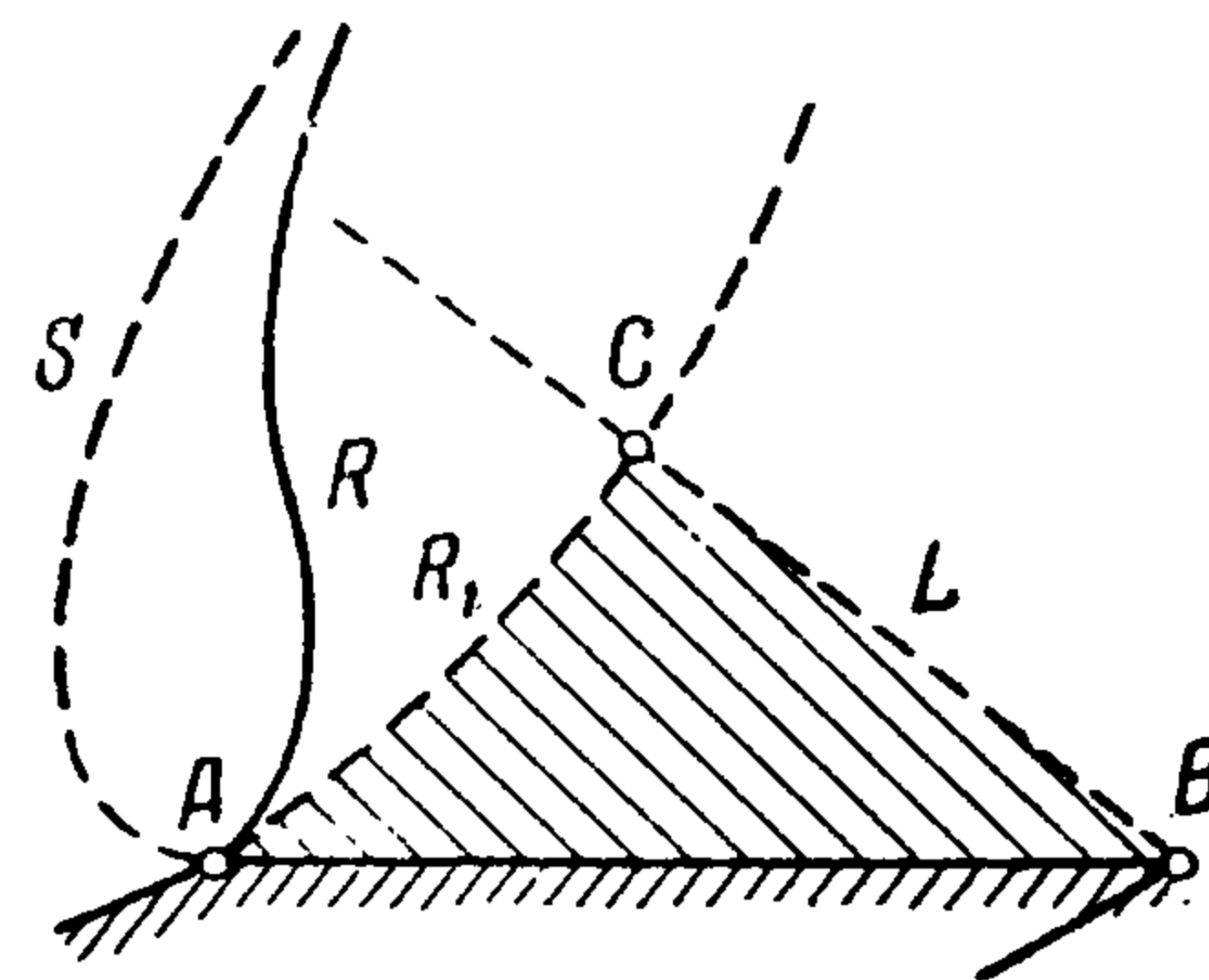


АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОГО КЛИНОВИДНОГО ПРОФИЛЯ В ЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Г. Н. Копылов

(Ленинград)

Для вычисления аэродинамических характеристик тонкого клиновидного профиля под малым углом атаки, обтекаемого звуковым потоком, в случае если известно решение для дозвуковой части потока, необходимо продолжить решение за предельные характеристики. В сверхзвуковой области течения можно, вообще говоря, использовать известный метод характеристик, как это, например, сделано в работе [1]. Однако в условиях околосзвукового обтекания возможно построение некоторого аналитического метода. В работе [2] такой метод был построен в предположении возможности замены в сверхзвуковой части потока основного уравнения Эйлера — Дарбу волновым уравнением, что непригодно при продолжении решения на верхний скат пластинки. По-видимому, без указанных упрощений строилось продолжение решения в работе [3], где приведены результаты расчета распределения давления по верхнему скату пластинки.



Фиг. 1

Ниже строится продолжение решения за предельные характеристики, исходя из решения некоторой краевой задачи для уравнения Эйлера — Дарбу, обращающегося в заданное значение на характеристике и в нуль на прямой, соответствующей контуру профиля. Отметим, что в работе [4] решалась аналогичная задача для уравнения Эйлера — Дарбу, но при иных более простых граничных условиях.

В результате работы получена полная картина распределения давления по клиновидному профилю как функция угла атаки и указаны границы применимости рассматриваемых схем обтекания.

§ 1. Задача для функции тока в плоскости годографа. Для простоты рассматривается тонкий клиновидный профиль, обладающий осями симметрии и характеризующийся параметрами: θ_0 — угол полураствора передней части клина, b — хорда профиля, α — угол атаки. Профиль изучается, так же как и в работе [5], в условиях следующих схем обтекания.

I. Критическая точка предполагается в передней кромке профиля. Обтекание аналогично случаю нулевого угла атаки.

II. Критическая точка предполагается на нижнем переднем скате. Обтекание нижнего и верхнего передних скатов профиля аналогично обтеканию нижнего и верхнего скатов пластинки.

III. Обтекание всего профиля аналогично обтеканию пластинки.

На фиг. 1 показана картина обтекания сверхзвукового ската профиля, в точке A которого имеет место звуковая скорость. Решение продолжается в область за предельную характеристику R . Поток расширяется в угловой точке A от звуковой линии S до предельной характеристики R и затем от предельной характеристики R до характеристики R_1 . Считая характеристику R_1 входящей в первое семейство, проведем из точки B характеристику второго семейства L . Этим определится область ABC . Решение в этой области находится по значению решения на характеристике R_1 и скате профиля AB .

В действительности за характеристикой R могут образоваться одна или серия ударных волн, и описанная картина обтекания нарушается. Однако визуальное изучение поля течения около профиля показывает, что при малом угле атаки (схема обтекания I) эти волны слабы и ими можно пренебречь, при большом угле атаки (схемы обтекания II, III) образующиеся на верхнем скате скачки уплотнения косые, сохраняющие режим сверхзвукового обтекания верхнего переднего ската профиля и по интенсивности тем меньше, чем меньше θ_0 и α . Поэтому в первом приближении предполагаем поток непрерывным везде за характеристикой R .

В качестве переменных выбираем

$$\theta = a \left(\frac{v_y}{a_* \tau} - l \right), \quad \eta = a^{2/3} \frac{(\kappa + 1)^{1/3}}{\tau^{2/3}} \left(1 - \frac{v_x}{a_*} \right)$$

В качестве искомых функций принимаем

$$\psi(\theta, \eta) = \frac{\tau^{1/3} (\kappa + 1)^{2/3}}{a^{2/3} l_*} y, \quad \varphi(\theta, \eta) = \frac{x}{l_*}$$

где

$$a = 1, \quad l = -\frac{\alpha + \theta_0}{2\theta_0}, \quad \tau = 2\theta_0, \quad l_* = \frac{b}{2} \quad (\text{в случае схемы I})$$

$$a = \frac{2\theta_0}{\pi}, \quad l = -\frac{\alpha + \theta_0}{2\theta_0}, \quad \tau = 2\theta_0, \quad l_* = \frac{b}{2} \quad (\text{в случае схемы II})$$

$$a = \frac{\alpha}{\pi}, \quad l = -1, \quad \tau = \alpha, \quad l_* = b \quad (\text{в случае схемы III})$$

Здесь x, y — координаты плоскости течения v_x, v_y , проекции вектора скорости. Заметим, что в условиях околосзвукового обтекания с точностью до малой величины высшего порядка и числового множителя величины ψ — функция тока и φ — потенциал скорости.

Уравнения движения в плоскости годографа примут вид [6]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (1.1)$$

или, исключая φ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.2)$$

Характеристики уравнения (1.2) в гиперболической полуплоскости запишутся

$$\xi = \theta - \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2}, \quad \lambda = \theta + \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} \quad (1.3)$$

В плоскости $\theta\eta$ задача по непрерывному продолжению решения из дозвуковой области в сверхзвуковую сводится к следующим двум.

1. Найти решение $u(\theta, \eta)$ уравнения (1.2) в полосе

$$\alpha \leq \xi \leq \beta, \quad \alpha \leq \lambda \leq \alpha', \quad \eta \leq 0 \quad (\beta' \leq \lambda \leq \beta, \quad \alpha \leq \xi \leq \alpha', \quad \eta \leq 0)$$

обращающееся в нуль на характеристике $\xi = \alpha$ ($\eta = \alpha'$) и принимающее заданное значение $v(\theta) = [\partial \psi / \partial \eta]_{\eta=0}$ на линии параболичности (фиг. 2).

2. Найти решение $\psi(\theta, \eta)$ уравнения (1.2) в треугольнике abc (adc), обращющееся в нуль на прямой $\theta = \mu$ и в решение предыдущей задачи на характеристике $\eta = \alpha'$ ($\xi = \alpha$). Принятые постоянные имеют следующие значения.

Схема обтекания I — нижний (верхний) задний скат профиля

$$\alpha = 0, \quad \beta = \theta_1, \quad \mu = 1, \quad \alpha' = 2 \quad (\alpha' = 1, \quad \beta' = \theta_1, \quad \mu = 0, \quad \alpha = -1) \quad (1.4)$$

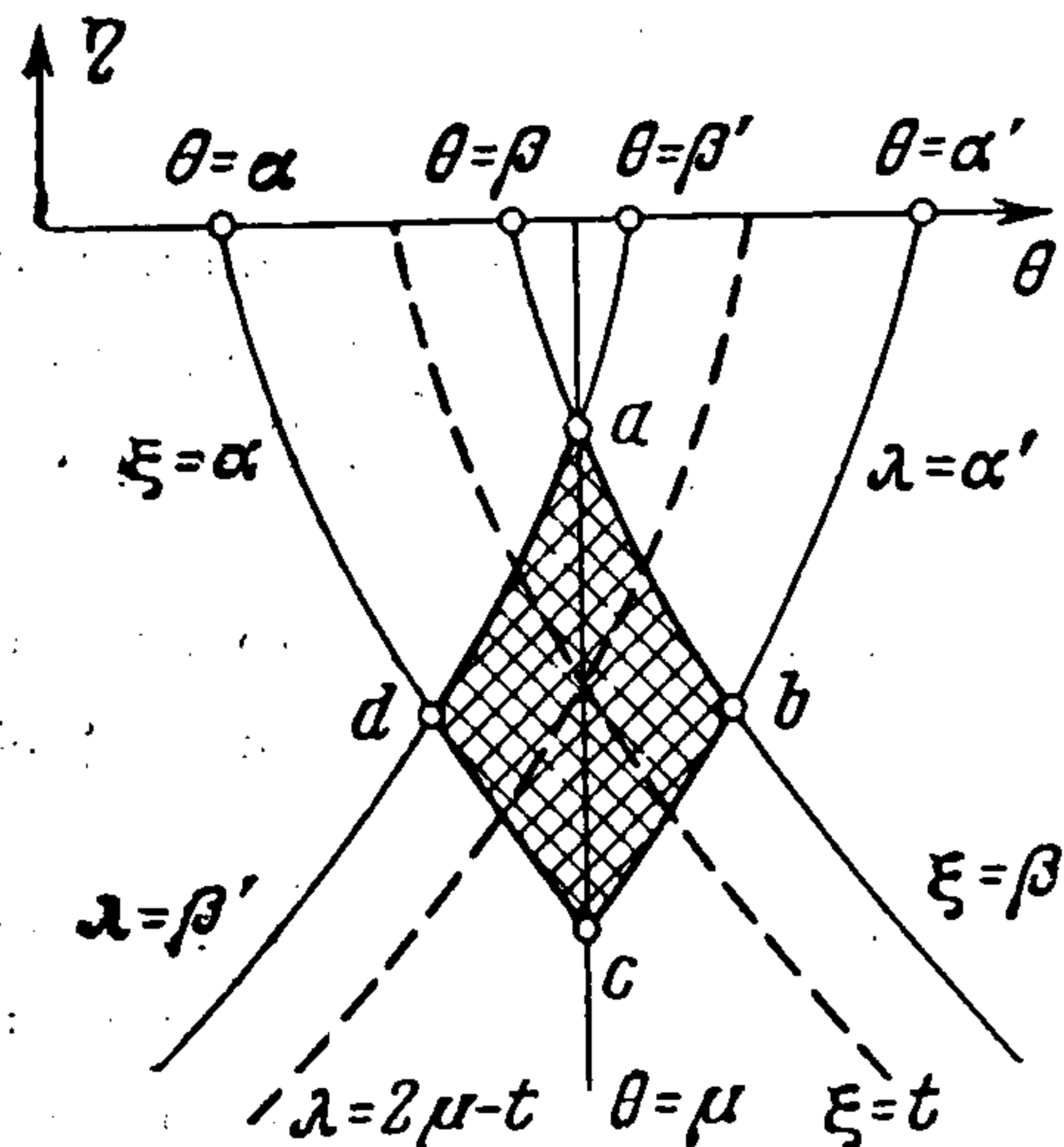
Схема обтекания II — нижний задний (верхний) передний скат профиля

$$\alpha = 0, \quad \beta = \theta_1, \quad \mu = \frac{2\theta_0}{\pi}, \quad \alpha' = \frac{4\theta_0}{\pi}$$

$$\left(\alpha' = 1, \quad \beta' = \theta_1, \quad \mu = \frac{2\theta_0}{\pi}, \quad \alpha = -1 + \frac{2\theta_0}{\pi} \right) \quad (1.5)$$

Схема обтекания III — верхняя поверхность профиля пластинки

$$\alpha' = 1, \quad \beta' = \theta_1, \quad \mu = 0, \quad \alpha = -1 \quad (1.6)$$



Фиг. 2

Здесь во всех трех случаях $\theta_1 = -al$ — величина θ , соответствующая невозмущенному потоку.

В работе [2] найдено решение первой задачи, обращающееся в нуль на характеристике $\eta = \alpha'$:

$$u(\xi, \lambda) = \gamma \int_{\lambda}^{\alpha'} \frac{v(t) dt}{(t - \lambda)^{1/2} (t - \xi)^{1/2}} \quad \left(\gamma = \frac{3^{1/2} \Gamma^3(1/3)}{4\pi^2} \right) \quad (1.7)$$

Аналогичными вычислениями находим, что решение первой задачи, обращающееся в нуль на характеристике $\xi = \alpha$, имеет вид:

$$u(\xi, \lambda) = \gamma \int_{\alpha}^{\xi} \frac{v(t) dt}{(\xi - t)^{1/2} (\lambda - t)^{1/2}} \quad (1.8)$$

Решение второй задачи в треугольнике abc запишется теперь в виде простой линейной комбинации (1.7) и (1.8):

$$\psi(\xi, \lambda) = \gamma \int_{\alpha}^{\xi} \frac{v(t) dt}{(\xi - t)^{1/2} (\lambda - t)^{1/2}} - \gamma \int_{\lambda}^{2\mu - \alpha} \frac{v(2\mu - t) dt}{(t - \lambda)^{1/2} (t - \xi)^{1/2}} \quad (1.9)$$

Действительно, если $\lambda = \alpha' = 2\mu - \alpha$, видно, что (1.9) совпадает с (1.7) на характеристике $\lambda = \alpha'$. Далее при $\theta = \mu$ имеем из (1.3) $\xi = 2\mu - \lambda$; отсюда после замены переменных во втором из интегралов (1.9) по формуле $t' = 2\mu - t$ убеждаемся, что $[\psi(\xi, \lambda)]_{\theta = \mu} = 0$.

Аналогично решением второй задачи в треугольнике adc является

$$\psi(\xi, \lambda) = \gamma \int_{\lambda}^{\alpha_1} \frac{v(t) dt}{(t - \xi)^{1/2} (t - \lambda)^{1/2}} - \gamma \int_{2\mu - \alpha'}^{\xi} \frac{v(2\mu - t) dt}{(\xi - t)^{1/2} (\lambda - t)^{1/2}}, \quad (1.10)$$

§ 2. Переход к плоскости течения. Переход к плоскости течения заключается в определении функции $\varphi(\theta, \eta)$, связанной с потенциалом скорости и являющейся безразмерной координатой x/l_* в плоскости течения. Функция $\varphi(\theta, \eta)$ при данной удовлетворяющей уравнению (1.2) функции $\psi(\theta, \eta)$ определяется с точностью до аддитивной постоянной из уравнения связи (1.1).

При определении распределения давления по контуру профиля требуется значение функции φ на прямых $\theta = \mu$, соответствующих в зависимости от выбора μ тому или иному скату профиля. Эти значения можно вычислить следующим образом. Так как $d\varphi = (\partial\varphi / \partial\lambda) d\eta$ вдоль прямой $\theta = \mu$, то учитывая (1.1), имеем

$$\varphi(\mu, \eta) = C + \int_{\eta_c}^{\eta} \varphi_{\eta}(\mu, \eta) d\eta = C + \int_{\eta_c}^{\eta} \eta \psi_{\theta}(\mu, \eta) d\eta \quad (2.1)$$

где C — значение φ в точке c , y_c — ордината этой точки. Далее из (1.3) следует $\partial\psi / \partial\theta = \partial\psi / \partial\xi + \partial\psi / \partial\lambda$ и уравнение (2.1) переписывается либо в виде

$$\varphi(\mu, \eta) = C - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \int_{\alpha}^{\xi} (\mu - t)^{1/2} [\psi_{\xi}(t, 2\mu - t) + \psi_{\lambda}(t, 2\mu - t)] dt \quad (2.2)$$

либо

$$\varphi(\mu, \eta) = C - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \int_{\lambda}^{\alpha'} (t - \mu)^{1/2} [\psi_{\xi}(2\mu - t, t) + \psi_{\lambda}(2\mu - t, t)] dt \quad (2.3)$$

Принимая во внимание, что вдоль прямой $\xi + \lambda = 2\mu$ имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \lambda) = \frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \lambda) + \frac{\partial}{\partial\lambda} f(\xi, \lambda)$$

и, кроме того,

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = - \frac{df(2\mu - \xi)}{d\xi}$$

получим для функции $\psi(\xi, \lambda)$, определяемой (1.9), после несложных преобразований

$$[\psi_{\xi}(2\mu - \lambda, \lambda) + \psi_{\lambda}(2\mu - \lambda, \lambda)] = \gamma \left[\frac{2}{3} \int_{\lambda}^{\alpha'} \frac{\nu(t) dt}{(t - \lambda)^{1/2} (t - 2\mu - \lambda)^{1/2}} + \right. \\ \left. + 2 \frac{d}{d\lambda} \int_{\lambda}^{\alpha'} \frac{\nu(t) dt}{(t - 2\mu + \lambda)^{1/2} (t - \lambda)^{1/2}} \right] \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), интегрируя по частям и заменяя порядок интегрирования по формуле Дирихле, получим после перегруппировки

$$\varphi(\mu, \eta) = C + \gamma \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \int_{\lambda}^{\alpha'} \nu(t) F \left(\frac{t - \lambda}{t - \mu} \right) dt \quad (2.5)$$

где

$$F(x) = 2 \frac{(1 - x)^{1/2}}{(2 - x)^{1/2} x^{1/2}} + \frac{2}{3} x^{5/2} \int_0^1 t^{-1/2} (1 - xt)^{-2/2} (2 - xt)^{-1/2} dt$$

Интеграл в последнем выражении может быть приведен к гипергеометрическому, и результат примет вид:

$$F(x) = (1 - x)^{-1/2} \Phi_1[x(2 - x)] \quad \left(\Phi_1(x) = x^{-1/2} \left[2 - \frac{4}{5} x F \left(1, \frac{1}{2}, \frac{11}{6}, x \right) \right] \right)$$

Формула (2.5) окончательно запишется

$$\varphi(\mu, \eta) = C + \gamma \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} (\mu - \xi)^{-2/2} \int_{\alpha}^{\xi} \nu(t) (\mu - t)^{2/2} \Phi_1 \left[1 - \left(\frac{\mu - \xi}{\mu - t} \right)^2 \right] dt \quad (2.6)$$

Полученное выражение представляет $\varphi(\mu, \eta)$ как интегральный оператор от $\nu(t)$, заданный на интервале $\mu < t \leq \alpha'$. Аналогичная формула может быть выписана и для интервала $\alpha \leq t < \mu$ использованием (2.2):

$$\varphi(\mu, \eta) = C + \gamma \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} (\mu - \xi)^{-2/2} \int_{\alpha}^{\xi} \nu(t) (\mu - t)^{2/2} \Phi_1 \left[1 - \left(\frac{\mu - \xi}{\mu - t} \right)^2 \right] dt \quad (2.7)$$

В случае, если существует производная от функции $\nu(t)$ на интервале ее задания, то указанные выражения интегрированием по частям можно представить также в следующем виде:

$$\varphi(\mu, \eta) = C - \frac{6}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \gamma \int_{\lambda}^{\alpha'} \nu'(t) \Phi \left[1 - \left(\frac{\lambda - \mu}{t - \mu} \right)^2 \right] (t - \mu) dt \quad (2.8)$$

$$\varphi(\mu, \eta) = C - \frac{6}{5} \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \gamma \int_{\alpha}^{\xi} \nu'(t) \Phi \left[1 - \left(\frac{\mu - \xi}{\mu - t} \right)^2 \right] (\mu - t) dt \quad (2.9)$$

где

$$\Phi(x) = x^{5/2} F \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{11}{6}, x \right), \quad \lambda = \mu + \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2}, \quad \xi = \mu - \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2}$$

Последние формулы более удобны для расчетов, ибо входящая в них функция $\Phi(x)$ близка к линейной $y = 1.26x$.

В интересующих нас случаях в формулах (2.8), (2.9) можно положить $\alpha = 0, \alpha' = 1$.

§ 3. Распределение давления по профилю и границы применимости схем обтекания. Безразмерный коэффициент давления легко выражается через переменную η :

$$\bar{p} = 2^{5/2} \frac{\theta_0^{5/2}}{(x + 1)^{1/2}} a^{-2/2} \eta \quad (3.1)$$

В случае схемы обтекания I для верхнего переднего ската $\mu = 0$ и для нижнего заднего ската $\mu = 1$. Так как в верхней угловой точке $\varphi = 1$, то $C = 1$ и, следова-

тельно, выражения (2.8) и (2.9) примут вид:

$$\varphi(0, \eta) = 1 - \frac{6}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \gamma \int_{\delta}^1 v'(t) \Phi\left(1 - \frac{\delta^2}{t^2}\right) t dt \quad (3.2)$$

$$\varphi(1, \eta) = 1 - \frac{6}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \gamma \int_0^{1-\delta} v'(t) \Phi\left(1 - \frac{\delta}{(1-t)^2}\right) (1-t) dt \quad (3.3)$$

$$\delta = \frac{2}{3} (-\eta)^{3/2}$$

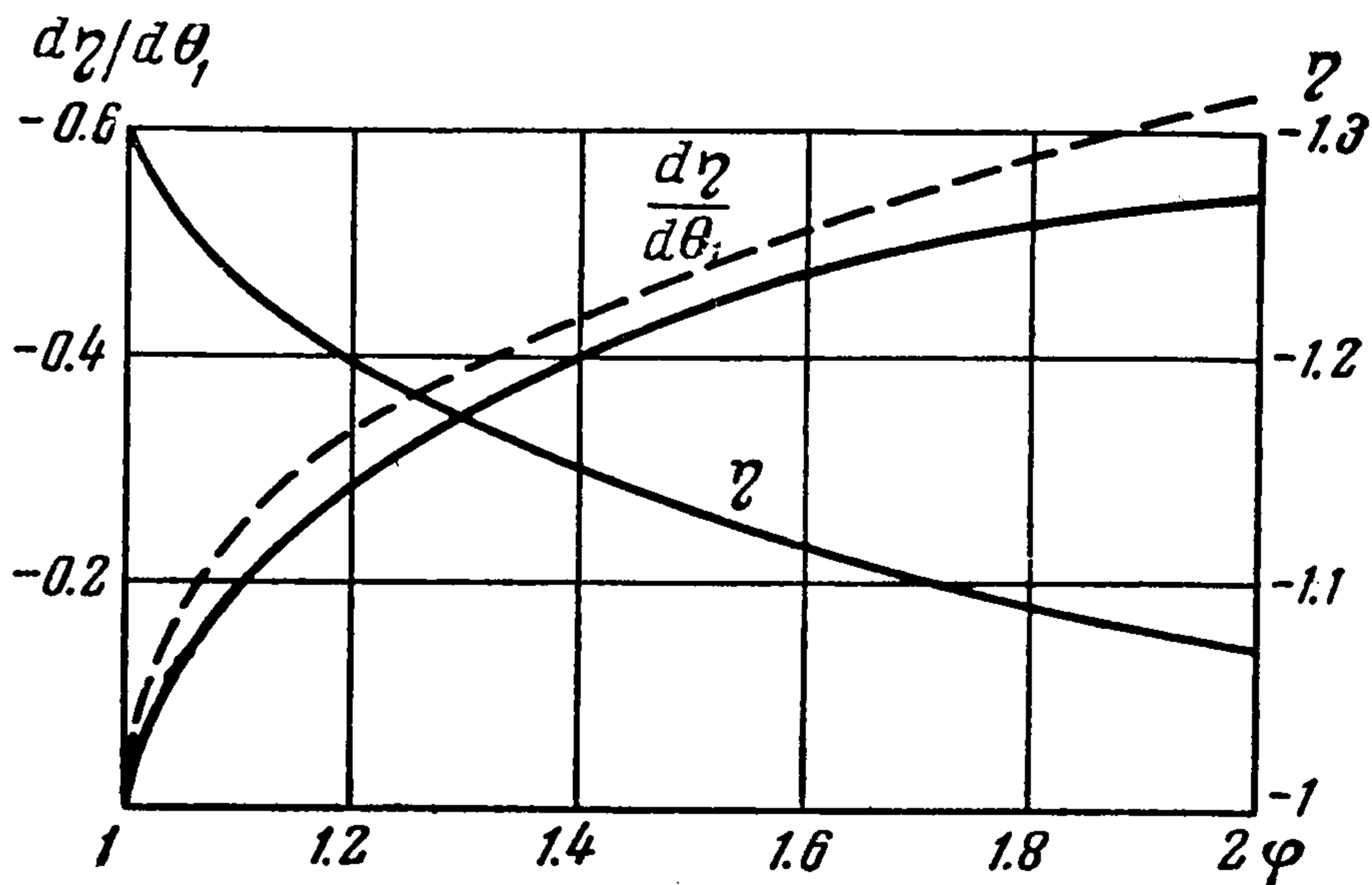
В работе [5] было получено выражение для $v(0)$. Дифференцируя $v(\theta)$ и подставляя в (3.2) и (3.3), можно получить распределение давления по задним скатам клиновидного профиля в условиях схемы обтекания I. На фиг. 3. приведены результаты вычислений η и $d\eta/d\theta_1$ для заднего ската по формулам (3.2), (3.3). Пунктиром даны результаты работы [1].

Численное интегрирование полученных графиков распределения давления дает в условиях схемы обтекания I

$$C_x = 5.30 \frac{\theta_0^{5/3}}{(\alpha + 1)^{1/3}}$$

$$C_y = \frac{3.21}{[\theta_0(\alpha + 1)]^{1/3}} \alpha$$

$$C_m = \frac{0.911}{[\theta_0(\alpha - 1)]^{1/3}} \alpha$$



Фиг. 3

Формулами можно пользоваться при достаточно малом отношении α / θ_0 .

В случае схемы обтекания II вдоль верхнего переднего ската $\theta = a$ в передней кромке $\varphi = 0$. Тогда, полагая $\mu = a^1$, $C = 0$, имеем

$$\varphi(a, \eta) = -\frac{6}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \gamma \int_{\alpha+\delta}^1 v'(t) \Phi\left[1 - \frac{\delta^2}{(1-t)^2}\right] (t-a) dt \quad (3.4)$$

Исходя из исследования обтекания нижнего переднего ската профиля в условиях схемы обтекания II при достаточно малых θ и θ_1 имеем [5]

$$v(\theta) = -\frac{7}{18} \frac{1}{a^2} f(l, t) \quad (3.5)$$

где

$$f(l, t) = l^{1/3} [(t+l)^{-10/3} + (t-l)^{-10/3}] - \frac{3}{7} l^{1/2} [(t-l)^{-7/3} - (t+l)^{-7/3}]$$

$$\theta = at, \quad \theta_1 = -al, \quad l = -\frac{\alpha + \theta_0}{2\theta_0}, \quad a = \frac{2\theta_0}{\pi}$$

Подставляя (3.5) в (3.4), заменяя в последнем переменную интегрирования $t = at'$ и переходя к пределу при $a \rightarrow 0$ ($\theta_0 \rightarrow 0$), получим

$$\varphi(0, \eta) = \frac{7}{15} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \gamma \int_{1+\rho}^{\infty} f(l, t) \Phi\left[1 - \frac{\rho^2}{(t-1)^2}\right] (t-1) dt \quad (3.6)$$

Здесь

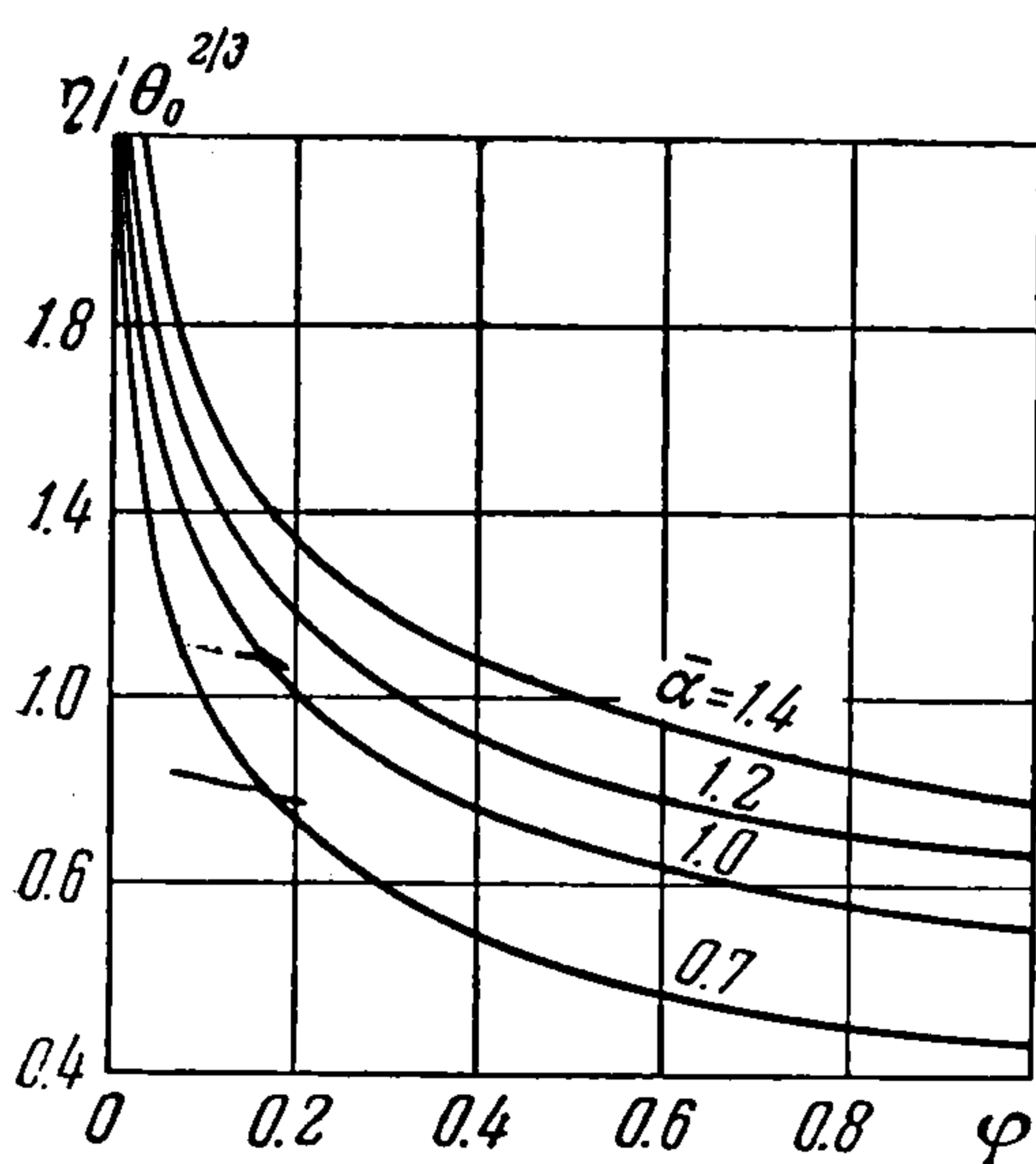
$$\rho = \delta/a = \pi/3 = (-\eta/\theta_0^{2/3})^{3/2}$$

Вдоль нижнего заднего ската профиля $\theta = a$ и координата нижней угловой точки будет равна $\varphi = 1$.

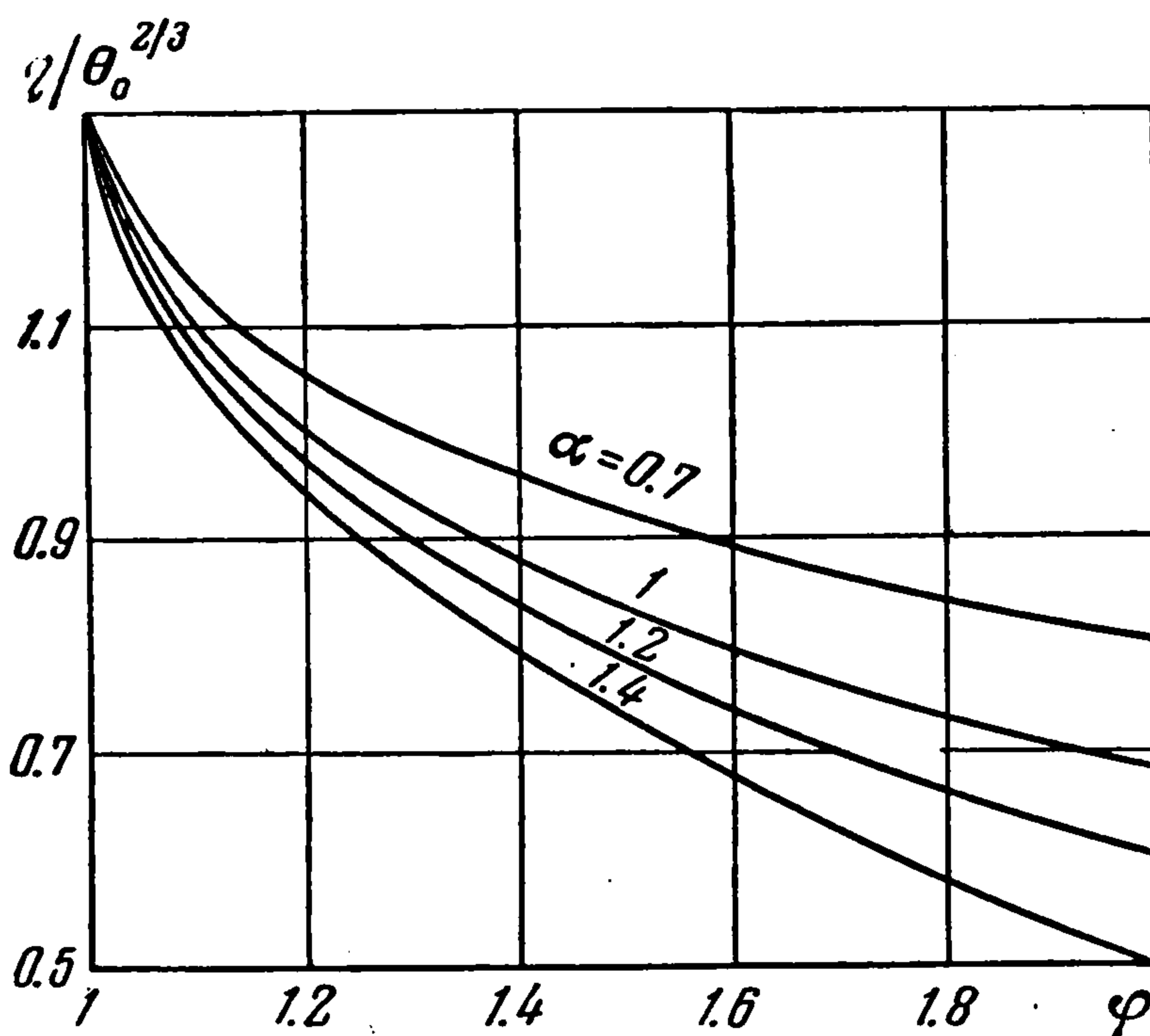
Подставляя $\mu = a$, $C = 1$ в (3.5) и (2.9), получим предельным переходом при $a \rightarrow 0$

$$\varphi(0, \eta) = 1 - \frac{7}{15} \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \gamma \int_0^{1-\rho} f(l, t) \Phi \left[1 - \frac{\rho^2}{(1-t)^2}\right] (1-t) dt \quad (3.7)$$

На фиг. 4, 5 представлены графики зависимости $\eta / \theta_0^{2/3}$ от φ при четырех значениях параметра $\bar{\alpha} = \alpha / \theta_0$, вычисленные соответственно по формулам (3.6), (3.7) и представляющие картину распределения давления по верхнему переднему и нижнему заднему скатам профиля.



Фиг. 4



Фиг. 5

Исходя из полученных формул, можно определить границы реализации схемы обтекания II в зависимости от α / θ_0 . Очевидно, схема II реализуется тогда, когда на верхнем переднем и нижнем заднем скатах отсутствует переход через скорость звука. В противном случае течение перестраивается с образованием местных сверхзвуковых зон на носике или нижней угловой точке профиля.

Полагая в (3.6) и (3.7) $\rho = 0$ ($\eta = 0$) и выполняя интегрирование, получим координату звуковой точки на переднем верхнем скате

$$\varphi_+ = \frac{1}{4} l^{1/2} [(1+l)^{-1/2} + (1-l)^{-1/2}] - \frac{3}{4} [(1-l)^{-1/2} - (1+l)^{-1/2}] \quad (3.8)$$

и на нижнем заднем скате

$$\varphi_- = \varphi_+ - 1 \quad (3.9)$$

Графически находим, что $\varphi_+ \geq 1$ и $\varphi_- \geq 2$ имеет место при

$$0.59 \leq \frac{\alpha}{\theta_0} \leq 1.94 \quad (3.10)$$

Последнее неравенство и определяет границы применимости схемы обтекания II. В работе [5] экспериментально установлено, что схема обтекания II реализуется при $\alpha / \theta_0 > 0.6$, что хорошо согласуется с (3.10).

Поступила 17 IX 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. G u d e r l e y G. and J o s h i c h a r a H. Two-dimensional unsymmetric low patterns at mach Number I, JAS, vol. 20, No 11, 1953.
2. К р ю ч и н А. Ф. О сопротивлении ромбовидного профиля при околосвуковых скоростях, ДАН СССР, т. ХСVII, № 2, 1954.
3. G u d e r l e y G. The flow over a flat plate with a small angle of attack at mach. Number I, JAS, vol. 21, No 4, 1954.
4. С к р и п к и н В. А. Об околосвуковом истечении газовой струи из насадка с параллельными стенками. ПММ, т. XIX, вып. 1, 1955.
5. К о п ы л о в Г. Н. Звуковой проток около клина под некоторым углом атаки. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
6. О в с я н и к о в Л. В. Уравнение околосвукового движения газа. Вестник ЛГУ, сер. «Механика, физика, химия», № 6, 1952.