ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматриваются свойства решений системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами таких, что производная от некоторой известной квадратичной формы от переменных, взятая в силу этих уравнений, есть форма знакопостоянная. Оказывается, что при некоторых легко проверяемых ограничениях, наложенных на форму и ее производную, можно сделать вывод о неустойчивости или об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных[1] для того движения, которое системой первого приближения для уравнений возмущенного движения имеет данную линейную систему.

Теорема 1. Если квадратичная форма W имеет взятую в силу уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (p_{si} = \text{const}) \tag{1}$$

постоянно отрицательную производную dW/dt, а ранги форм W и dW/dt равны и W может принимать отрицательные значения, то уравнения (1) имеют отрицательное характеристичное число.

Примечание. Ранг формы понимается, следуя терминологии Э. Картана[2]. Это наименьшее число независимых линейных относительно $x_1, \ldots, x_n$ форм, через которые эта форма может быть выражена.

Пусть указанный ранг равен $p<n$ и $v_1, \ldots v_p$ суть линейные формы, взятые в наименьшем числе, через которые может быть выражена W. Выпишем

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial W}{\partial v_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (p_j, x_1, + \ldots + p_{jn}x_n) \tag{2}$$

Пусть $w_1, \ldots, w_p$ суть те формы, взятые в наименьшем числе, через которые dW/dt выражается под видом

$$\frac{dW}{dt} = -(w_1^2 + \ldots w_p^2) \tag{3}$$

Такие формы $w_1, \ldots, w_p$ заведомо существуют, так как dW/dt по условию постоянно отрицательна.

Из (2) следует, что $dW/dt \equiv 0$, если $v_1 = \ldots v_p = 0$, а из (3) следует, что $dW/dt \equiv 0$ только тогда, когда $w_1 = \ldots = w_p = 0$.

Следовательно, из системы уравнений

$$v_1 = \ldots = v_p = 0$$

следует система $w_1 = w_2 = \ldots = w_p = 0$, а это может быть только тогда, когда формы $w_1, \ldots, w_p$ суть линейные комбинации форм $v_1, \ldots, v_p$.

Значит, dW/dt можно выразить через $v_1, \ldots, v_p$, причем

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{ij=1}^{p} \beta_{ij} v_i v_j \tag{4}$$

выраженная через $v_1, \ldots, v_p$, будет определенно отрицательной функцией переменных $v_1, \ldots, v_p$.

Как нетрудно показать, существует такая постоянная $\beta > 0$, что будет выполняться неравенство

$$dW/dt < \beta W$$

и неравенство

$$W \leqslant W_0 e^{\beta(t-t_0)}$$

Если W_0 можно сделать отрицательной, то на основании теорем о характеристичном числе суммы и произведения убеждаемся, что уравнения (1) имеет отрицательное характеристичное число.

Доказательство изложенной теоремы почти без изменений может быть повторено для следующей теоремы.

Теорема 2. Если при условиях предыдущей теоремы квадратичная форма W постоянно положительна, то движение асимптотически устойчиво по отношению к $v_1, \ldots v_p$.

Изложенные предложения позволяют судить о поведении решений системы (1) сразу после того, как мы убедились в том, что dW / dt постоянно отрицательна, а минимальные отличные от нуля миноры двух систем линейных форм

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}; \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{dW}{dt}\right), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{dW}{dt}\right).$$

имеют один и тот же порядок, ибо, как показал Э. Картан, этот порядок и равен рангу обеих форм.

Замечание. Установленный результат позволяет показать, что dW / dt будет по терминологии Н. Г. Четаева[3] определенно отрицательной в области $W < 0$. Если W может принимать отрицательные значения, то функции W и dW / dt удовлетворяют теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости.

Поступила 26 II 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости по отношению к части переменных. Вестник МГУ, № 4, 1957.
2. Картан Э. Интегральные инварианты. ГТТИ, 1940.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1955.