

## О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ВОЗМОЖНЫХ ФОРМ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЧИСЛАХ ФРУДА, БЛИЗКИХ К ЕДИНИЦЕ

Н. Н. Моисеев

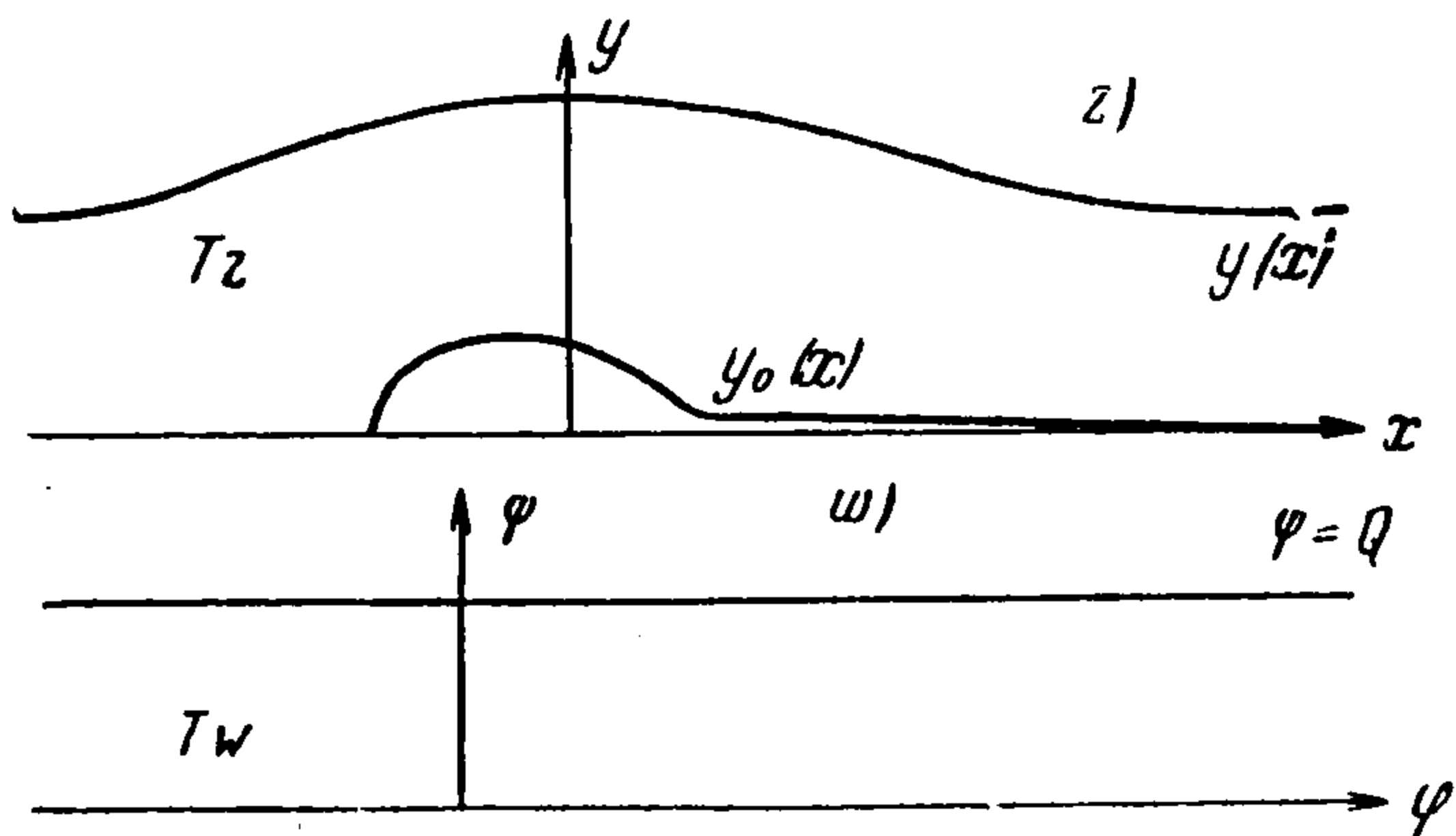
(Москва)

Как известно, значение числа Фруда  $F = 1$  является критическим. Характер установившегося потока тяжелой жидкости, скорость которой меньше критической, т. е. соответствующий  $F < 1$ , резко отличается от характера потока при  $F > 1$ . В этом смысле значение  $F = 1$  является бифуркационным. Поэтому следует ожидать, что при числах Фруда, близких к единице, могут существовать различные формы установившегося потока.

Одним из примеров такой неоднозначности является известная задача об уединенной волне. Если заданы расход  $Q$  и глубина на  $\infty$ , причем число Фруда несколько более единицы, то возможны две формы реализации поступательного потока. Свободная поверхность может быть либо горизонтальной, либо может иметь форму уединенной волны. Точно так же следует ожидать, что обтекание потоком препятствия (или уступа) возможно не единственным образом. Так как задачи обтекания тяжелой жидкостью решались только в линейной постановке (см., например<sup>[1]</sup>), то эта неоднозначность не могла быть вскрыта. Явление неоднозначности обтекания носит существенно нелинейный характер. Кроме того, обычно применяемые методы перестают быть справедливыми при числах Фруда, близких к единице.

В настоящей работе используется теорема М. А. Лаврентьева для оценки модуля производной при отображении узких полос<sup>[2]</sup>. Они оказываются наиболее удобными как раз при числах Фруда, близких к единице. Это позволяет рассмотреть задачу в приближенной постановке, сохранив, однако, ее нелинейный характер. В работе показывается, что при числах Фруда, близких к единице, возможны во всяком случае две формы обтекания препятствия. Поскольку исследования основываются на теории приближенных конформных преобразований, они носят также приближенный характер: вопрос о теоремах существования не ставится. Попутно мы получаем новую приближенную теорию уединенной волны.

1. Рассмотрим задачу об обтекании препятствия установившимся безвихревым потоком тяжелой жидкости, имеющей свободную границу (фиг. 1). Задача сводится к



Фиг. 1

конформному отображению полосы  $T_z'$ , ограниченной линией дна  $y = y_0(x)$  и неизвестной свободной границей  $y = y(x)$  на полосу  $T_w$  единичной ширины в плоскости  $w$ , если вдоль кривой  $y = y(x)$  выполнено соотношение

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 + 2vy = c, \quad v = \frac{gh^3}{Q^2} \quad (1.1)$$

Здесь потенциал  $w$  и координаты  $z, y$  взяты в безразмерном виде,  $h$  — характерный размер глубины,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $Q$  — расход. Очевидно, что  $v = 1/F^2$ .

Если функции  $y_0(x)$  и  $y(x)$  удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то для  $|dw/dz|$  в точках верхней границы  $T_z$  имеет место оценка (см. [1]).

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| \approx \frac{1}{y - y_0} \left\{ 1 + \frac{y - y_0}{6} y_0'' + \frac{y - y_0}{3} y'' \right\} \quad (1.2)$$

Если положить  $y_0 \equiv 0$  и в равенстве (1.1) заменить значение  $|dw/dz|$  оценкой (1.2) и, обозначая  $y_0 = 1 + \eta$ , подобрать  $c$  так, чтобы  $\eta = 0$  было интегралом уравнения (1.1), то получим

$$\eta'' = 3(1 - v)\eta - 3\left(v + \frac{1}{1}\right)\eta^2 + f(x, \eta, v) \quad (1.3)$$

где

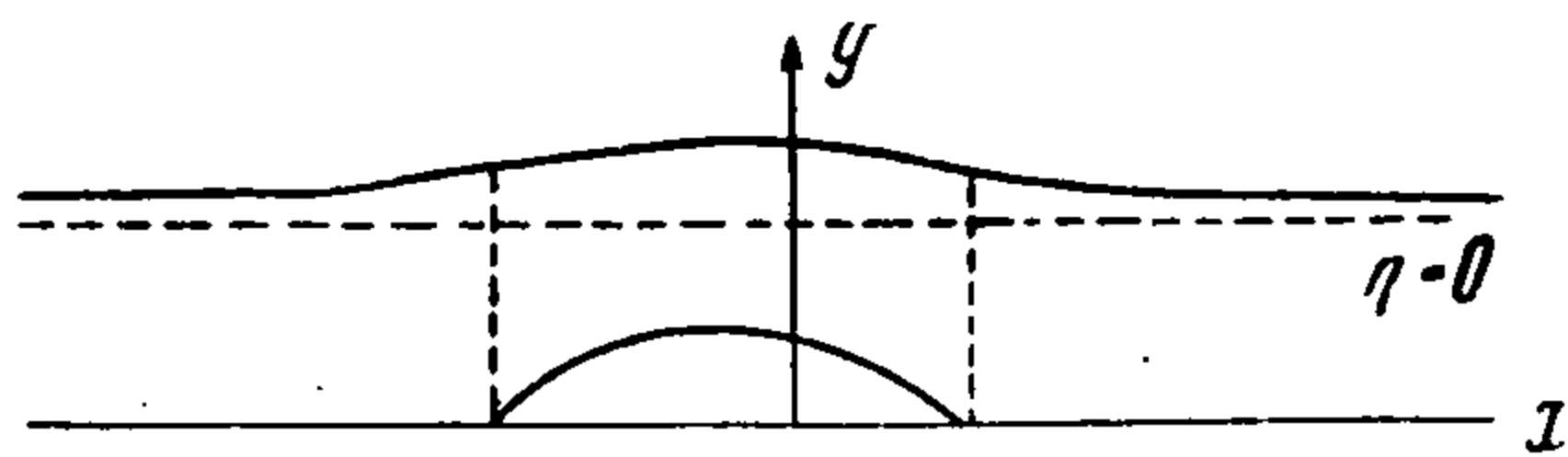
$$f(x, \eta, v) = 3\eta y_0 \left( v + \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} y_0^2 - \frac{1}{2} y_0''$$

Таким образом, приближенно исследование свободной поверхности жидкости сводится к исследованию уравнения (1.3).

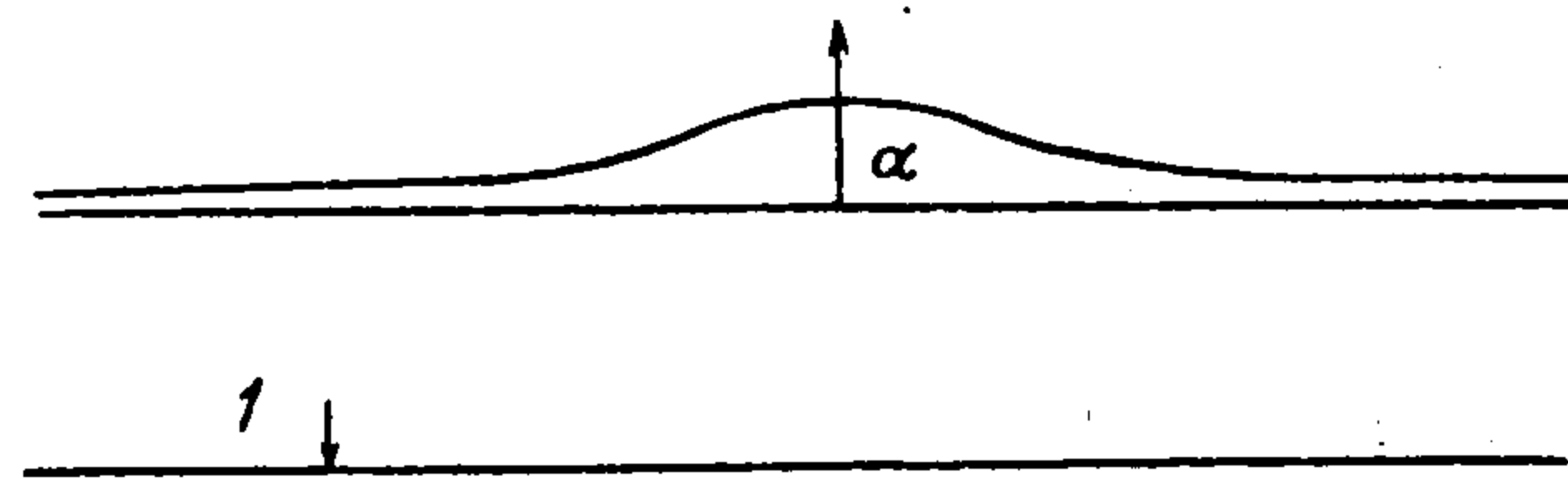
Любое соотношение  $h$  и  $Q$  может определять некоторый равномерный поток над гладким дном. Однако каждой комбинации  $h$  и  $Q$  будет соответствовать свое значение постоянной  $c$ . Поэтому фиксация  $c$  означает выбор параметров равномерного потока, в окрестности которых проводится исследование.

В дальнейшем будем считать, что число  $\nu$  близко к единице. Можно показать, что если разность  $1 - \nu$  достаточно мала по абсолютной величине, то все условия указанной теоремы М. А. Лаврентьева выполнены.

2. Пусть вначале  $\nu < 1$  (что означает, что  $Q > \sqrt{gh^3}$ ). Поставим задачу отыскания



Фиг. 2



Фиг. 3

формы свободной границы, которая переходила бы в горизонтальную прямую при  $\max |y_0(x)| = \mu \rightarrow 0$ . Для этого положим

$$\eta = \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \dots, \quad y_0 = \mu z \tag{2.1}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1.3), найдем, что

$$\eta_1'' = 3(1 - \nu)\eta_1 + F_1(x), \quad F_1 = -\frac{1}{2}y_0'' \tag{2.2}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu)}} \left\{ \exp(\sqrt{3(1-\nu)}x) \left[ \int_0^x F_1(\tau) \exp(-\sqrt{3(1-\nu)}\tau) d\tau + c_1 \right] + \exp(-\sqrt{3(1-\nu)}x) \left[ c_2 + \int_0^x F_1(\tau) \exp(\sqrt{3(1-\nu)}\tau) d\tau \right] \right\} \tag{3.3}$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим<sup>1</sup>, что  $F_1(\tau) \equiv 0$ , если  $|\tau| > N$ . Выберем постоянные  $c_1$  и  $c_2$  так, чтобы  $\lim \eta = 0$ , при  $|x| \rightarrow \infty$ . Очевидно, что для этого

$$c_1 = -\int_0^N F_1(\tau) \exp(-\sqrt{3(1-\nu)}\tau) d\tau, \quad c_2 = -\int_{-N}^0 F_1(\tau) \exp(\sqrt{3(1-\nu)}\tau) d\tau$$

и, следовательно,

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{3(1-\nu)}} \left\{ \exp(\sqrt{3(1-\nu)}x) \int_0^N F_1(\tau) \exp(-\sqrt{3(1-\nu)}\tau) d\tau + \exp(-\sqrt{3(1-\nu)}x) \int_{-N}^x F_1(\tau) \exp(\sqrt{3(1-\nu)}\tau) d\tau \right\} \tag{2.4}$$

Форма свободной границы имеет вид, схематично указанный на чертеже (фиг. 2). При  $\nu \rightarrow 0$  (что соответствует  $Q \rightarrow \infty$  или  $\nu \rightarrow \infty$ ) форма свободной границы стремится к некоторому предельному значению. При  $\nu \rightarrow 1$  решение (2.4) перестает иметь смысл. Вычисление следующих приближений не представляет труда.

После того как свободная граница определена, потенциал скоростей можно найти, пользуясь приближенными формулами конформных отображений.

<sup>1</sup> Отказ от этого ограничения потребует наложить дополнительные ограничения на сходимость интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \exp(\pm \sqrt{3(1-\nu)}\tau) d\tau$$

3. Уравнение (1.3) при  $f \equiv 0$  имеет также нетривиальные решения. Поэтому можно найти форму свободной границы, отличную от (2.4), которая переходит в некоторую линию, отличную от горизонтальной прямой при  $\max |y_0(x)| \rightarrow 0$ . Для определения такого течения положим  $1 - \nu = \alpha$ , где  $\alpha$  — некоторая малая величина порядка  $\eta$ . Перепишем (1.3) в виде

$$\eta'' = 3\alpha\eta - 9/2\eta^2 + \mu f^*(x, \eta, \nu), \quad \mu f^* = f + \alpha\eta^2 \quad (3.1)$$

Будем искать решение (4) в виде ряда  $\eta = \eta_0 + \mu\eta_1 + \dots$ . Для  $\eta_0$  получаем

$$\eta'' = 3\alpha\eta - 9/2\eta^2 \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) приближенно описывает уединенную волну. В самом деле, оно имеет однопараметрическое семейство частных решений  $\eta_0(x, x_0)$ , которые при  $x \rightarrow \pm \infty$  обращаются в нуль (фиг. 3):

$$\eta = \frac{\alpha}{\text{ch}^2 \{1/2 \sqrt{3\alpha} (x - x_0)\}} \quad (3.3)$$

где  $x_0$  может быть любым. Формула (3.3) с точностью до малых высшего порядка совпадает с известной формулой Бусинеска<sup>[3]</sup>

$$\eta = \alpha \text{sch}^2 \left( \sqrt{\frac{3\alpha}{4(1+\alpha)}} (x - x_0) \right) \quad (3.4)$$

Если ввести понятие скорости распространения волны  $v = Q/h$ , то  $\nu = gh/v^2$ . Так как  $\alpha = 1 - \nu$ , то зависимость скорости распространения от амплитуды будет

$$v = \sqrt{\frac{gh}{1-\alpha}} = \sqrt{\frac{gh}{1-\varepsilon/h}} \quad (3.5)$$

где  $\varepsilon = ah$  — амплитуда. Разлагая подкоренное выражение в ряд и удерживая первые два слагаемых, получаем снова формулу Бусинеска для скорости распространения уединенной волны:

$$v = \sqrt{g(h + \varepsilon)}$$

Отметим здесь еще физический смысл  $h$ .  $h$  есть асимптотическая глубина, — глубина слоя жидкости на  $\infty$ . Волновая поверхность расположена целиком над линией  $y = h$ .

Для  $\eta_1$  получим такое уравнение:

$$\eta_1'' = 3\alpha\eta_1 - 9\eta_0\eta_1 + f_1^*(x, x_0, \alpha), \quad f_1^* = \frac{1}{\mu} [f(x, \eta_0, \nu) + \alpha\eta_0^2] \quad (3.6)$$

Рассмотрим однородную часть уравнения (3.6). Нетрудно проверить, что одно его частное решение будет

$$y_1(x + x_0) = \frac{\text{th} [1/2 \sqrt{3\alpha} (x + x_0)]}{\text{ch}^2 [1/2 \sqrt{3\alpha} (x + x_0)]}$$

Тогда второе частное решение можно найти, пользуясь теоремой Лиувилля:

$$y_2(x + x_0) = \frac{\text{th} [1/2 \sqrt{3\alpha} (x + x_0)]}{\text{ch}^2 [1/2 \sqrt{3\alpha} (x + x_0)]} \int_0^x \frac{\text{ch}^4 [1/2 \sqrt{3\alpha} (\tau + x_0)]}{\text{th}^2 [1/2 \sqrt{2\alpha} (\tau + x_0)]} d\tau$$

Следовательно, общее решение уравнения (3.6) будет

$$\eta_1 = \frac{1}{y_2 y_1' - y_1 y_2'} \left\{ y_1(x + x_0) \left[ \int_0^x f_1^*(\tau, x_0, \alpha) y_2(\tau + x_0) d\tau + c_1 \right] - \right. \\ \left. - y_2(x + x_0) \left[ \int_0^x f_1^*(\tau, x_0, \alpha) y_1(\tau + x_0) d\tau + c_2 \right] \right\} \quad (3.7)$$

Так как  $y_2(x)$  неограниченно при  $x \rightarrow \pm \infty$ , то для существования ограниченного решения необходимо, чтобы

$$\int_{-N}^N f_1^*(\tau, x_1, \alpha) y_1(\tau + x_0) d\tau = 0 \quad (3.8)$$

Величина  $\alpha = 1 - \nu$  должна считаться заданной. Она определяет при данном значении асимптотической глубины  $h$  величину расхода  $Q$ , или, что то же самое, скорость распространения волны. Поэтому уравнение (3.8) — это уравнение для опре-

деления параметра  $x_0$ . (Следует заметить, что можно, наоборот, задать  $x_0$ , но тогда уравнение (3.8) определит значение  $\alpha$ .)

Так как частное решение  $y_1$  обращается в нуль при  $x \rightarrow \pm \infty$ , то решение (3.7) при любом значении постоянной  $c_1$  [если имеет место (3.8)] удовлетворяет требованию  $\lim \eta_1 = 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Значение  $c_1$  должно быть определено из уравнения второго приближения.

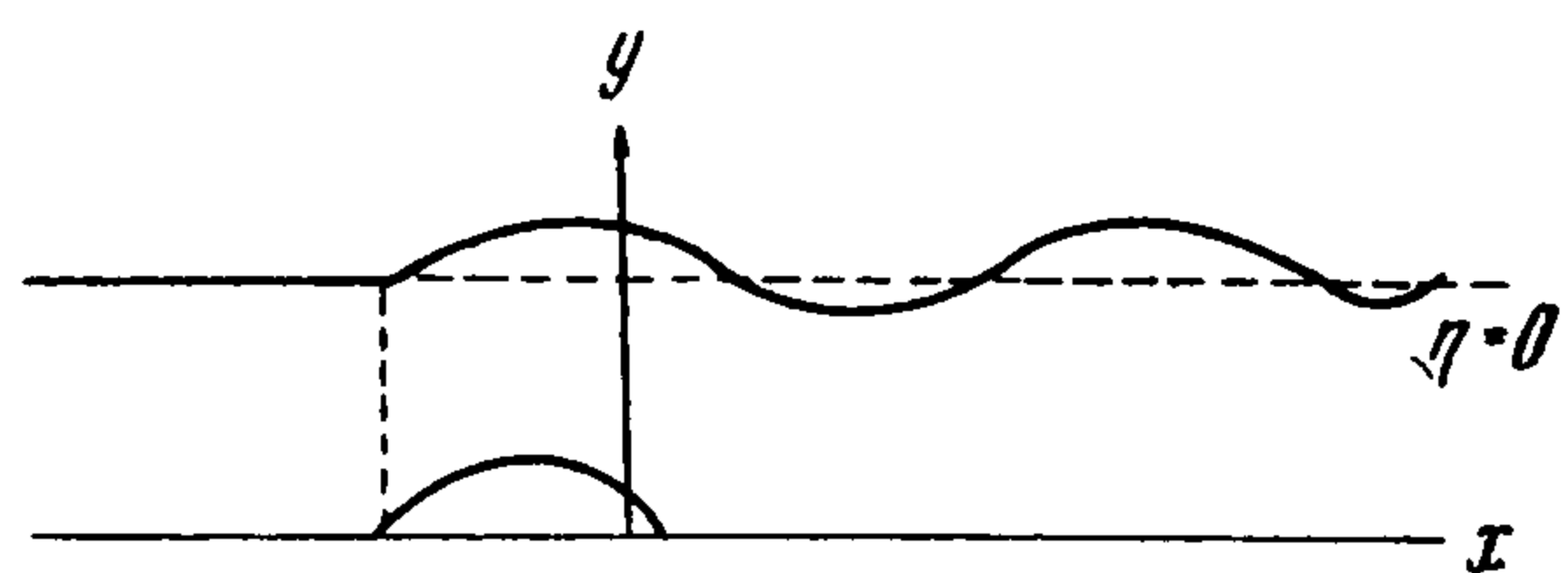
Для определения следующих членов разложения  $\eta_k$  мы получаем уравнения, аналогичные (3.6), только функции  $f_i^*$  будут отличаться от  $f_1^*$ . Поэтому можно повторить изложенную выше процедуру. Уравнение (3.8) будет иметь вид:

$$\int_{-N}^N f_i^*(\tau, x_0, \alpha, c_1, \dots, c_{i-1}) y_1(\tau + x_0) d\tau = 0 \quad (3.9)$$

Величины  $x_0, c_1, \dots, c_{i-2}$  будут известными,  $c_{i-1}$  надо определить из (3.9).

Таким образом, мы нашли поток, обтекающий препятствие, свободная граница которого при  $\max |y_0| \rightarrow 0$  переходит в уединенную волну. При заданном расходе  $Q$  вершина этой волны вполне определенным образом расположена относительно препятствия. (Значение  $x_0$  определено.)

Итак, если  $\nu < 1$  и достаточно мало от нее отличается, то можно приближенно определить во всяком случае два режима обтекания. Совершенно аналогично обстоит дело, если  $\nu > 1$ .



Фиг. 4

4. Пусть теперь  $\nu > 1$  (что означает, что  $Q < \sqrt{gh^3}$ ). Найдем поток, свободная граница которого переходила бы в горизонтальную прямую при  $\max |y_0| \rightarrow 0$ . Для этого снова представим  $\eta$  в виде ряда (2.1). Для  $\eta_1$  мы будем иметь уравнение (2.2). Так как на этот раз  $\nu > 1$ , то представим это уравнение в виде

$$\eta_1'' + 3(\nu - 1)\eta = F_1(x) \quad (4.1)$$

Его общим решением будет функция

$$\eta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3(\nu-1)}} \left\{ \sin \sqrt{3(\nu-1)} x \left[ \int_0^x F_1(\tau) \cos \sqrt{3(\nu-1)} \tau d\tau + c_0 \right] - \cos \sqrt{3(\nu-1)} x \left[ \int_0^x F_1(\tau) \sin \sqrt{3(\nu-1)} \tau d\tau + c_2 \right] \right\}$$

Если слева на  $\infty$  нет волн, т. е. если  $\eta \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ , то значения постоянных  $c_1$  и  $c_2$  надо выбрать так, чтобы функция  $\eta_1(x)$  имела вид:

$$\eta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3(\nu-1)}} \left\{ \sin \sqrt{3(\nu-1)} x \int_{-N}^x F_1(\tau) \cos \sqrt{3(\nu-1)} \tau d\tau - \cos \sqrt{3(\nu-1)} x \int_{-N}^x F_1(\tau) \sin \sqrt{3(\nu-1)} \tau d\tau \right\} \quad (4.4)$$

Форма свободной поверхности в этом случае имеет вид (фиг. 4). Эта форма существенно отличается от той, которая описывается функцией (2.4). В самом деле, если  $\nu < 1$ , то, если слева на  $\infty$  (вверх по потоку) нет волн, то их нет и справа на  $\infty$ . Если же  $\nu > 1$ , то при отсутствии волн слева на  $\infty$  справа (вниз по потоку) поверхность жидкости обязательно будет волновой,

$$(\eta)_{x>N} = \frac{1}{\sqrt{3(\nu-1)}} \{ A \sin \sqrt{3(\nu-1)} x + B \cos \sqrt{3(\nu-1)} x \}$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные:

$$A = \int_{-N}^{+N} F_1(x) \cos \sqrt{3(\nu-1)} x dx, \quad B = \int_{-N}^{+N} F_2(x) \sin \sqrt{3(\nu-1)} x dx$$

Когда  $\nu > 1$ , то обтекание препятствия потоком также не однозначно. В частности можно построить течение, свободная граница которого при  $\max |y_0(x)| \rightarrow 0$  переходит в неперриодическую кривую, имеющую горизонтальные асимптоты. Обозначим  $\nu - 1 = \alpha$  и, отбрасывая малые третьего порядка, получим

$$\eta'' + 3\alpha\eta = -\frac{3}{2}\eta^2 - \mu f^*(x, \eta, \nu) \quad (4.3)$$

Решение уравнения (4.3) будем искать в виде ряда  $\eta = \eta_0 + \mu\eta_1 + \dots$ , где  $\eta_0$  удовлетворяет уравнению

$$\eta_0'' + 3\alpha\eta_0 - \frac{3}{2}\eta_0^2 = 0 \quad (4.4)$$

Заметим, что уравнение (4.4) преобразованием  $\eta_0 = \eta + \frac{2}{3}\alpha$  переходит в уравнение (3.2); последнее имеет решение (3.3). Следовательно, уравнение (4.4) имеет частное решение:

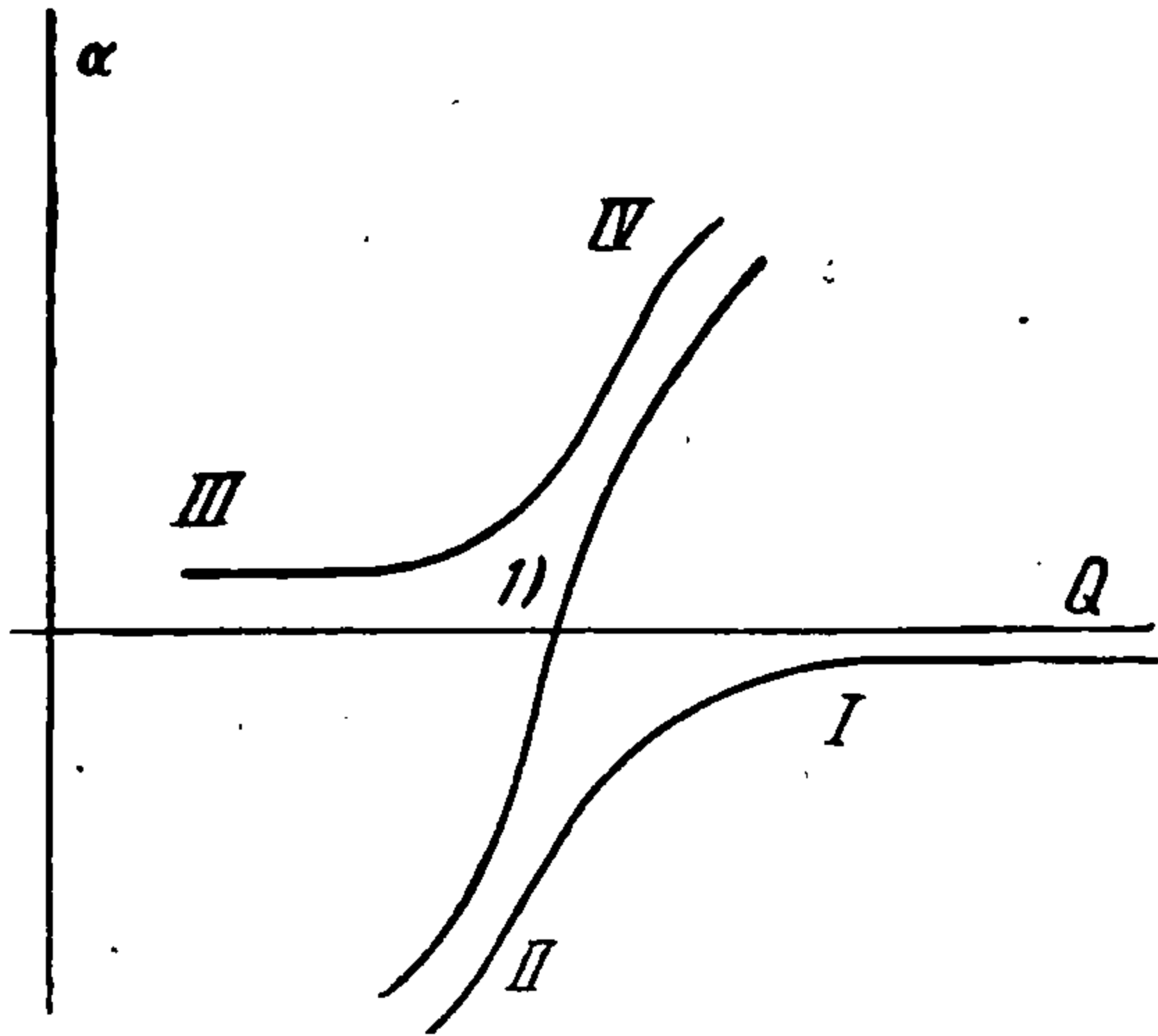
$$\eta = \alpha \left[ \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{3\alpha} (x - x_0) \right\}} - \frac{2}{3} \right]$$

Это решение будет также описывать уединенную волну, но асимптотическая глубина которой

$$h^* = h [1 - 2(\nu - 1)]$$

Скорость распространения этой волны будет

$$v = \sqrt{\frac{gh}{1 + \alpha}}$$



Фиг. 5

Если в качестве функции  $\eta_0$  мы возьмем решение (4.5), то вычисления  $\eta_1, \eta_2 \dots$  и т. д. ничем не будут отличаться от тех, которые были проделаны в конце п. 3.

Таким образом, для  $\nu > 1$  мы нашли поток, обтекающий препятствие, свободная граница которого при  $\max |y_0| \rightarrow 0$  переходит в некоторую уединенную волну, асимптоты и положение горба которой вполне определены заданием расхода  $Q$ .

Итак, если  $\nu > 1$  и достаточно мало отличается от единицы, то можно приближенно определить во всяком случае два режима обтекания.

5. В заключение представим себе качественно возможный характер потока в плоскости  $\alpha Q$  (амплитуда — расход), если  $Q$  изменяется в окрестности значения  $\sqrt{gh^3}$  [схематично эти зависимости изображены на чертеже (фиг. 5)].

Пусть  $Q > \sqrt{gh^3}$  ( $\nu < 1$ ). Тогда возможна такая форма обтекания препятствия, при которой свободная граница описывается формулой (2.4) (кривая I). При уменьшении расхода эта форма равновесия свободной поверхности деформируется и при  $Q < \sqrt{gh^3}$  может начать изменяться по закону, описываемому кривой II. Если наибольшее возвышение препятствия  $\rightarrow 0$ , то свободная граница в этом случае переходит в уединенную волну, асимптота которой определяется равенством

$$h^* = h \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{gh^3}{Q^2} - 1 \right) \right]$$

Одновременно возможна форма равновесия свободной границы, которая близка к горизонтальной прямой (кривая III) и описывается формулой (4.2). Эта форма при увеличении расхода  $Q$  будет как-то изменяться, и если  $Q$  станет больше  $\sqrt{gh^3}$ , то может перейти в форму, близкую к уединенной волне с асимптотой  $h^* = h$ .

Изучение вопроса неоднозначности, которое изложено в этой заметке, никак не претендует на полноту. Ряд обстоятельств просто остался невыясненным, например вопрос о возможности существования других форм равновесия, отличных от рассмотренных. К тому же рассмотрение является приближенным.

Поступила 15 VI 1957

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К о ч и н Н. Е. О движении тяжелой жидкости в канале с дном, имеющим уступ. Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, 1949.
2. Л а в р е н т ь е в М. А. и Ш а т а т Б. В. Методы теории функций комплексного перемещения. ГИТТЛ, 1951.
3. Л а м б. Гидродинамика. ГИТТЛ, 1947.