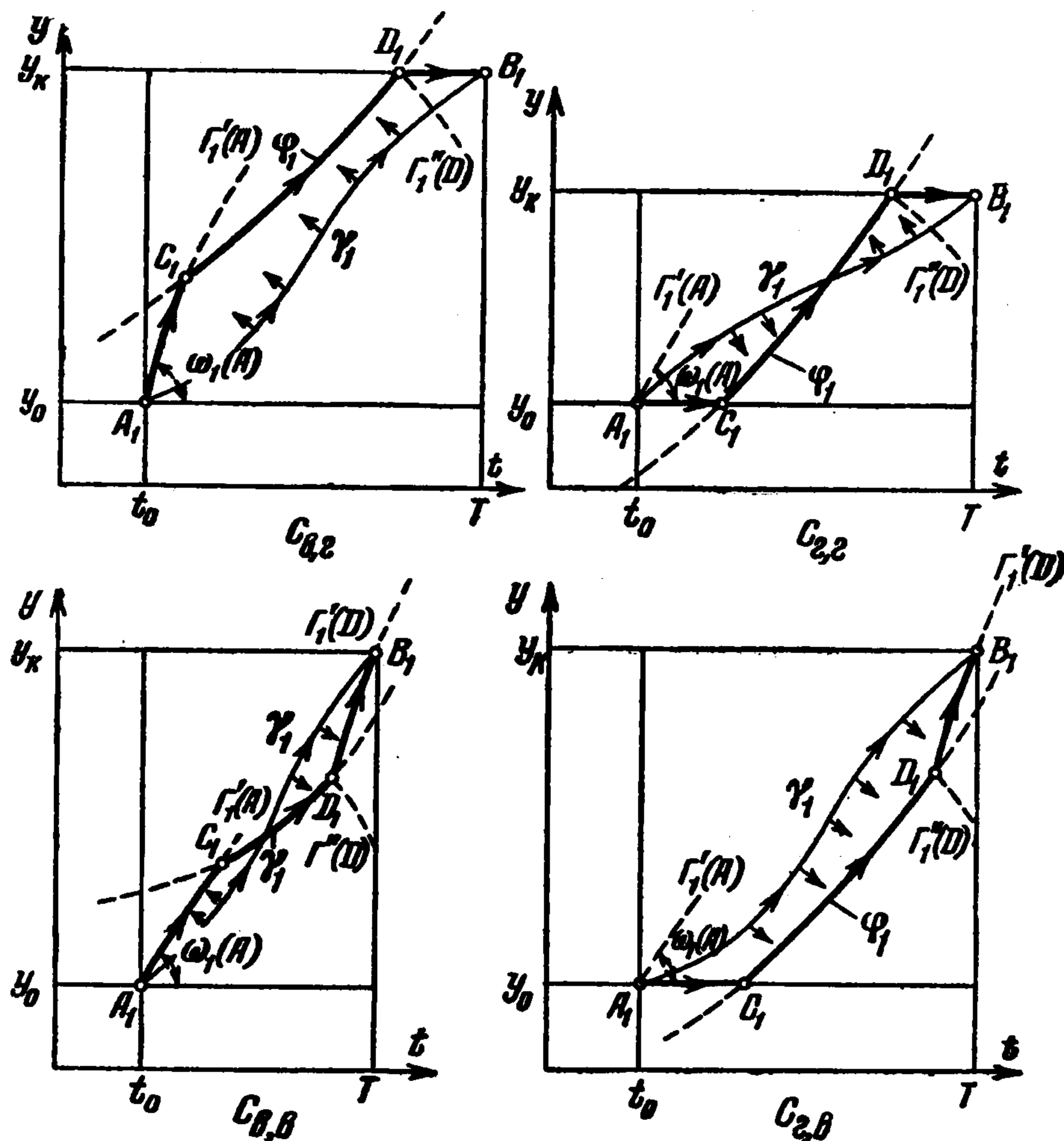
При различных значениях κ точки (v_0, y_0) , отвечающие началу A варьируемого участка траектории, в общем случае могут быть расположены как ниже кривой $\Phi = 0$, т. е. в области $\Phi > 0$, так и выше, в области $\Phi < 0$.

Рассмотрим движения (кривые γ_1) в плоскости ty (фиг. 10). Начертим на этой плоскости кривые $\Gamma_1'(A)$ и $\Gamma_1''(A)$. Они отвечают подъему вертикально вверх и падению вертикально вниз, т. е. наиболее быстрым изменениям высоты со временем. Все кривые для других движений из точки A расположатся между кривыми Γ_1' и Γ_1'' .

Рассмотрим сначала случай $\Phi(A) > 0$, т. е. $\Phi'(A) < 0$. Согласно § 2 решение задачи будет выходить из точки A_1 по левой внутренней границе $\Gamma_1'(A)$, т. е. будет начинаться вертикальным подъемом. При вертикальном подъеме, как нетрудно проверить, Φ уменьшается, т. е. точка $M(v, t, y)$ приближается к поверхности $\Phi = 0$. Пусть в некоторой точке C стало $\Phi(v_C, t_C, y_C) = 0$. Поскольку на плоскости ty кривая φ_1 , определяемая точкой C и удовлетворяющая уравнениям $\Phi = 0$ и (1.5), проходит внутри угла $\omega_1(C)$, решение должно проходить, согласно § 2, по кривой φ_1 .

В зависимости от параметров T и y_k кривая φ_1 может выйти, как нетрудно проверить, либо на границу $y = y_k$, либо на границу $t = T$. В первом случае точка B_1 оказывается на внутренней границе $\Gamma_1'(D)$ (где D — точка выхода на границу $y = y_k$ области возможного движения), и тогда решение должно окончиться горизонтальным участком D_1B_1 . Это

решение обозначим $c_{\sigma, \sigma}$ (фиг. 10), соответственно вертикальному (σ) началу и горизонтальному (σ) окончанию движения. Во втором случае решение для достижения точки B_1 согласно § 2 должно сойти с кривой φ_1 в такой точке D_1 , чтобы по внутренней границе, отвечающей этой точке, достичь точки B_1 . Такой границей в рассматриваемой задаче может быть, очевидно,



Фиг. 10

только $\Gamma_1'(D)$. Полученное решение можно по аналогии с предыдущим назвать $c_{\sigma, \sigma}$ (фиг. 10).

В случае, когда $\Phi(A) < 0$, т. е. $\Phi'(A) > 0$, решение должно выходить из точки A по правой внутренней границе $\Gamma_1''(A)$, т. е. должно начинаться горизонтальным полетом. При этом v растет, а $y \equiv y_0$, так что Φ согласно (3.4) растет. Пусть в некоторой точке C стало $\Phi = 0$. Тогда аналогично предыдущему решение должно опять проходить по кривой φ_1 , определяемой точкой C и уравнениями (1.5) и $\Phi = 0$.

Оканчиваться решение может, очевидно, опять только горизонтальным или вертикальным полетом, и аналогично предыдущему при горизонтальном начале движения получаем случаи $c_{\sigma, \sigma}$ и $c_{\sigma, \sigma}$ (фиг. 10). Полученное решение задачи, очевидно, можно считать общим. При изменении констант задачи участок движения по кривой φ_1 может изменяться, а в случаях $c_{\sigma, \sigma}$ и $c_{\sigma, \sigma}$ может даже исчезать (когда точки C_1 и D_1 совпадут). Участки D_1B_1 и A_1C_1 , очевидно, могут исчезать во всех четырех случаях.

Заметим, что при некоторых условиях (например, при $b = 0$, $\rho \equiv \rho_0$) может случиться, что движение по закону $\Phi = 0$ перейдет в некоторой точке N_1 в вертикальное и далее станет невозможным [кривая φ_1 перейдет через кривую $\Gamma_1'(N)$]. В этом случае согласно § 2 решению должно отвечать вертикальное движение. Если оно приведет к пересечению прямой $y = y_k$, оно должно перейти в горизонтальное и при $t = T$ закончиться,

а если к пересечению прямой $t = T$, то оно не может отвечать решению. Решение согласно § 2 будет оканчиваться вертикальным движением из некоторой предшествующей N_1 точки D_1 , отвечающей выходу на высоту y_k при $t = T_1$.

Полученное решение применимо согласно § 1 как для определения оптимальной траектории свободного полета, так и для оптимального выбора формы эстакады заданной высоты y_k для разгона космической ракеты. При разгоне из состояния покоя ($v_0 = 0$), как видно из (3.3), для любого степенного закона сопротивления и любого режима тяги $P(t)$ имеем $\Phi'(A) > 0$. Это значит, что могут реализоваться только случаи $c_{2, \epsilon}$ и $c_{2, \epsilon}$ (фиг. 10), т. е. движение будет начинаться горизонтальным участком, переходящим при $v = v_c$ в подъем по закону $\Phi' = 0$.

Если в постановке задачи не ограничивать величину y снизу, то, как легко проверить по методике § 2, эстакады, сперва опускающиеся, а затем поднимающиеся, будут еще более выгодными, чем эстакады без спуска, в то время как вертикальный старт будет сравнительно невыгодным.

Замечания. 1. Поскольку для задач, взаимных рассмотренной: на максимум высоты $y_k = y(T)$ при заданной конечной скорости v_k и на минимум времени T при заданных y_k и v_k , — уравнение $\Phi = 0$ и граничные кривые $\Gamma'(A)$ и $\Gamma''(A)$ (вертикального подъема и спада) остаются те же, что и в рассмотренной задаче, — соответствующие оптимальные движения будут состоять из движений по вертикали и движения по закону $\Phi(v, t, y) = 0$ да еще, быть может, из горизонтальных движений на концах, если этого требуют условия задачи (для задачи на $\min T$ это подтверждает недавняя работа А. Miele ^[4]).

2. Если под θ понимать угол скорости с местным горизонтом, решение рассмотренной и взаимных задач обобщается почти без изменений на случай центрального поля тяготения (добавляется только центробежный член в (1.3), который не сказывается на последующих рассмотрениях и результатах).

3. При получении решения лишь для простоты считалось

$$c_{x0}v^2 = av - b, \quad g = \text{const}, \quad \rho = \rho_0 e^{-ky}, \quad P = \text{const}$$

При реальных законах сопротивления и зависимостях $g(y)$ $\rho(y)$ и $P(t)$, а также с учетом противодействия поверхность $\Phi(v, t, y) = 0$ похожа на рассмотренную, решение получается тем же способом и приводит к результатам, качественно аналогичным изложенным. Однако практическое значение приведенного примера невелико. В § 1 указывалось, что в рассмотренных в нем идеализированных задачах, в отличие от реальных, наличие крутых поворотов траектории и даже угловых точек не связано с потерями на сопротивление. Этим объясняется то, что решения имеют угловые точки, а это в свою очередь существенно снижает практическое значение рассмотренного примера, так как в реальных задачах о свободном полете и о подъеме по эстакаде уменьшение радиуса кривизны траектории до нуля, как можно проверить, приводит к частичной или полной потере скорости вследствие быстрого роста сопротивления. Поэтому решения идеализированных задач не могут быть близки к решениям реальных задач (то же можно сказать и о решении А. Miele ^[4]).

Поступила 20 VII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. О х о ц и м с к и й Д. Е. К теории движения ракет. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
2. T s i e n H. S., E v a n s R. C. Optimum thrust programming for a sounding Rocket, Journ. of the American Rocket Soc., vol. 21, No 5, 1951.
3. Л а в р е н т ь е в М. А. и Л ю с т е р н и к Л. А. Курс вариационного исчисления. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, стр. 20.
4. M i e l e A n g e l o. Optimum Climbing Technique for a Rocket-Powered Aircraft, Jet propulsion, vol., 25, No 8, 1951.