в конечном виде:

$$K = \frac{E_0}{2}[1 - B(1-\overline{y}_0)]\{[(1-\overline{y}_0)^3 + (\overline{y}_0 - \overline{y}_s)^3] + \overline{E}_0[(1+\overline{y}_0)^3 - (\overline{y}_0 - \overline{y}_s)^3]\} +$$
$$+ \frac{3BE_0}{8}\{[(1-\overline{y}_0)^4 - (\overline{y}_0 - \overline{y}_s)^4] - \overline{E}_0[(1+\overline{y}_0)^4 - (\overline{y}_0 - \overline{y}_s)^4]\} \tag{25}$$

$$\sigma_N = E_0\left[(1-B)\varepsilon^\circ + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}B\right)\alpha t\right] - \tag{26}$$
$$-(E_0 - E_0')\left[\frac{B\alpha t}{8}\overline{y}_s + \frac{\alpha t}{4}\left(\frac{1}{2} - B\right)(1+\overline{y}_s)^2 + \frac{B\alpha t}{24}(1+\overline{y}_s)^3\right]$$

где $\overline{y}_0$ определяется из уравнения

$$1 + \overline{E}_0 + (1-\overline{E}_0)[H(1-\overline{y}_s^2) - \overline{y}_s^3] - \{2H[1 - \overline{y}_s + \overline{E}_0(1+\overline{y}_s)] +$$
$$+ \frac{3}{2}(1-\overline{E}_0)(1-\overline{y}_s^2)\}\overline{y}_0 = 0 \tag{27}$$

Здесь

$$\overline{E}_0 = E_0'/E_0, \qquad H = 3(1-B)/2B$$

При $\overline{y}_0 \leqslant \overline{y}_s$ пластическая область совпадает с областью догружения, поэтому в уравнении (27) следует положить $\overline{y}_s = \overline{y}_0$. В этом случае имеем уравнение третьей степени относительно $\overline{y}_0$

$$1 + \overline{E}_0 - \frac{1}{2}(1-\overline{E}_0)(3\overline{y}_0 - \overline{y}_0^3) + H[(1-\overline{E}_0)(1+\overline{y}_0^2) - 2(1+\overline{E}_0)\overline{y}_0] = 0 \tag{28}$$

Полагая в уравнениях (25)—(28) $E_0' = \overline{E}_0 = 0$, получим решение поставленной задачи для материала с площадкой текучести.

На фиг. 1 и 2 приведены результаты вычисления границы устойчивости соответственно для материала с линейным упрочнением при значениях $E_0 = 1.75\cdot 10^6$ *кг/см²*, $E_0' = 0.111\cdot 10^6$ *кг/см²*, $\varepsilon_s = 0.0040$, $dE/dT = 10^3$ *кг/см²град*, $\alpha = 16\cdot 10^{-6}$ и для идеально пластического материала при тех же значениях E_0, ε_s, dE/dT и α.

Влияние нагрева особенно значительно в области малых упруго-пластических деформаций при средних значениях гибкости стержня.

Поступила 5 XI 1957

ДАВЛЕНИЕ КРУГЛОГО ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, МОДУЛЬ УПРУГОСТИ КОТОРОГО ЯВЛЯЕТСЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ГЛУБИНЫ

В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

В статье Б. Г. Коренева [1] сформулирована задача о штампе, лежащем на основании, модуль упругости которого изменяется с глубиной по степенному закону. Для осесимметричного случая, как показано в [1], давления и осадки на поверхности полупространства можно представить в виде

$$p_0(\rho) = \int_0^\infty f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta, \qquad W_0(\rho) = A_m \int_0^\infty \beta^\alpha f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta \tag{0.1}$$

где J_0 — функция Бесселя, m — показатель степени в выражении для упругого ядра $(1 > m > 0)$,

$$A_m = \frac{2^{1-m}\Gamma^1/_2(1-m)}{E_m\Gamma^1/_2(1+m)}, \qquad \alpha = m - 1$$

При $m = 0$ получается обычное однородное полупространство, и в этом случае $E_0 = E/(1-\mu^2)$.

Ниже приводится более удобное для конкретных расчетов решение задачи и исправляются некоторые неточности в работе [1].

1. Пусть радиус штампа равен единице, чего всегда можно добиться введением безразмерной координаты. Тогда задача об определении давления под штампом сводится к решению «парного» интегрального уравнения

$$\int_0^\infty \beta^\alpha f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta = g_0(\rho) \qquad \left(g_0(\rho) = \frac{W_0(\rho)}{A_m},\ 0<\rho<1\right) \tag{1.1}$$

$$\int_0^\infty f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta = 0 \qquad (1<\rho<\infty)$$

Для штампа, поверхность которого после вдавливания определяется уравнением

$$z = w_n(\rho)\cos n\varphi \tag{1.2}$$

где φ — полярный угол, давление можно определить по формуле

$$p(\rho, \varphi) = p_n(\rho)\cos n\varphi \tag{1.3}$$

причем остаются в силе формулы (1.1) и (1.2) и парное интегральное уравнение (1.1), только вместо индекса 0 нужно всюду в соответствующих местах вставить индекс n,

2. Имеем «парное» интегральное уравнение

$$\int_0^\infty \beta^\alpha f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta = g_n(\rho) \quad (0<\rho<1), \qquad \int_0^\infty f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta = 0 \quad (1<\rho<\infty) \tag{2.1}$$

Воспользуемся известными в теории функцией Бесселя соотношениями

$$J_0(\beta\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s + 1/2 n)} \rho^{s-1}\beta^{s-1} ds \tag{2.2}$$

$$\beta^\alpha J_0(\beta\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{-s+\alpha}\Gamma(1/2 - 1/2 s + 1/2\alpha + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s + 1/2\alpha + 1/2 n)} \beta^{s-1}\rho^{s-\alpha-1} ds$$

Введем обозначения

$$\int_0^\infty f(\beta)\beta^{s-1} d\beta = F(s)$$

Тогда из (2.1) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \frac{2^{\alpha-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s + 1/2\alpha + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s - 1/2\alpha + 1/2 n)} \rho^{s-\alpha-1} ds = g(\rho) \qquad (0<\rho<1)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \frac{2^{-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s + 1/2 n)}{\Gamma(1/2 + 1/2 s + 1/2 n)} \rho^{s-1} ds = 0 \qquad (1<\rho<\infty) \tag{2.3}$$

Использовав формулы

$$\int_0^z \rho^{2\gamma-1}(z^2-\rho^2)^{\delta-1} d\rho = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta)} z^{2\gamma+2\delta-2}$$

$$\int_0^z \rho^{-2\gamma-2\delta+1}(\rho^2-z^2)^{\delta-1} d\rho = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma+\delta)} z^{-2\gamma} \tag{2.4}$$

из (2.3) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \frac{2^{\alpha-s}\Gamma(1/2 - 1/2 s + 1/2\alpha + 1/2 n)\Gamma(1/2\alpha + 1)}{(\Gamma(1/2 + 1/2 s + 1/2 n))} x^s ds = An(x) \tag{2.5}$$

где

$$An(x) = x^{-n}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x g_n(\rho)\rho^{n+1}(x^2-\rho^2)^{1/2\alpha}d\rho \qquad (0<x<1) \tag{2.6}$$

$$An(x) = 0 \qquad (1<x<\infty)$$

Применив к (2.5) вторую формулу (2.4), найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{2^{\alpha-s-1}\Gamma(1/2+1/2n-1/2s)\Gamma(1/2\alpha+1)^2}{\Gamma(1/2+1/2s+1/2n)}r^{s-n+1}ds =$$

$$= \int\limits_r^\infty An(x)\,x^{-\alpha-n}(x^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}dx$$

Использовав формулу

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}s\right) = \frac{1}{2}(-1+n-s)\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}s\right) \tag{2.7}$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{2^{\alpha-s}\Gamma(1/2+1/2n-1/2s)\Gamma(1/2\alpha+1)^2}{\Gamma(1/2+1/2s+1/2n)}r^{s-n}ds =$$

$$= -\frac{d}{dr}\int\limits_r^\infty A^n(x)\,x^{-\alpha-n}(x^2-r^2)^{1/2\alpha}dx \tag{2.8}$$

Окончательно формулу для $P_n(r)$ получим в виде

$$P_n(r) = -\frac{2^{-\alpha}}{\Gamma(1/2\alpha+1)^2}r^{n-1}\frac{d}{dr}\int\limits_r^a\frac{x^{-\alpha-2n}dx}{(x^2-r^2)^{-1/2\alpha}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{g_n(\rho)\rho^{n+1}d\rho}{(x^2-\rho^2)^{-1/2\alpha}} \tag{2.9}$$

3. В виде примера рассмотрим давление плоского круглого в плане штампа на упругое полупространство. Пусть на штамп давит вдоль его оси сила P, осадка штампа в этом случае — постоянная W_0. Формула (2.9) примет вид

$$P_0(r) = -\frac{g_0 2^{-\alpha}}{\Gamma(1/2\alpha+1)^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^a\frac{(x^2-r^2)^{1/2\alpha}dx}{x^\alpha}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\rho(x^2-\rho^2)^{1/2\alpha}d\rho$$

На основании (2.4)

$$\int\limits_0^x\rho(x^2-\rho^2)^{1/2\alpha}d\rho = \frac{1}{\alpha+2}x^{\alpha+2}$$

Тогда

$$P_0(r) = -\frac{g_0 2^{-\alpha}}{\Gamma(1/2\alpha+1)^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^a x(x^2-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}dx$$

Отсюда

$$P_0(r) = \frac{g_0 2^{-\alpha}}{\Gamma(1/2\alpha+1)^2}(a^2-r^2)^{1/2\alpha}$$

Или окончательно

$$P_0(r) = \frac{W_0E_m}{\Gamma(1/2(1-m))\Gamma(1/2(1+m))}(a^2-r^2)^{1/2(m-1)}$$

Формула для давления под подошвой плоского круглого в плане штампа, предложенная Б. Г. Кореневым [1], неверна.

Поступила 17 VI 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев Б. Г. Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ДАН СССР, т. CXII, № 5, 1957.

2. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство. Институт машиноведения и автоматики АН СССР. Научные записки, т. II, вып. 1, 1953.