

## ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО НАГРЕВА НА УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Л. А. Шаповалов

(Москва)

Рассматривается устойчивость при малых упруго-пластических деформациях заземленного сжатого стержня прямоугольного сечения в условиях неравномерного нагрева при произвольной диаграмме сжатия материала. Температурное поле  $T(x, y, z)$  предполагается постоянным по длине стержня и линейно изменяющимся по высоте сечения в направлении выпучивания. Для принятых граничных условий неравномерный нагрев не вызывает искривлений оси стержня. Задача приводится к нахождению критической силы для однородного дифференциального уравнения.

Для идеально пластического материала и для материала с линейным упрочнением результаты представлены в замкнутом виде. Постановка данной задачи принадлежит Л. И. Балабуху.

Пусть заземленный стержень постоянного прямоугольного сечения неравномерно нагрет установившимся температурным полем

$$T(x, y, z) = \frac{t_2 + t_1}{2} - \frac{t_2 - t_1}{h} y, \quad t_2 > t_1 \quad (1)$$

и нагружен сжимающей силой. Здесь ось  $x$  совпадает с осью стержня,  $y$  и  $z$  — главные центральные оси сечения,  $t_1$  и  $t_2$  — температуры в крайних волокнах, отсчитанные от некоторой начальной температуры  $T_0$ ,  $h$  — высота сечения.

Пусть общее укорочение стержня  $u$ . Сжимающие напряжения, вызывающие это укорочение, будут

$$\sigma = \sigma \left( \frac{u}{l} + \alpha T \right) \quad (2)$$

где  $l$  — длина стержня. Введем обозначения

$$\frac{u}{l} = \varepsilon^0, \quad \frac{u}{l} + \alpha T = \varepsilon \quad (3)$$

Коэффициент линейного расширения  $\alpha$  принимается не зависящим от температуры. Диаграмма сжатия материала для начальной температуры предполагается произвольной.

Для упрощения решения поставленной задачи принимаем следующую простую зависимость диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  от температуры  $T$ :

$$\frac{\sigma(\varepsilon, T)}{\sigma_0(\varepsilon, T_0)} = 1 - \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dT} (T - T_0) \quad (4)$$

Эта зависимость с достаточной точностью аппроксимирует диаграммы сжатия для таких материалов, как высокопрочные стали и алюминиевые сплавы.

Рассмотрим малые отклонения  $f(x)$  оси стержня от прямолинейной формы. Бесконечно малые приращения напряжений изгиба в зонах догрузки и разгрузки будут

$$\delta\sigma = \begin{cases} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \delta\varepsilon = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (y - y_0) \kappa, & \delta\varepsilon > 0 \\ E\delta\varepsilon = E (y - y_0) \kappa, & \delta\varepsilon < 0 \end{cases} \quad (5)$$

где  $\kappa = -f''(x)$  — кривизна упругой линии стержня,  $y_0$  — координата, определяющая положение нейтральной линии сечения.

Считая, что выпучивание стержня происходит при постоянном значении осевого усилия, получим

$$J_1(\varepsilon^0, \bar{y}_0) + \bar{J}_2(\varepsilon^0, \bar{y}_0) = 0 \quad \left( J_1 = \int_{y_1}^0 \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (y - y_0) dy, \quad J_2 = \int_0^{y_2} E (y - y_0) dy \right) \quad (6)$$

Здесь

$$y_1 = -\left(\frac{1}{2}h + y_0\right), \quad y_2 = \left(\frac{1}{2}h - y_0\right), \quad \bar{y}_0 = 2 \frac{y_0}{h}$$

Условие (6) вместе с соотношениями (1) — (4) позволяет определить положение нейтральной линии для произвольной диаграммы  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ .

Определяя деформацию  $\varepsilon$  в функции координаты  $y$  согласно (1) и (2) и производя замену переменных

$$y = \frac{h}{\alpha(t_2 - t_1)} \left[ -\varepsilon + \varepsilon^\circ + \frac{\alpha(t_2 + t_1)}{2} \right], \quad T = \frac{1}{\alpha}(\varepsilon - \varepsilon^\circ) \quad (7)$$

в выражении  $J_1(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0)$ , получим

$$J_1 = \left[ \frac{h}{\alpha(t_2 - t_1)} \right]^2 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\sigma_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha E_0} \frac{dE}{dT} (\varepsilon - \varepsilon^\circ - \alpha T_0) \right] (\varepsilon - \varepsilon_2) d\varepsilon \quad (8)$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^\circ + \alpha t_2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^\circ + \frac{\alpha}{2} [(t_2 + t_1) - (t_2 - t_1) \bar{y}_0]$$

Интеграл  $J_2(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0)$ , имея в виду (3), берется в квадратурах

$$J_2 = \frac{h^2}{8} \left\{ 1 + \frac{T_0}{E_0} \frac{dE}{dT} - \frac{1}{2E_0} \frac{dE}{dT} [(t_2 + t_1) - (t_2 - t_1) \bar{y}_0] \right\} (1 - \bar{y}_0)^2 + \\ + \frac{h^2}{24 E_0} \frac{dE}{dT} (t_2 - t_1) (1 - \bar{y}_0)^3 \quad (9)$$

Решение уравнения

$$J_1(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0) + J_2(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0) = \Phi_1(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0) = 0$$

относительно  $\bar{y}_0$  при различных значениях параметра  $\varepsilon^\circ$  в общем случае диаграммы  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$  может быть получено численными способами.

Вариация изгибающего момента при выпучивании стержня

$$\delta M = - \iint \delta \sigma y dy dz = - \kappa \left[ b \int_{y_1}^0 \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (y - y_0)^2 dy + b \int_0^{y_2} E (y - y_0)^2 dy \right] = - K J \kappa \quad (10)$$

где  $K$  — приведенный модуль, аналогичный по содержанию модулю Энгессера-Кармана,  $b$  — ширина сечения прямоугольника.

Отсюда

$$K = J_3(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0) + J_4(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0) = \Phi_2(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0) \quad (11)$$

Здесь

$$J_3 = \frac{12}{h^3} \int_{y_1}^0 \frac{d\sigma}{d\varepsilon} (y - y_0)^2 dy, \quad J_4 = \frac{12}{h^3} \int_0^{y_2} E (y - y_0)^2 dy$$

Выполнив замену переменных согласно (17), получим

$$J_3 = - \frac{12}{\alpha^3 (t_2 - t_1)^3} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{d\sigma_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha E_0} \frac{dE}{dT} (\varepsilon - \varepsilon^\circ - \alpha T_0) \right] (\varepsilon - \varepsilon_2)^2 d\varepsilon \quad (12)$$

$J_4(\varepsilon^\circ, \bar{y}_0)$  найдем непосредственным интегрированием:

$$J_4 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{T_0}{E_0} \frac{dE}{dT} - \frac{1}{2E_0} \frac{dE}{dT} [(t_2 + t_1) - (t_2 - t_1) \bar{y}_0] \right\} (1 - \bar{y}_0)^3 + \\ + \frac{3}{16 E_0} \frac{dE}{dT} (t_2 - t_1) (1 - \bar{y}_0)^4 \quad (13)$$

Сжимающее усилие  $N$  в стержне и соответствующее ему среднее напряжение  $\sigma_N$ :

$$N = \iint \sigma(\varepsilon) dy dz, \quad \sigma_N = \frac{1}{h} \int_{-1/2 h}^{+1/2 h} \sigma(\varepsilon) dy \quad (14)$$

ИЛИ

$$\sigma_N(\varepsilon^0) = \frac{1}{\alpha(t_2 - t_1)} \left[ 1 + \frac{1}{\alpha E_0} \frac{dE}{dT} (\varepsilon^0 + \alpha T_0) \right] \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_1} \sigma_0(\varepsilon) d\varepsilon -$$

$$- \frac{1}{\alpha^2(t_2 - t_1) E_0} \frac{dE}{dT} \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_1} \sigma_0(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \quad (\varepsilon_3 = \varepsilon^0 + \alpha t_1) \quad (15)$$

Критическое значение сжимающей силы<sup>1</sup>

$$N_k = KJ \int_0^l f''^2 dx / \int_0^l f'^2 dx \quad (16)$$

При рассматриваемых граничных условиях

$$f(x) = f_0 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \quad (17)$$

Критическая гибкость

$$\lambda(\varepsilon^0) = 2\pi \sqrt{\frac{K(\varepsilon^0)}{\sigma_N(\varepsilon^0)}} \quad (18)$$

Исключая  $\varepsilon^0$  из (16) и (18), найдем границу устойчивости в форме

$$\sigma_k = \Phi(\lambda) \quad (19)$$

Здесь  $\sigma_k$  — критическое значение среднего сжимающего напряжения стержня. Рассмотрим далее частный случай  $t_1 = T_0 = 0$ ,  $t_2 = t$ . Выделяя в выражении  $\sigma_0(\varepsilon)$  упругую часть, представим диаграмму сжатия материала при начальной температуре в виде

$$\sigma_0(\varepsilon) = E_0 \varepsilon - \varphi_0(\varepsilon), \quad \text{причем} \quad \begin{cases} \varphi_0 = 0 & (\varepsilon \leq \varepsilon_p) \\ \varphi_0 = \varphi_0(\varepsilon) & (\varepsilon \geq \varepsilon_p) \end{cases} \quad (20)$$

где  $\varepsilon_p$  — деформация, соответствующая пределу упругости.Уравнения (6), (11) и (15) при этом упрощаются. Произведя выкладки, получим уравнение для определения координаты  $y_0$ :

$$\frac{E_0}{6} [B - 3(1 - B)\bar{y}_0] - \frac{(2B - 1)}{2\alpha t} (1 + \bar{y}_0) \varphi_0(\varepsilon_1) = 2C_1 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi_0(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon - C_2 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon \quad (21)$$

Здесь

$$C_1 = \frac{1}{(\alpha t)^2} A, \quad A = \frac{1}{\alpha E_0} \frac{dE}{dT}$$

$$C_2 = \frac{1}{(\alpha t)^2} [1 + 2A\varepsilon^0 + B(1 - \bar{y}_0)], \quad B = \frac{t}{2E_0} \frac{dE}{dT}$$

Выражение для приведенного модуля и среднего сжимающего напряжения<sup>2</sup>

$$K = E_0 [1 - B(1 + 2\bar{y}_0) + 3(1 - B)\bar{y}_0^2] - \frac{3(1 - 2B)}{\alpha t} (1 + \bar{y}_0)^2 \varphi_0(\varepsilon_1) +$$

$$+ 3D_1 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi_0(\varepsilon) \varepsilon^2 d\varepsilon - 2D_2 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi_0(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + D_3 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon \quad (22)$$

$$\sigma_N = E_0 \left[ (1 - B)\varepsilon^0 + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} B \right) \alpha t \right] - \frac{1}{\alpha t} (1 + A\varepsilon^0) \int_{\varepsilon^0}^{\varepsilon_1} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{A}{\alpha t} \int_{\varepsilon^0}^{\varepsilon_1} \varphi_0(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \quad (23)$$

<sup>1</sup> Приведенный модуль  $K$  определяется по минимальному его значению, соответствующему выпучиванию стержня в сторону менее нагретого волокна.

<sup>2</sup> Численное определение приведенного модуля следует вести с большой точностью, так как последние четыре слагаемых формулы (22) близки по абсолютной величине.

Коэффициенты  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  вычисляются по формулам

$$D_1 = \frac{12}{(\alpha t)^3} A$$

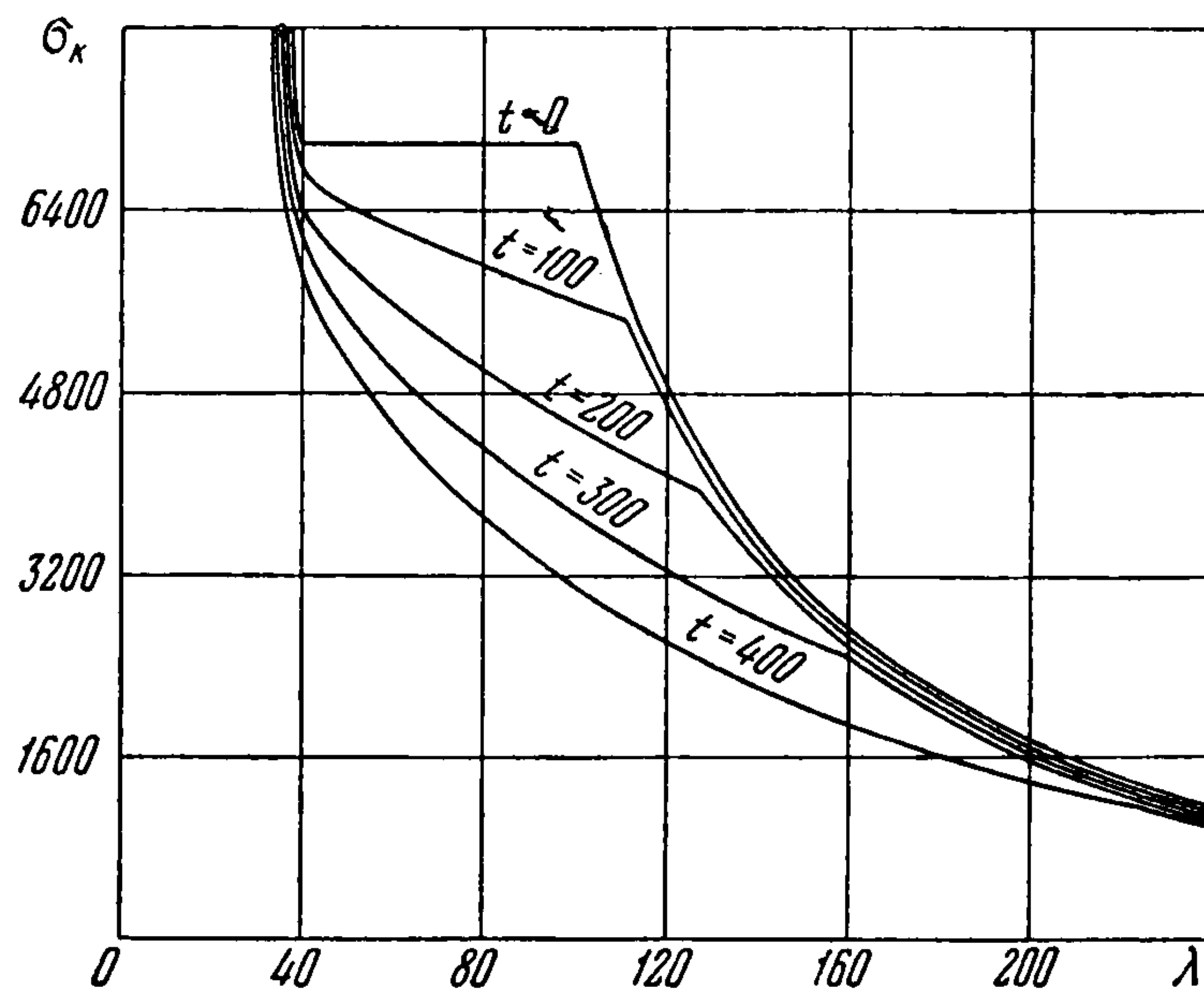
$$D_2 = \frac{12}{(\alpha t)^3} [1 + 3 A \varepsilon^\circ + 2 B (1 - \bar{y}_0)]$$

$$D_3 = \frac{12}{(\alpha t)^3} \left[ 3A (\varepsilon^\circ)^2 + 2\varepsilon^\circ + (\alpha t + 4B\varepsilon^\circ) (1 - \bar{y}_0) + \frac{B\alpha t}{2} (1 - \bar{y}_0)^2 \right]$$

Для материала с линейным упрочнением

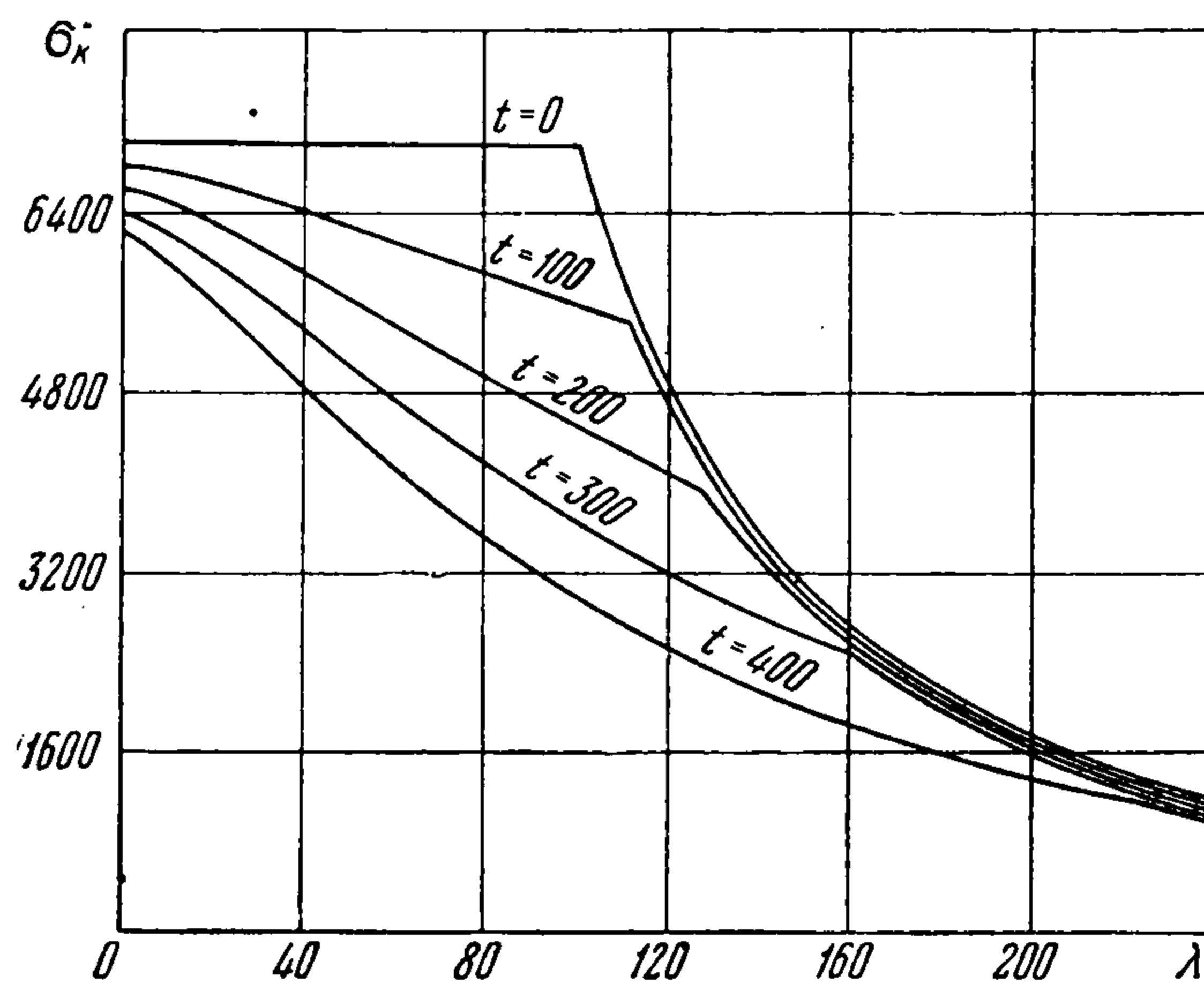
$$\varphi_0(\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_s; \quad \varphi_0(\varepsilon) = (E_0 - E_0')(\varepsilon - \varepsilon_s), \quad \varepsilon \geq \varepsilon_s \quad (24)$$

где  $\varepsilon_s$  — деформация, соответствующая на диаграмме  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$  точке перехода в область пластических деформаций с модулем упрочнения  $E_0'$ .



Фиг. 1

В этом случае при вычислении интегралов, входящих в уравнения (21), (22) и (23) следует иметь в виду, что при  $\varepsilon \leq \varepsilon_s = \varepsilon^\circ + 1/2 \alpha t (1 - \bar{y}_s)$  подынтегральные выражения



Фиг. 2

обращаются в нуль. Величина  $\bar{y}_s = 2\bar{y}_s/h$  соответствует границе упругой и пластической зон сечения при заданных значениях  $\varepsilon_s$ ,  $t$  и  $\varepsilon^\circ$ .

Выражения для приведенного модуля и напряжения  $\sigma_N$  могут быть получены

в конечном виде:

$$K = \frac{E_0}{2} [1 - B(1 - \bar{y}_0)] \{[(1 - \bar{y}_0)^3 + (\bar{y}_0 - \bar{y}_s)^3] + \bar{E}_0 [(1 + \bar{y}_0)^3 - (\bar{y}_0 - \bar{y}_s)^3]\} + \\ + \frac{3BE_0}{8} \{[(1 - \bar{y}_0)^4 - (\bar{y}_0 - \bar{y}_s)^4] - \bar{E}_0 [(1 + \bar{y}_0)^4 - (\bar{y}_0 - \bar{y}_s)^4]\} \quad (25)$$

$$\sigma_N = E_0 \left[ (1 - B) \varepsilon^0 + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} B \right) \alpha t \right] - \\ - (E_0 - E_0') \left[ \frac{B\alpha t}{8} \bar{y}_s + \frac{\alpha t}{4} \left( \frac{1}{2} - B \right) (1 + \bar{y}_s)^2 + \frac{B\alpha t}{24} (1 + \bar{y}_s)^3 \right] \quad (26)$$

где  $\bar{y}_0$  определяется из уравнения

$$1 + \bar{E}_0 + (1 - \bar{E}_0) [H(1 - \bar{y}_s^2) - \bar{y}_s^3] - \{2H[1 - \bar{y}_s + \bar{E}_0(1 + \bar{y}_s)] + \\ + \frac{3}{2} (1 - \bar{E}_0) (1 - \bar{y}_s^2)\} \bar{y}_0 = 0 \quad (27)$$

Здесь

$$\bar{E}_0 = E_0' / E_0, \quad H = 3(1 - B) / 2B$$

При  $\bar{y}_0 \leq \bar{y}_s$  пластическая область совпадает с областью догружения, поэтому в уравнении (27) следует положить  $\bar{y}_s = \bar{y}_0$ . В этом случае имеем уравнение третьей степени относительно  $y_0$

$$1 + \bar{E}_0 - \frac{1}{2} (1 - \bar{E}_0) (3\bar{y}_0 - \bar{y}_0^3) + H [(1 - \bar{E}_0) (1 + \bar{y}_0^2) - 2(1 + \bar{E}_0) \bar{y}_0] = 0 \quad (28)$$

Полагая в уравнениях (25) — (28)  $E_0' = \bar{E}_0 = 0$ , получим решение поставленной задачи для материала с площадкой текучести.

На фиг. 1 и 2 приведены результаты вычисления границы устойчивости соответственно для материала с линейным упрочнением при значениях  $E_0 = 1.75 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $E_0' = 0.111 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\varepsilon_s = 0.0040$ ,  $dE/dT = 10^3$  кг/см<sup>2</sup>град,  $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}$  и для идеально пластического материала при тех же значениях  $E_0$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $dE/dT$  и  $\alpha$ .

Влияние нагрева особенно значительно в области малых упруго-пластических деформаций при средних значениях гибкости стержня.

Поступила 5 XI 1957

## ДАВЛЕНИЕ КРУГЛОГО ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, МОДУЛЬ УПРУГОСТИ КОТОРОГО ЯВЛЯЕТСЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ГЛУБИНЫ

В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

В статье Б. Г. Коренева [1] сформулирована задача о штампе, лежащем на основании, модуль упругости которого изменяется с глубиной по степенному закону. Для осесимметричного случая, как показано в [1], давления и осадки на поверхности полупространства можно представить в виде

$$p_0(\rho) = \int_0^\infty f(\beta) \int_{J_0} (\beta\rho) d\beta, \quad W_0(\rho) = A_m \int_0^\infty \beta^\alpha f(\beta) \int_{J_0} (\beta\rho) d\beta \quad (0.1)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя,  $m$  — показатель степени в выражении для упругого ядра ( $1 > m > 0$ ),

$$A_m = \frac{2^{1-m} \Gamma^{1/2}(1-m)}{E_m \Gamma^{1/2}(1+m)}, \quad \alpha = m - 1$$

При  $m = 0$  получается обычное однородное полупространство, и в этом случае  $E_0 = E / (1 - \mu^2)$ .