ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ДВУХ МАЯТНИКОВ, ПОДВЕРЖЕННЫХ РАВНОМЕРНОМУ ВРАЩЕНИЮ

С. Манолов

(София)

В работе [2] рассмотрена следующая система маятников: прямоугольная правоориентированная система координат $Oxyz$ вращается с постоянной угловой скоростью ω около постоянной, направленной вниз вертикальной оси Oz. В точке A_1, лежащей на горизонтальной оси Oy на расстоянии R от O, подвешен материальный весомый стержень A_1A_2 длиной $2a$ и массы m, так что OA_1 будет осью качания. К концу A_2 стержня присоединен второй материальный весомый стержень A_2A_3 той же длины и массы и с осью качания параллельной оси OA_1 и т. д. Наконец, к концу A_n предпоследнего стержня подвешен с осью качания, параллельной OA_1, последний также весомый и однородный стержень $A_n A_{n+1}$ той же длины $2a$ и массы m. В работе показано, что при условии

$$\omega^2 < -\frac{g}{\alpha(n)} \tag{0.1}$$

для скорости вращения и при подходящих начальных условиях рассматриваемая система маятников допускает малые периодические движения вокруг вертикального положения, которое при условии (0.1) будет положением относительного устойчивого равновесия. Здесь $\alpha(n)$ есть наименьший корень уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11} & 2(n-2)+1 & \ldots & 2(n-n)+1 \\ 2(n-2)+1 & c_{22} & \ldots & 2(n-n)+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2(n-n)+1 & 2(n-n)+1 & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{0.2}$$

где

$$c_{\nu\nu} = \frac{2}{3}[3n-(3\nu-1)] + \frac{2n-(2\nu-1)}{2a}x, \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

В работе показано, что корни уравнения (0.2) не только отрицательные, но и простые. Если обозначить через θ_ν ($\nu = 1,\ldots, n$) углы, которые образуют стержни с осью Oz, и если положить $\theta_\nu = \lambda\psi_\nu$, то начальные условия, при которых были получены малые периодические движения, имеют вид:

$$\psi_1(0) = \ldots = \psi_n(0) = 0, \qquad \psi_1'(0) = \lambda_{11} + \beta_1, \ldots, \qquad \psi_n'(0) = \lambda_{1n} + \beta_n \tag{0.3}$$

Здесь числа $\lambda_{11}\ldots, \lambda_{1n}$ определяются системой

$$2\left(\frac{1}{3}+n-\nu\right)\lambda_\nu\rho^2 + [2(n-\nu)+1]\rho^2\sum_{k=1}^{\nu-1}\lambda_k + \sum_{k=\nu+1}^{n}[2(n-k)+1]\rho^2\lambda_k =$$

$$= 2\omega^2\left(n-\nu+\frac{1}{3}\right)\lambda_\nu + \omega^2\sum_{k=\nu+1}^{n}[2(n-k)+1]\lambda_k + \omega^2[2(n-\nu)+1]\sum_{k=1}^{\nu-1}\lambda_k -$$

$$-\frac{g}{2a}[2(n-\nu)+1]\lambda_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots n, \qquad \sum_1^0 = \sum_{n+1}^{n} = 0 \tag{0.4}$$

при $\rho^2 = \omega^2 + g/x_1$, где x_1 — наибольший корень уравнения (0.2).

Однако, если принять начальные условия, зависящие не от наибольшего корня уравнения (0.2), то метод, предложенный в работе автора [2], не приведет всегда к решению задачи. Рассмотрим случай двух маятников. Обозначим через x_2 меньший корень уравнения (0.2) при $n = 2$. Если определить числа λ_{21}, λ_{22} из системы (0.5) при $n = 2$ и при $\rho^2 = \omega^2 + g/x_2$ и принять начальные условия $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$, $\psi_1'(0) = \lambda_{21} + \beta_1$, $\psi_2'(0) = \lambda_{22} + \beta_2$, то предложенный раньше метод приведет к решению задачи только при предположении, что

$$\sin\frac{k_1\pi}{k_2} \neq 0, \qquad k_i = \sqrt{-(\omega^2 + g/x_i)}, \qquad i = 1,2 \tag{0.5}$$

Ниже будет показано, что условие (0.5) не всегда имеет место. Этот случай назван нами особым случаем.

В этой работе показывается, что при подходящих начальных условиях задача существования малых периодических движений имеет решение и при указанном выше особом случае. В работе [3] рассматривается случай двух физических маятников без вращения.

§ 1. Покажем, что особый случай в действительности может иметь место. Уравнение (0.2) при $n=2$ имеет корни $x_{1,2}=(-14\pm 4\sqrt{7})\,a/9$. Условие (0.1) для ω^2 при $n=2$ получается в виде

$$\omega^2 < 3g(\sqrt{7}-2)/2\sqrt{7}a \tag{1.1}$$

С другой стороны,

$$\frac{k_1}{k_2}=\sqrt{\frac{3g(\sqrt{7}+2)-2a\sqrt{7}\,\omega^2}{3g(\sqrt{7}-2)-2a\sqrt{7}\,\omega^2}}$$

Легко проверить, что это отношение не может принимать целые значения 0, 1, 2. Однако если k — целое число $\geqslant 3$ и выберем

$$\omega^2=\frac{3g}{2a}\left[1-\frac{2(k^2+1)}{\sqrt{7}\,(k^2-1)}\right] \tag{1.2}$$

то $k_1/k_2=k$, т. е. имеет место особый случай. Заметим, что (1.2) не противоречит (1.1). Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\psi_i''=f_i(\psi_1,\psi_2,\psi_1',\psi_2',\lambda) \qquad (i=1,2) \tag{1.3}$$

где $f_i(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_1',\ \psi_2',\ \lambda)$ — вполне определенные функции. При $\lambda=0$ из (1.3) получим упрощенную систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{16}{3}\psi_1''+2\psi_2''-\left(\frac{16}{3}\omega^2-3\frac{g}{a}\right)\psi_1-2\omega^2\psi_2=0\\&2\psi_1''+\frac{4}{3}\psi_2''-\left(\frac{4}{3}\omega^2-\frac{g}{a}\right)\psi_2-2\omega^2\psi_1=0\end{aligned} \tag{1.4}$$

Рассмотрим частное решение (1.4) при начальных условиях

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=0, \qquad \psi_1'(0)=\lambda_{21}+k\lambda_{11}N, \qquad \psi_2'(0)=\lambda_{22}+k\lambda_{12}N$$

Числа λ_{i1}, $\lambda_{i2}\,(i=1,\ 2)$ определяются системой (0.4) при $n=2$ и при $\rho^2=\omega^2+$ $+g/x_i\ (i=1,\ 2)$. Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned}&\psi_{i0}(t)=\frac{\lambda_{1i}N}{k_2}\sin kk_2t+\frac{\lambda_{2i}}{k_2}\sin k_2t\\&\psi_{i0}'(t)=\lambda_{1i}N\ k\cos\ kk_2t+\lambda_{2i}\cos k_2t \qquad (i=1,\ 2)\end{aligned} \tag{1.5}$$

Ясно, что (1.5) является периодическим с периодом $2\pi/k_2$. Покажем, что можно подобрать β, δ, N таким образом, чтобы решение системы (1.3) при начальных условиях

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=0, \qquad \psi_1'(0)=\lambda_{21}+k\lambda_{11}(N+\beta), \qquad \psi_2'(0)=\lambda_{22}+k\lambda_{12}(N+\beta) \tag{1.6}$$

было периодическим с периодом $2(\pi+\delta)/k_2$. Согласно основной теореме Пуанкаре решение системы (1.3) при начальных условиях (1.6) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}&\psi_i(t,\beta,\lambda)=\psi_{i0}(t)+P_i(t)\beta+\lambda^2[Q_i(t)+R_i(t)\beta+\cdots]\\&\psi_i'(t,\beta,\lambda)=\psi_{i0}'(t)+P_i'(t)\beta+\lambda^2[Q_i'(t)+R_i'(t)\beta+\cdots]\end{aligned} \qquad (i=1,\ 2) \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в систему (1.3) и приравнивая коэффициенты при β, λ^2, $\lambda^2\beta$, получаем системы дифференциальных уравнений, при помощи которых определяются функции $P_i(t), Q_i(t)$, $R_i(t)$. Здесь используются и начальные условия (1.6). После этого подсчитываем и $Q_i(\pi/k_2)$, $R_i(\pi/k_2)$.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения обладают тем свойством, что если $\psi_i(t)$ представляет решение, то и $-\psi_i(2q-t)$ является также решением. Поэтому [1] достаточно выполнение условий

$$\psi_i(q)=0 \qquad (i=1,\ 2) \tag{2.1}$$

чтобы иметь основания утверждать, что мы имеем периодическое решение с периодом $2q$. В нашем случае $q=(\pi+\delta)/k_2$ и, следовательно, условия (2.1) принимают вид:

$$\psi_i\left(\frac{\pi+\delta}{k_2},\ \beta,\ \lambda\right)=0 \qquad (i=1,\ 2) \tag{2.2}$$

или, учитывая (1.7):

$$-\frac{\lambda_{2i}}{k_2}\sin\delta+\frac{\varepsilon_2 N}{k_2}\lambda_{1i}\sin k\delta+\frac{\varepsilon_2\lambda_{1i}}{k_2}\sin k\delta\beta+$$
$$+\lambda^2\left[Q_i\left(\frac{\pi+\delta}{k_2}\right)+R_i\left(\frac{\pi+\delta}{k_2}\right)\beta+\cdots\right]=0 \tag{2.3}$$

Здесь $\varepsilon_2=\pm 1$ в зависимости от того, будет ли k четным или нечетным. Из (2.3) развитием по степеням δ получается

$$\delta\left[-\frac{\lambda_{21}}{k_2}+\frac{\varepsilon_2 N}{k_2}\lambda_{1i}k+\frac{\varepsilon_2\lambda_{1i}}{k_2}k\beta+\cdots\right]+$$
$$+\lambda^2\left[Q_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+R_i\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\beta+\cdots\right]=0 \quad (i=1,2) \tag{2.4}$$

Эта система будет удовлетворена величинами δ и λ^2 в окрестности точки $\delta=\beta=$ $=\lambda=0$, если выполнено равенство

$$\left(-\frac{\lambda_{21}}{k_2}+\frac{\varepsilon_2 N}{k_2}\lambda_{11}k+\frac{\varepsilon_2}{k_2}\lambda_{11}k\beta+\cdots\right)\left[Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\beta+\cdots\right]-$$
$$-\left(-\frac{\lambda_{22}}{k_2}+\frac{\varepsilon_2 N}{k_2}\lambda_{12}k+\frac{\varepsilon_2}{k_2}\lambda_{12}k\beta+\cdots\right)\left[Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\beta+\cdots\right]=0 \tag{2.5}$$

Из (2.5) можно определить β, если выполнены условия

$$\left(-\frac{\lambda_{21}}{k_2}+\frac{\varepsilon_2 N}{k_2}\lambda_{11}k\right)Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-\left(-\frac{\lambda_{22}}{k_2}+\varepsilon_2\frac{N}{k_2}\lambda_{12}k\right)Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)=0 \tag{2.6}$$

$$\left(-\frac{\lambda_{21}}{k_2}+\frac{\varepsilon_2 N}{k_2}\lambda_{11}k\right)R_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-\left(-\frac{\lambda_{22}}{k_2}+\frac{\varepsilon_2 N}{k_2}\lambda_{12}k\right)R_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon_2\lambda_{11}}{k_2}kQ_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right)-\frac{\varepsilon_2\lambda_{12}}{k_2}kQ_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right)\neq 0 \tag{2.7}$$

Из условия (2.6) определим параметр N. При $k>3$ после вычисления оказывается, что (2.6) является уравнением третьей степени в отношении N. Кроме того, оказывается что один из корней этого уравнения равен нулю, а для определения остальных двух корней получается уравнение

$$x(k^2)N^2+y(k^2)=0 \tag{2.8}$$

где

$$x(k^2)=18(1568-571\sqrt{7})k^4+(22946+19691\sqrt{7})k^2+9(259\sqrt{7}+910)$$

$$y(k^2)=9(910-259\sqrt{7})k^4+(22946-19691\sqrt{7})k^2+18(571\sqrt{7}+1568)$$

Очевидно, что $x(k^2)>0$. Так как k целое больше 3, то $k^2\geqslant 16$. Непосредственной проверкой устанавливаем, что $y(k^2=16)>0$. С другой стороны, $y(k^2)$ является квадратной функцией аргумента k^2, поэтому она монотонно возрастает для

$$k^2>\frac{19691\sqrt{7}-22946}{18(910-259\sqrt{7})}$$

Однако число в правой части меньше 16. Следовательно, $y(k^2)>0$, т. е. единственный реальный корень уравнения (2.8) является $N=0$.

Условие (2.7) получается из (2.6) посредством дифференцирования по параметру N и принимает вид:

$$3x(k^2)N^2+y(k^2)\neq 0 \tag{2.9}$$

При $N=0$ последнее условие имеет место, так как $y(k^2)>0$. Таким образом полученные выше результаты можно сформулировать следующим образом.

Предположим, что имеет место особый случай, при котором k целое больше 3 и

$$\omega^2 = \frac{3g}{2a}\left[1 - \frac{2(k^2+1)}{\sqrt{7}(k^2-1)}\right]$$

Возможно подобрать β и δ в зависимости от λ в окрестности точки $\beta=\delta=\lambda=0$ таким образом, чтобы движение системы при начальных условиях $\psi_1(0)=\psi_2(0)=0$, $\psi_1'(0)=\lambda_{21}+k\lambda_{11}\beta$, $\psi_2'(0)=\lambda_{22}+k\lambda_{12}\beta$ было периодическим с периодом $2(\pi+\delta)/k_2$. Первым приближением является движение

$$\psi_i(t) = \frac{\lambda_{2i}}{k_2}\sin k_2 t, \qquad \psi_i'(t) = \lambda_{2i}\cos k_2 t \qquad (i=1,\ 2)$$

Рассмотрим случай $k=3$. Здесь условие (2.6) принимает вид:

$$(\lambda_{21}+3\lambda_{11}N)\,Q_2\left(\frac{\pi}{k_2}\right) - (\lambda_{22}+3\lambda_{12}N)\,Q_1\left(\frac{\pi}{k_2}\right) = 0 \tag{2.10}$$

После соответствующих вычислений получаем

$$81\,(11.578-3023\sqrt{7})\,N^3 + 2187\,(47\sqrt{7}-119)\,N^2 -$$
$$-\,2187\,(61\sqrt{7}-154)\,N - (1351+1217\sqrt{7}) = 0 \tag{2.11}$$

Обозначим левую часть (2.11) символом $z(N)$. Непосредственной проверкой устанавливаем, что $\dot z(-1/6)>0$, $\dot z(0)<0$, $\dot z(+\infty)>0$, откуда следует, что уравнение $\dot z(N)=0$ имеет два корня N_1, N_2, которые находятся в пределах $-1/6<N_1<0$, $N_2>0$. Кроме того, если $-1/6\leqslant N\leqslant 0$, то

$$z(N) = 2187\,(47\sqrt{7}-119)(-N)^2 + 2187\,(61\sqrt{7}-154)(-N) - 81\,(11578 -$$
$$-\,3023\sqrt{7})(-N)^3 - (1351+1217\sqrt{7}) \leqslant 2187\,(47\sqrt{7}-119)\frac{1}{36} +$$
$$+\,729\,(61\sqrt{7}-154)\frac{1}{2} - (1351+1217\sqrt{7}) < 0$$

Следует, что (2.11) имеет только один действительный корень, который является положительным и простым. Следовательно, условие (2.7), которое здесь принимает вид $\dot z(N)\neq 0$, выполнено. Таким образом, можно сформулировать и следующий результат.

Если $k=3$ и $\omega^2 = 3(14-5\sqrt{7})\,g/28a$, то возможно подобрать β и δ в зависимости от λ в окрестности точки $\beta=\delta=\lambda=0$ таким образом, чтобы движение системы при начальных условиях

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=0, \qquad \psi_1'(0)=\lambda_{21}+3\lambda_{11}(N+\beta), \qquad \psi_2'(0)=\lambda_{22}+3\lambda_{12}(N+\beta)$$

было периодическим с периодом $2(\pi+\delta)\,k_2$. Здесь N является единственным корнем уравнения (2.11).

Первым приближением является движение

$$\psi_i(t) = \frac{1}{k_2}(\lambda_{1i}N\sin 3k_2t + \lambda_{2i}\sin k_2t) \qquad (i=1,\ 2)$$
$$\psi_i'(t) = 3\lambda_{1i}N\cos 3k_2t + \lambda_{2i}\cos k_2t$$

Поступила 28 XI 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. B r a d i s t i l o v G. Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. Math. Annalen, Bd. 116, Heft 4, 1939.

2. М а н о л о в С. О существовании малых периодических движений вокруг положения относительного устойчивого равновесия одной механической системы. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.

3. Б р а д и с т и л о в Г. Върху периодични движения на двойно махало, лежащо във вертикална равнина, при кратни корени на характеристичното уравнение. Годишник на МЕИ т. II, книга 1, 1955.