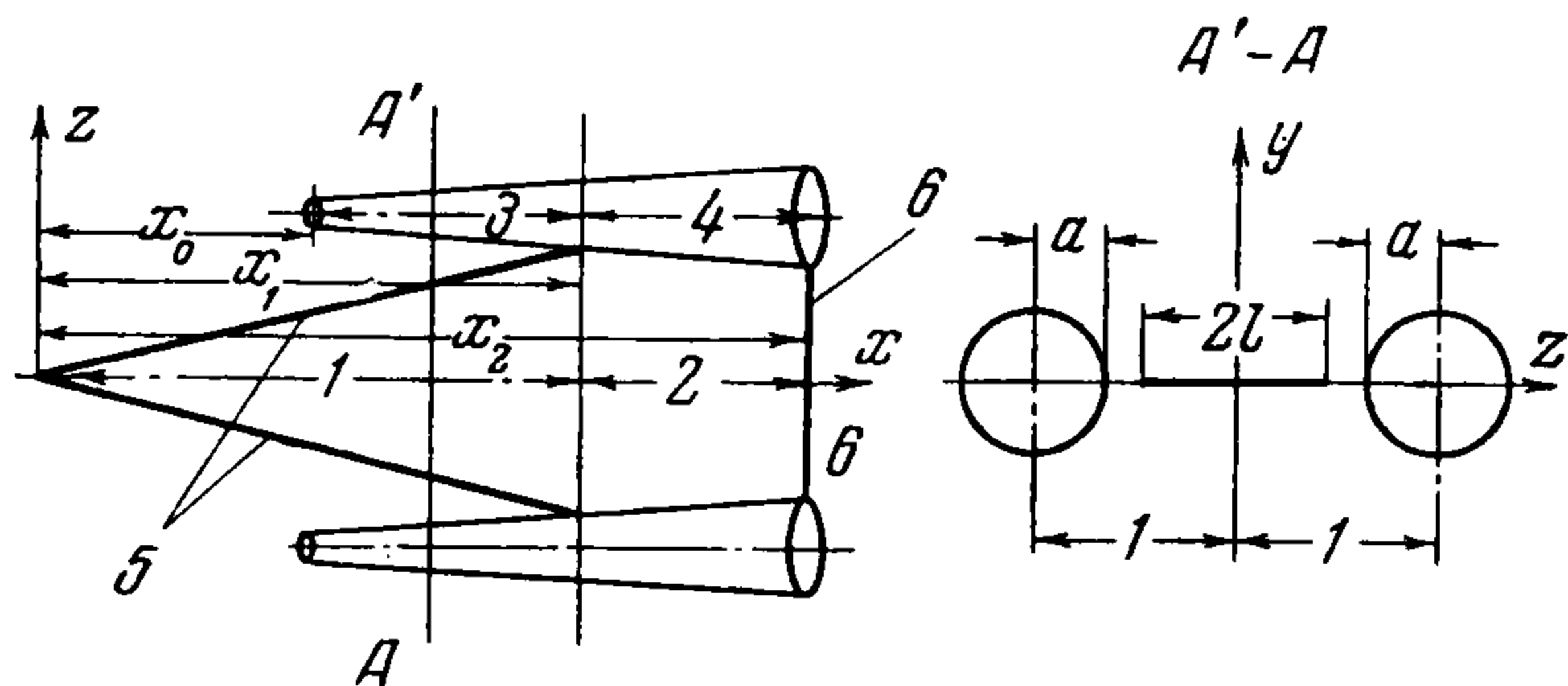


**ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ТОНКОГО ТЕЛА К РАСЧЕТУ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛА МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ С ГОНДОЛАМИ
НА КОНЦАХ**

В. В. Келдыш

(Москва)

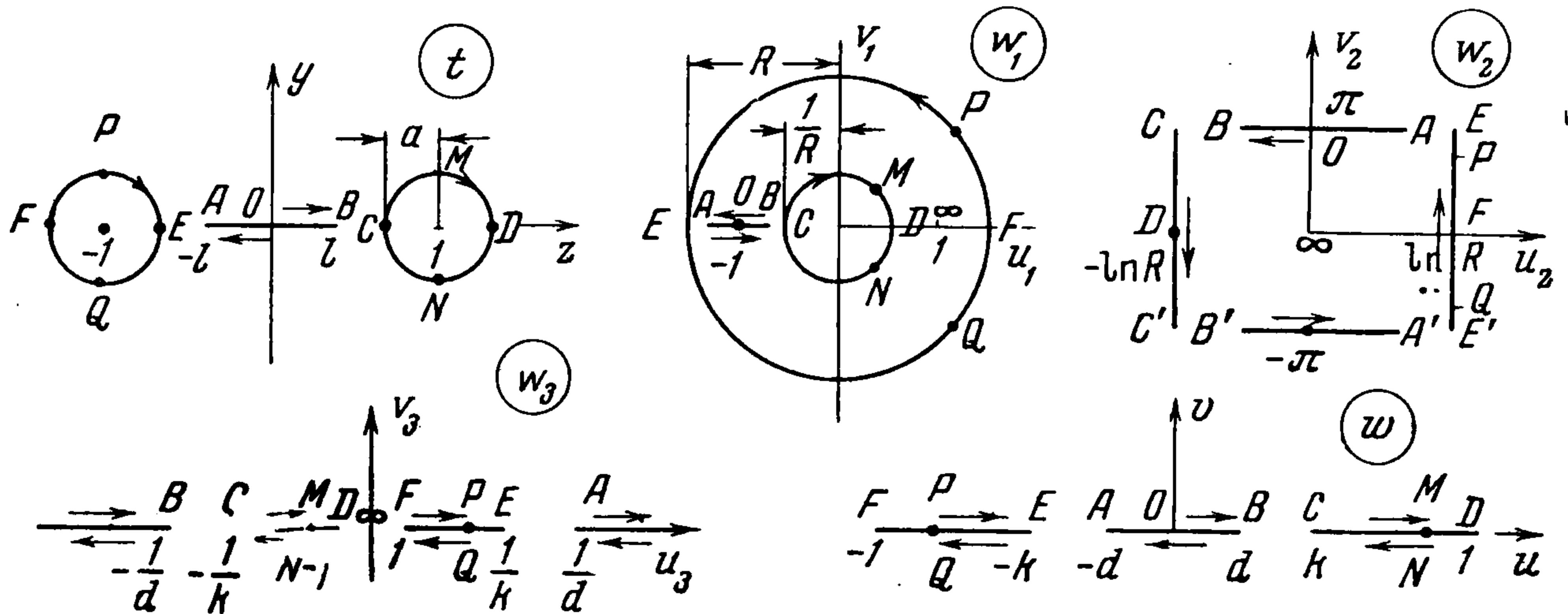
Коэффициенты подъемной силы и продольного момента плоского крыла малого удлинения с гондолами на концах определяются по теории тонкого тела с применением теории функций комплексного переменного [1]. Рассматриваются комбинации,



Фиг. 1

представленные на фиг. 1, где 1 и 2 — передняя и центральная части крыла, 3 и 4 — носовая и центральная части гондол, 5 и 6 — передняя и задняя кромки крыла. Оси гондол, являющихся телами вращения, параллельны оси крыла и расположены в его плоскости, задняя кромка крыла прямая и расположена в одной плоскости с основанием гондол. Передняя

кромка пересекается прямой, параллельной оси крыла, только в одной точке. Обозначения размеров даны на фиг. 1. За единицу измерения принята половина расстояния между осями гондол, к которому отнесены все прочие размеры (a , l , x и т. д.).



Фиг. 2

В общем случае $l \leq 1 - a$ контур поперечных сечений комбинации конформно отображается на три разреза действительной оси плоскости w :

$$-1 \leq w \leq -k, \quad -d \leq w \leq d, \quad k \leq w \leq 1, \quad d \leq k \quad (1)$$

при помощи функции

$$w = - \left\{ \operatorname{sn} \left[\frac{1}{C} \ln \frac{t - \sqrt{1 - a^2}}{t + \sqrt{1 - a^2}} \right] \right\}^{-1} \quad (2)$$

где sn — эллиптический синус.

Постоянные преобразования k , C и d определяются из уравнений

$$\frac{K(k)}{K(k')} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$C = \frac{\pi}{K(k')}, \quad d = w(t = \dots) \quad (3)$$

Здесь $K(k)$ и $K(k')$ — полные эллиптические интегралы 1-го рода от сопряженных модулей k и k' , a и l — относительные радиус гондол и полуразмах крыла в сечении $x = \text{const}$.

На фиг. 2 приведены плоскости промежуточных преобразований:

$$w_1 = \frac{t - \sqrt{1 - a^2}}{t + \sqrt{1 - a^2}}, \quad w_2 = \ln w_1, \quad w_3 = \operatorname{sn}\left(\frac{w_2}{C}, k\right), \quad w = -\frac{1}{w_3}$$

Комплексный потенциал скорости бесциркуляционного течения, создаваемого разрезным крылом (1), помещенным в поперечный поток со скоростью A , определяется по формуле Чаплыгина [2]

$$\Phi(w) = -iA \int_w^1 \frac{\tau [\tau^2 - d^2 - (1 - d^2) E(n) / K(n)]}{V(\tau^2 - 1)(\tau^2 - k^2)(\tau^2 - d^2)} d\tau, \quad n = \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - d^2}} \quad (4)$$

На пере $-d \leq w \leq d$, являющемся образом крыла, потенциал скорости равен

$$\varphi(w) = \operatorname{Re} \Phi = \pm A \left\{ \sqrt{k^2 - w^2} \cos \psi + \sqrt{1 - d^2} \left[E(n, \psi) - \frac{E(n)}{K(n)} F(n, \psi) \right] \right\}$$

$$\psi = \arcsin \sqrt{\frac{1 - d^2}{1 - w^2}} \quad (5)$$

На перьях $-1 \leq w \leq -k$, $k \leq w \leq 1$, являющихся образом гондол:

$$\varphi^\circ(w) = \varphi^\circ(-w) = \pm A \sqrt{1 - d^2} \left[E(n, \psi^\circ) - \frac{E(n)}{K(n)} F(n, \psi^\circ) \right] \quad (6)$$

$$\psi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{1 - w^2}{1 - k^2}}$$

Здесь и в дальнейшем в формулах (а также в индексах) знак плюс относится к верхней поверхности, а минус — к нижней поверхности, $F(n, \psi)$ и $E(n, \psi)$ — эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода, $F(n) = F(n, 1/2 \pi)$, $E(n) = E(n, 1/2 \pi)$. Скорости в плоскостях t и w связаны зависимостью

$$\frac{d\Phi}{dw} = \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{dw}$$

Для крыла без скольжения $d\Phi/dt = -iV\alpha$ при $t = \infty$

и

$$A = \frac{2V\alpha}{C} \sqrt{1 - a^2}$$

где V и α — скорость и угол атаки невозмущенного потока в пространстве.

При вычислении аэродинамических сил, действующих на рассматриваемую комбинацию, используем зависимость между коэффициентом давления и потенциалом скорости, определяемую линейной теорией

$$\frac{p_- - p_+}{1/2 \rho V^2} = \frac{4}{V} \frac{\partial \varphi_+}{\partial x}$$

и введем специальные функции I для крыла и I° для гондол:

$$I(a, l) = \frac{1}{2V\alpha} \int_0^l \varphi dz, \quad I^\circ(a, l) = \frac{1}{2V\alpha} \int_0^\pi \varphi^\circ \sin \theta d\theta \quad (7)$$

где θ — полярный угол в плоскости $x = \text{const}$ относительно оси z , центр — на оси гондолы.

Значения этих функций приведены в табл. 1 и на фиг. 3 и 4. В табл. 1 приведены также значения постоянных преобразования k и C .

Коэффициенты подъемной силы и продольного момента передней части крыла

Таблица 1

l	I	I°	l	I	I°	l	I	I°
$a=0.11$			$a=0.21$			$a=0.32$		
$k=0.643$		$C=1.623$	$k=0.423$		$C=1.360$	$k=0.259$		$C=1.130$
0	0	0.175	0	0	0.331	0	0	0.509
0.100	0.004	0.175	0.100	0.004	0.333	0.100	0.004	0.513
0.200	0.016	0.177	0.200	0.017	0.339	0.200	0.019	0.523
0.300	0.035	0.181	0.300	0.038	0.349	0.300	0.043	0.542
0.400	0.063	0.190	0.400	0.069	0.364	0.400	0.079	0.570
0.500	0.100	0.201	0.500	0.108	0.386	0.500	0.130	0.618
0.600	0.148	0.219	0.600	0.164	0.418	0.600	0.206	0.698
0.700	0.203	0.247	0.700	0.232	0.493	0.650	0.264	0.773
0.800	0.273	0.302	0.750	0.286	0.569	0.680	0.564	1.180
0.850	0.321	0.357	0.775	0.330	0.623	$a=0, k=1, C=2$		
0.875	0.363	0.419	0.790	0.546	0.925	$\frac{1}{8}\pi l^2$		0
0.890	0.503	0.650	—	—	—			
$a=0.40$			$a=0.50$			$a=0.60$		
$k=0.174$		$C=0.995$	$k=0.093$		$C=0.840$	$k=0.044$		$C=0.695$
0	0	0.650	0	0	0.856	0	0	1.032
0.100	0.005	0.653	0.100	0.005	0.865	0.100	0.006	1.051
0.200	0.022	0.668	0.200	0.025	0.888	0.200	0.029	1.083
0.300	0.049	0.694	0.300	0.059	0.932	0.300	0.077	1.142
0.400	0.092	0.739	0.400	0.118	1.009	0.350	0.114	1.222
0.500	0.160	0.813	0.450	0.165	1.084	0.375	0.149	1.263
0.550	0.208	0.880	0.475	0.219	1.155	0.400	0.456	1.788
0.575	0.249	0.930	0.500	0.520	1.608	—	—	—
0.600	0.555	1.375	—	—	—	—	—	—
$a=0.70$			$a=0.80$			$a=0.90$		
$k=0.017$		$C=0.570$	$k=0.003$		$C=0.440$	$k=0$		$C=0.297$
0	0	1.260	0	0	1.520	0	0	1.845
0.100	0.009	1.278	0.100	0.012	1.545	0.050	0.005	1.863
0.200	0.040	1.335	0.150	0.032	1.593	0.075	0.012	1.886
0.250	0.072	1.398	0.175	0.050	1.640	0.100	0.147	2.390
0.275	0.099	1.450	0.200	0.272	2.185	$a=1, k=0, C=0$		
0.300	0.376	1.995	—	—	—	—	0	2.580

$C_y^{(1)}$ и $m_z^{(1)}$ и носовой части гондолы $C_y^{(3)}$ и $m_z^{(3)}$ определяются по формулам

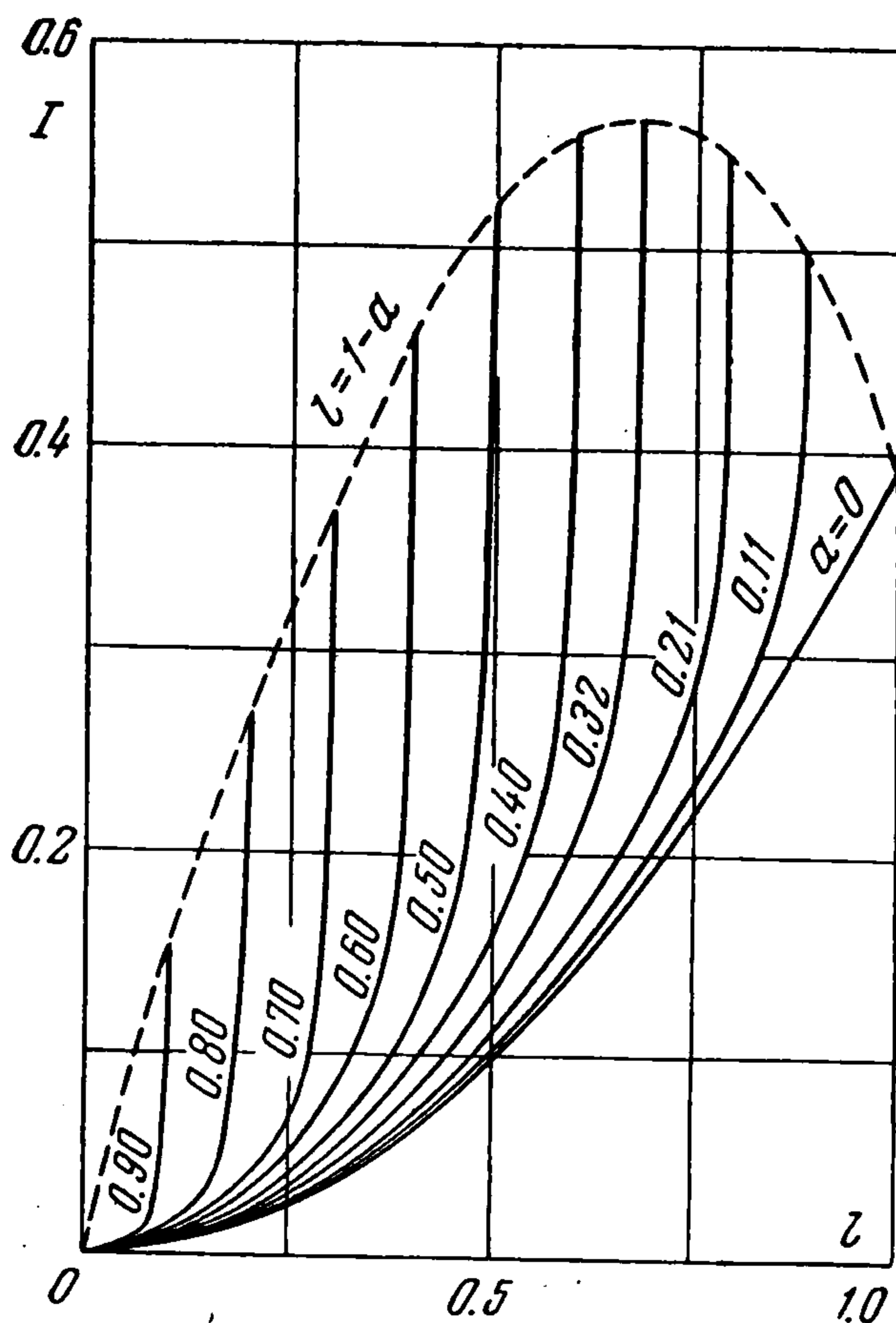
$$C_y^{(1)} = \frac{4b^2}{S} 4\alpha \left[\frac{1}{8} \pi l_0^2 - I(a_0, l_0) + I(a_1, 1 - a_1) \right] \quad (8)$$

$$m_z^{(1)} = \frac{4b^3}{SL} 4\alpha \left\{ x_1 I(a_1, 1 - a_1) - x_0 \left[I(a_0, l_0) - \frac{1}{8} \pi l_0^2 \right] - \int_0^{x_1} I(a, l) dx \right\} \quad (9)$$

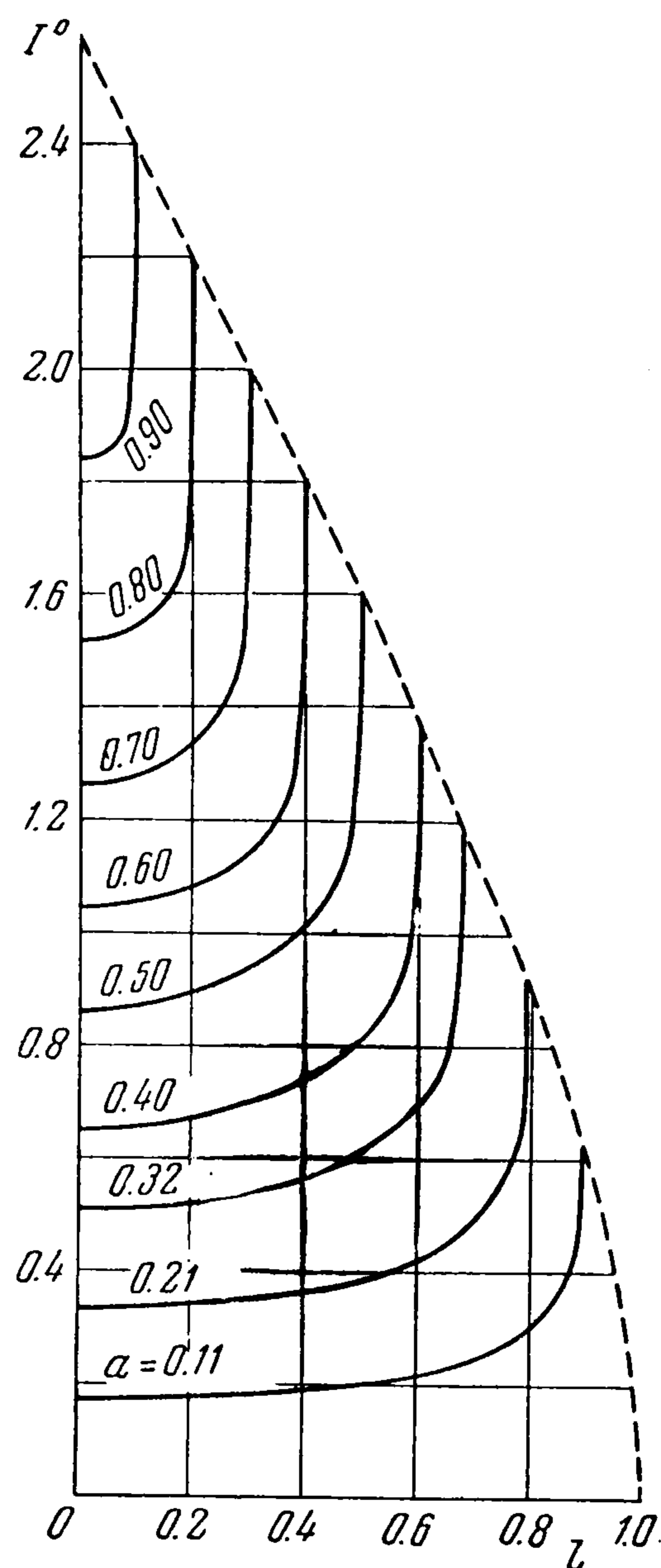
$$C_y^{(3)} = \frac{4b^2}{S} 2\alpha \left[a_1 I^\circ(a_1, 1 - a_1) - a_0 I^\circ(a_0, l_0) - \int_{a_0}^{a_{\max}} I^\circ(a, l) da + \int_{a_1}^{a_{\max}} I^\circ(a, l) da \right] \quad (10)$$

$$m_z^{(3)} = \frac{4b^3}{SL} 2\alpha \left[x_1 a_1 I^\circ(a_1, 1 - a_1) - x_0 a_0 I^\circ(a_0, l_0) - \int_{x_0}^{x(a_{\max})} \left(a + x \frac{da}{dx} \right) I^\circ(a, l) dx - \int_{x(a_{\max})}^{x_1} \left(a + x \frac{da}{dx} \right) I^\circ(a, l) dx \right] \quad (11)$$

Здесь $2b$ — расстояние между осями гондол, L и S — характерные длина и площадь, одинаковые для крыла и гондол, $4b^2/S$ — удлинение комбинации крыла с гондолами, x_0 — координата входных отверстий гондол, $a_0 = a(x_0)$, $l_0 = l(x_0)$, x_1 — относительная длина передней части крыла, $a_1 = a(x_1)$, a_{\max} — относительный максимальный радиус носовой части гондол.



Фиг. 3



Фиг. 4

В формулах (10) и (11) в первых интегралах $l(x)$ и $a(x)$ [или $l(a)$] — уравнение передней кромки крыла и образующей гондол до максимального миделя носовой части, а во вторых интегралах — за максимальным миделем.

В случае остроносых гондол $a_0 = 0$, $I^\circ(0, l_0) = 0$, $I(0, l_0) = 1/8 \pi l_0^2$. В случае гондол с протоком ($a_0 \neq 0$) не учитываются силы, действующие со стороны их внутренней проточной части. Когда $a = 0$, формулы (8) и (9) переходят в известные выражения для аэродинамических коэффициентов крыла малого удлинения, определяемые теорией тонкого тела.

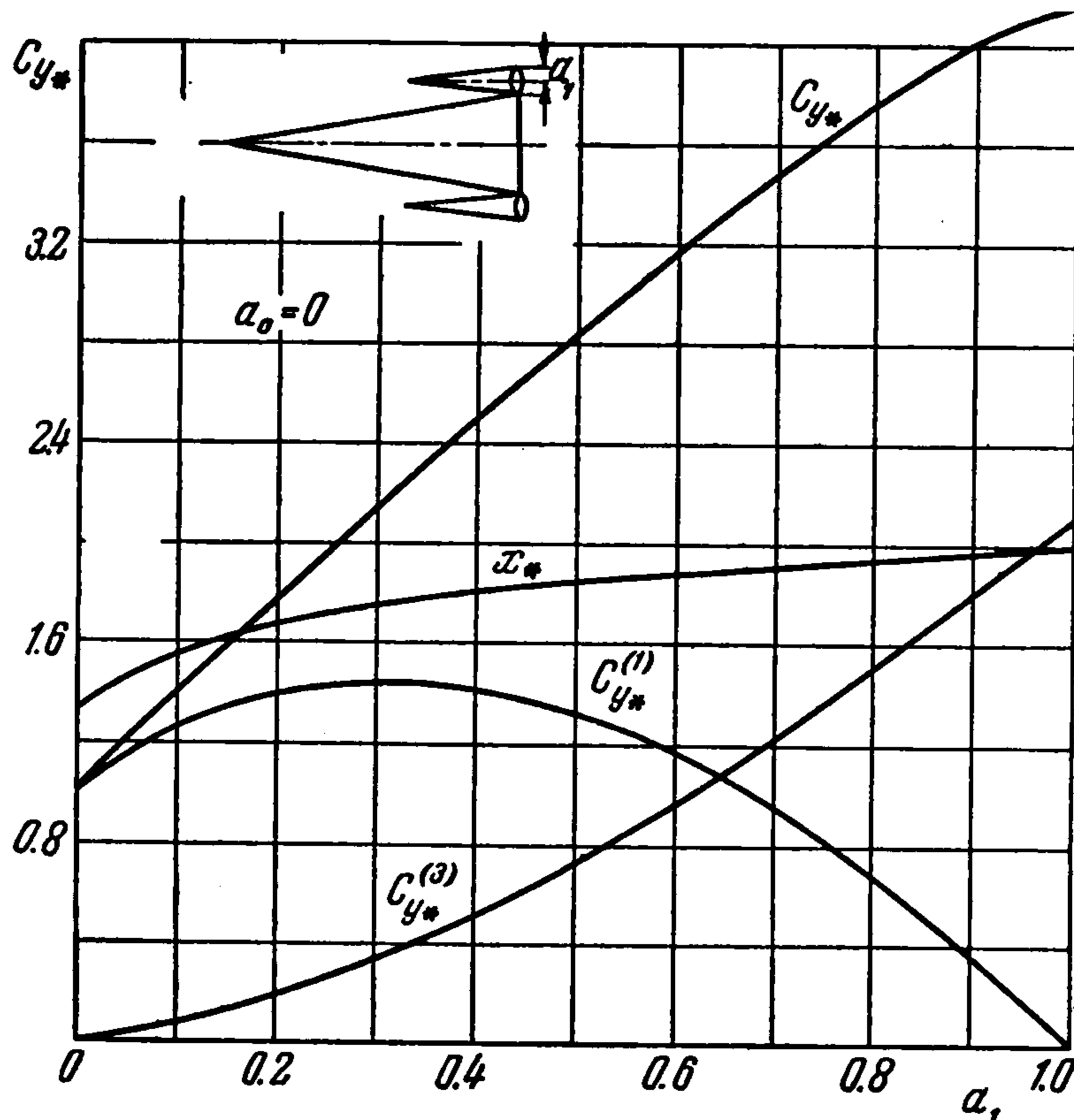
Для центральной части рассматриваемой комбинации $l = 1 - a$, и аэродинамические коэффициенты ее определяются по формулам

$$C_y^{(2)} + 2C_y^{(4)} = \frac{4b^2}{S} 4\alpha \left\{ I(a_2, 1 - a_2) + a_2 I^\circ(a_2, 1 - a_2) - \right. \\ \left. - I(a_1, 1 - a_1) - a_1 I^\circ(a_1, 1 - a_1) + \int_{a_1}^{a_2} [G(a) - I^\circ(a, 1 - a)] da \right\} \quad (12)$$

$$m_z^{(2)} + 2m_z^{(4)} = \frac{4b^3}{SL} 4\alpha \left\{ x_2 [I(a_2, 1 - a_2) + a_2 I^\circ(a_2, 1 - a_2)] - \right. \\ \left. - x_1 [I(a_1, 1 - a_1) + a_1 I^\circ(a_1, 1 - a_1)] - \int_{x_1}^{x_2} \left[I(a, 1 - a) - x G(a) \frac{da}{dx} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(a + x \frac{da}{dx} \right) I^\circ(a, 1 - a) \right] dx \right\} \quad (13)$$

$$G(a) = \frac{1}{kC} \sqrt{(1 - a^2)(1 - k^2)}$$

Здесь $C_y^{(2)}$ и $m_z^{(2)}$ — аэродинамические коэффициенты центральной части крыла, $C_y^{(4)}$ и $m_z^{(4)}$ — центральной части гондолы, x_2 — координата основания гондол, $a_2 =$



Фиг. 5

отношение коэффициентов подъемной силы крыла с гондолами и изолированного крыла, $C_{y*}^{(1)}$, $C_{y*}^{(3)}$ — относительные коэффициенты подъемной силы отдельных частей комбинации (крыла в присутствии гондол и гондолы в присутствии крыла), x_* — координата центра давления передней части треугольного крыла с гондолами на концах, отнесенная к его длине x_1 :

$$C_{y*} = \frac{C_y^{(1)} + 2C_y^{(3)}}{1/2 \pi \lambda \alpha}, \quad C_{y*}^{(1)} = \frac{C_y^{(1)}}{1/2 \pi \lambda \alpha} \\ C_{y*}^{(3)} = \frac{C_y^{(3)}}{1/2 \pi \lambda \alpha}, \quad x_* = \frac{m_z^{(1)} + 2m_z^{(3)}}{C_y^{(1)} + 2C_y^{(3)}} \frac{L}{x_1}$$

В случае остроносых расширяющихся гондол аэродинамические характеристики передней части комбинации C_y и m_z определяются в основном относительным радиусом гондол в месте стыка их с крылом a_1 . Влияние формы крыла и носовой части

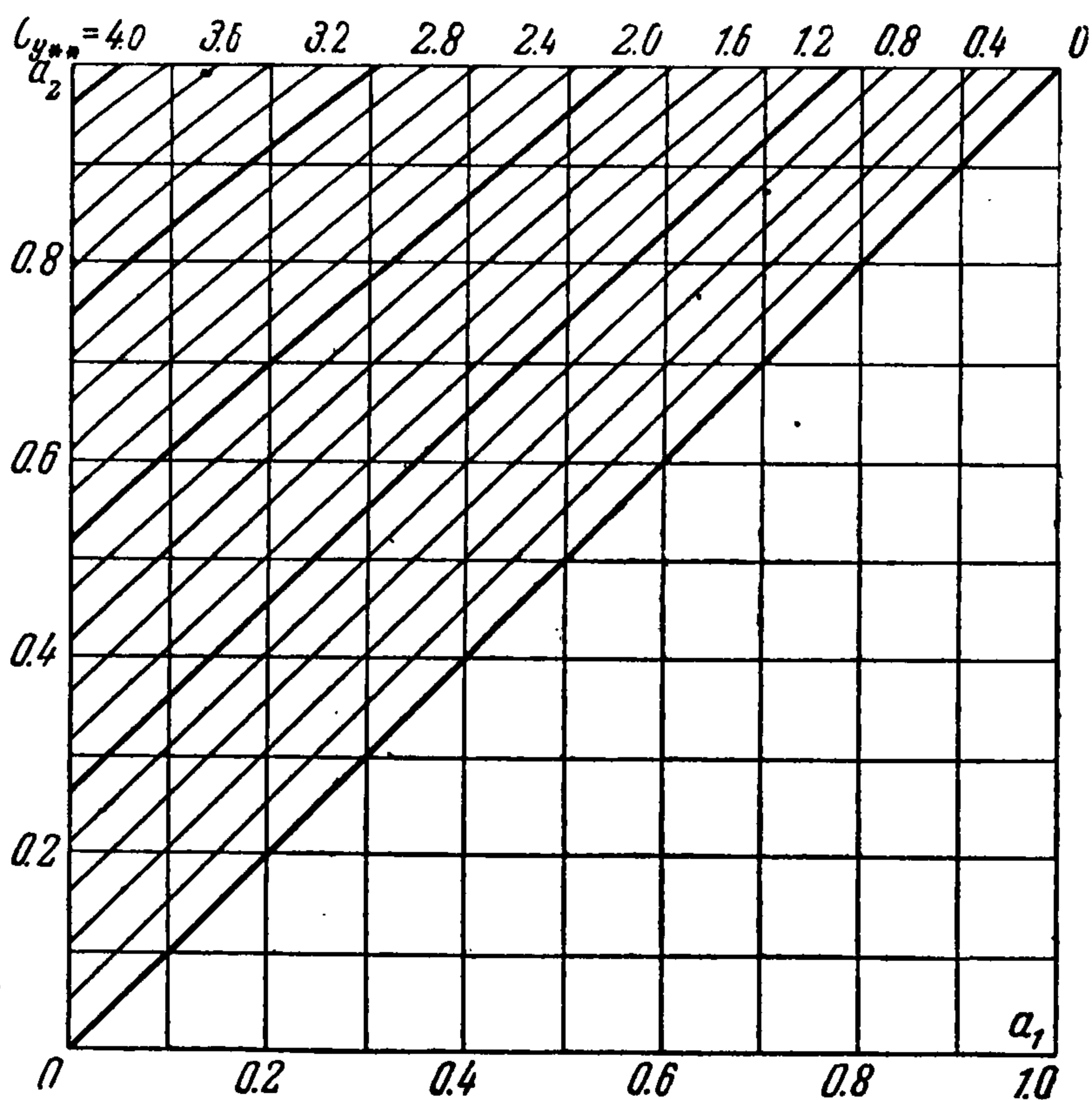
$= a(x_2)$. Аэродинамические коэффициенты всей комбинации получаются путем суммирования соответствующих коэффициентов ее частей.

Анализ полученных результатов показывает, что:

1. Наличие на концах крыла гондол обычно приводит к увеличению подъемной силы комбинации по сравнению с изолированным крылом с таким же удлинением $\lambda = 4b^2/S$. (Здесь S — площадь изолированного крыла, b — его полуразмах).

В качестве примера на фиг. 5 приведены аэродинамические характеристики передней части комбинации крыла с остроносими расширяющимися гондолами на концах ($a_0 = 0$, $da/dx \geq 0$); C_{y*} —

гондол на величину коэффициента подъемной силы не превосходит 5%. В случае гондол с протоком ($a_0 \neq 0$) форма их оказывает большее влияние на подъемную силу комбинации, которая уменьшается с ростом отношения a_0/a_1 . Однако еще в случае цилиндрических гондол при $a \leq 0.6$ имеется заметное увеличение подъемной силы



Фиг. 6

комбинации по сравнению с изолированным крылом. Положение центра давления и в случае гондол с протоком в слабой степени зависит от их формы и определяется в основном величиной a_1 .

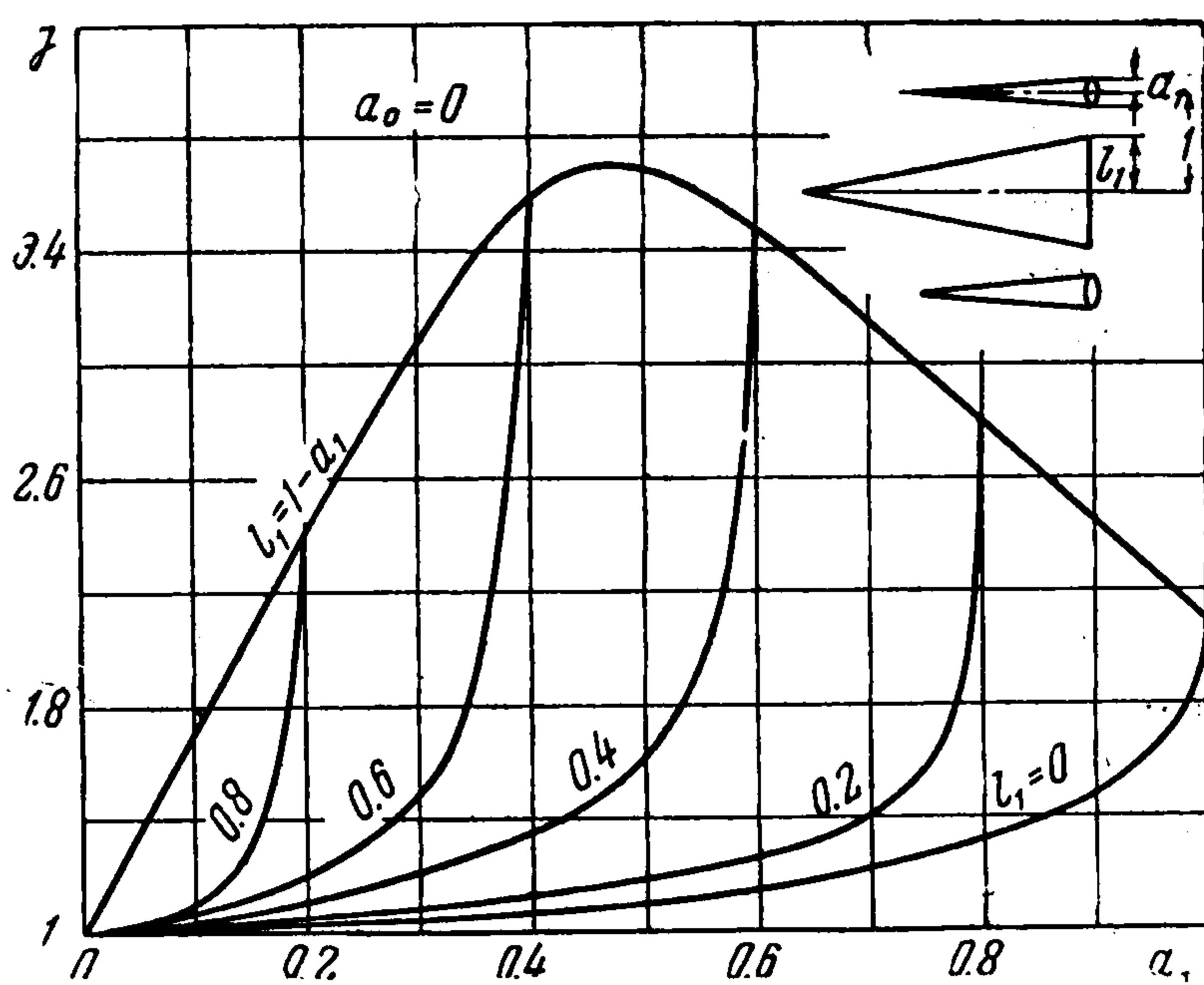
2. Подъемная сила центральной части крыла с гондолами не зависит от их формы и определяется только величиной относительных радиусов в ее начале a_1 и конце a_2 . Подъемная сила центральной части положительна, когда $a_2 > a_1$, отрицательна, когда $a_2 < a_1$, и равна нулю, когда $a_2 = a_1$. На фиг. 6 приведено отношение коэффициентов подъемной силы центральной части комбинации и изолированного крыла с удлинением $\lambda = 4b^2/S$:

$$C_{y_{**}} = \frac{C_y^{(2)} + 2C_y^{(4)}}{1/2 \pi \lambda \alpha}$$

$$(C_{y_{**}}(a_1, a_2) = -C_{y_{**}}(a_2, a_1))$$

Форма центральной части оказывает непосредственное влияние на положение центра давления. Расширение ее $a_2 > a_1$ и увеличение длины смещает центр давления к задней кромке, сужение $a_2 < a_1$ и уменьшение длины смещает центр давления вперед.

3. Распределение нагрузки на крыле и гондолах dC_y/dx показывает, что взаимодействие их увеличивается с приближением к центральной части, в окрестности которой нагрузка на крыле резко возрастает по сравнению с изолированным крылом такой же формы.

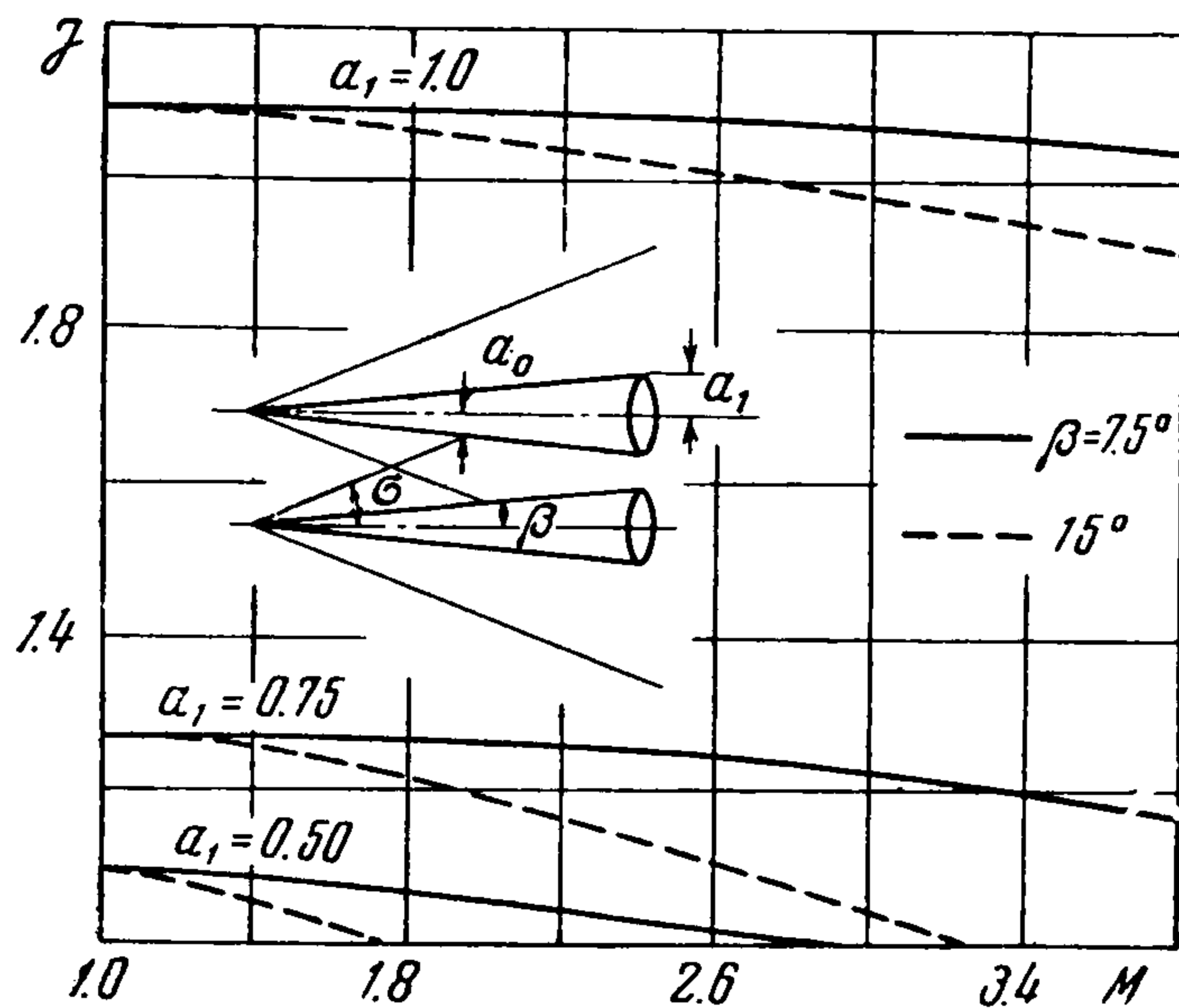


Фиг. 7

4. На фиг. 7 приведено отношение подъемной силы комбинации крыла с остроносими расширяющимися гондолами в общем случае наличия расстояния между их основанием и крылом ($l_1 \leq 1 - a_1$) к сумме подъемных сил тех же гондол и крыла, работающих изолированно:

$$J = \frac{[C_y^{(1)} + 2C_y^{(3)}] S}{2\pi\alpha (l_1^2 + 2a_1^2)}$$

Из фиг. 7 следует, что взаимодействие крыла с гондолами приводит к увеличению несущих свойств их поверхностей по сравнению с изолированными телами. Когда



Фиг. 8

расстояние между ними стремится к нулю: $l_1 \rightarrow 1 - a_1$, взаимодействие резко возрастает. Случай $l = 0$ соответствует двум телам вращения без крыла, подъемная сила которых не зависит от их формы и определяется только относительным радиусом оснований a_1 .

5. При сверхзвуковых скоростях полета теория тонкого тела приложима к комбинациям, расположенным внутри области возмущения, отходящей от их передней точки. Если отдельные элементы комбинации расположены вне области, возмущенной соседними телами, аэродинамические силы у них такие же, как и у изолированных тел. Учитывая это замечание, отношение подъемных сил

двух взаимодействующих остроносых тел вращения, оси которых параллельны, а носы расположены в плоскости, перпендикулярной осям, к подъемной силе двух изолированных тел равно

$$J = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2 + \frac{4}{\pi a_1^2} \left\{ a_1 I^\circ(a_1, O) - a_0 I^\circ(a_0, Q) - \int_{a_0}^{a_1} I^\circ(a, O) da \right\}$$

где a_0 — относительный радиус тел в сечении, с которого начинается их взаимодействие. На фиг. 8 показано это отношение для двух конусов с углами полураствора β в зависимости от числа M набегающего потока. Угол скачка при вершине конуса с его осью σ принимался таким же, как при осесимметричном обтекании, деформацией скачка в области, возмущенной соседним конусом, пренебрегалось. Конуса не взаимодействуют, когда

$$\sigma \leq \arctg \left(\frac{2}{a_1} - 1 \right) \operatorname{tg} \beta$$

Когда основания конусов соприкасаются $a_1 = 1.0$, они взаимодействуют при любом M .

Аналогично могут быть определены аэродинамические характеристики комбинации крыла с гондолами, отдельные элементы которой не взаимодействуют.

Поступила 3 VIII 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Ward G. Supersonic Flow past Slender Pointed Bodies. Quarterly of Mechanics and Applied Mathematics., No 1, 1949.
2. Голубев В. В. Теория крыла аэроплана в плоско-параллельном потоке. ГОНТИ НКТП СССР, 1938.